УДК 517.521.8

М. Ф. БУРЛЯЙ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ $(\overline{R}, \quad p_m, \quad q_n)$-МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Одно свойство $(\overline{R}, p_n)$-методов, отмеченное Н. А. Давыдовым в работе [1] для обыкновенных рядов, в [2] перенесено на $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методы суммирования двойных рядов. С помощью этого свойства получен ряд теорем тауберова типа для $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методов. В настоящей заметке доказывается теорема тауберова типа для $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методов суммирования двойных рядов, не отмеченная в работе [2].

Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}. \tag{1}$$

Обозначим через

$$S_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}$$

его частные суммы. Ряд (1) называется суммируемым $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методом к числу S ([3]), если $\lim\limits_{m,n\to\infty} \overline{R}_{mn} = S$, где

$$\overline{R}_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j S_{ij};$$

$$p_m \geqslant 0;\; p_0 > 0;\; P_m = \sum_{i=0}^{m} p_i \to \infty;\; q_n \geqslant 0;\; q_0 > 0;\; Q_n = \sum_{j=0}^{n} q_i \to \infty.$$

Пусть G — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости и G_ε — замкнутая выпуклая ε-окрестность множества G. Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, мы назвали $(\overline{R}, \quad p, \quad q)$-множеством двойной последовательности комплексных чисел S_{mn}, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\mu(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, \quad m'_k;\; n_k, \; n'_k\}$

$(k=1, 2, \ldots)$, что $S_{mn} \in G_\varepsilon$ для $(m, n) \in \Delta_k$, $m_k n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, причем

$$\frac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geqslant \mu(\varepsilon) > 1, \frac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geqslant \mu(\varepsilon) > 1. \qquad (2)$$

Если $(\overline{R}, p, q)$-множество G состоит из одной точки, то эту точку будем называть $(\overline{R}, p, q)$-точкой последовательности S_{mn}. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назвали $(\overline{R}, p, q)$-точкой последовательности S_{mn}, если найдутся число $\mu > 1$, последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что $S_{mn} \in G_k$ для $(m, n) \in \Delta_k$, причем

$$\frac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geqslant \mu > 1, \ \frac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geqslant \mu > 1 \ (k=1, 2, \ldots), \ m_k, \ n_k \to \infty \ (k \to \infty).$$

В работе [2] доказана

Теорема 1. *Если ряд* [1] *суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$*-методом к числу* S *и множество* G *является* $(\overline{R}, p, q)$*-множеством последовательности* S_{mn}, *то* $S \in G$. *Если бесконечно удаленная точка является* $(\overline{R}, p, q)$*-точкой последовательности* S_{mn}, то $\overline{\lim} |\overline{R}_{mn}| = \infty$.

Лемма 1. *Пусть даны ряд* (1) *с действительными числами и возрастающие последовательности натуральных чисел* m_k и n_k *и пусть частные суммы* S_{mn} *этого ряда удовлетворяют условиям*

$$\underline{\lim}_{\substack{k,m,n \to \infty \\ 1 < \frac{P_m}{P_{m_k}} \to 1}} (S_{mn} - S_{m_k n}) \geqslant -r; \quad \underline{\lim}_{\substack{k,m,n \to \infty \\ 1 < \frac{Q_n}{Q_{n_k}} \to 1}} (S_{mn} - S_{m n_k}) \geqslant -r, \qquad (3)$$

где $0 \leqslant r < \infty$. *Если ряд* (1) *суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$*-методом к числу* S, *то*

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} S_{m_k n_k} \leqslant S + r.$$

Доказательство. Предположим, что

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} S_{m_k n_k} = S^* > S + r.$$

Рассмотрим последовательность $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}} \to S^*$ при $\nu \to \infty$. Можем считать, что $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}} \geqslant S^* - \frac{\varepsilon}{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ $(S^* - S - r)$. Обозначим через $S_{m_{k_\nu} n'_{k_\nu}}$ первую после $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}$ сумму в строке m_{k_ν}, удовлетворяющую условию $S_{m_{k_\nu} n'_{k_\nu}} < S^* - r - \varepsilon$. Если такая сумма существует для каждого ν, то

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{Q_{n'_{k_\nu}-1}}{Q_{n_{k_\nu}}} = \mu_1 > 1. \tag{4}$$

В противном случае нашлась бы последовательность

$$\frac{Q_{n'_{k_{\nu_i}}}}{Q_{n_{k_{\nu_i}}}} \to 1 \ (i \to \infty)$$

и по второму из соотношений (3) имели бы

$$\varliminf_{i \to \infty} (S_{m_{k_{\nu_i}} n'_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}} n_{k_{\nu_i}}}) \geqslant -r,$$

что противоречит неравенствам

$$S_{m_{k_{\nu_i}} n'_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}} n_{k_{\nu_i}}} < -r - \frac{\varepsilon}{2} \ (i = 1, 2, \ldots),$$

справедливость которых следует из построения последовательности $S_{m_{k_\nu} n'_{k_\nu}}$. Если же для некоторого ν $S_{m_{k_\nu}, j} \in [S^* - r - \varepsilon, +\infty]$ при $n_{k_\nu} \leqslant j < +\infty$, то индекс n'_{k_ν} выберем так, чтобы

$$\frac{Q_{n'_{k_\nu}-1}}{Q_{n_{k_\nu}}} \geqslant 2.$$

Следовательно, для этого ν $S_{m_{k_\nu}, j} \in [S^* - r - \varepsilon, +\infty)$ при $n_{k_\nu} \leqslant \leqslant j \leqslant n'_{k_\nu} - 1$, причем

$$\frac{Q_{n'_{k_\nu}-1}}{Q_{n_{k_\nu}}} \geqslant \mu'_1 > 1, \ 1 < \mu'_1 \leqslant \min\{\mu_2, 2\}, \ \nu > N_1.$$

Обозначим через $S_{m'_{k_\nu} n_{k_\nu}}$ первую после $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}$ сумму в столбце n_{k_ν}, удовлетворяющую условию $S_{m'_{k_\nu} n_{k_\nu}} < S^* - r - \varepsilon$. Если такая сумма существует для каждого ν, то, как и выше, можно показать, что

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{P_{m'_{k_\nu}-1}}{P_{m_{k_\nu}}} = \mu_2 > 1.$$

Если же для некоторого ν сумма $S_{i, n_{k_\nu}} \in [S^* - r - \varepsilon, +\infty]$ при $m_{k_\nu} \leqslant i < +\infty$, то индекс m'_{k_ν} выберем так, чтобы

$$\frac{P_{m'_{k_\nu}-1}}{P_{m_{k_\nu}}} \geqslant 2.$$

Следовательно, для этого ν $S_{i,n_{k_\nu}} \in [S^* - r - \varepsilon, +\infty)$ $m_{k_\nu} \leqslant i \leqslant m'_{k_\nu} - 1$, причем

$$\frac{P_{m'_{k_\nu} - 1}}{P_{m_{k_\nu}}} \geqslant \mu'_2 > 1;\ 1 < \mu'_2 \leqslant \min\{\mu_2,\ 2\};\ \nu > N_2.$$

Рассмотрим последовательность прямоугольников $\Delta_{k_\nu}\{m_{k_\nu},\ m'_{k_\nu} - 1;\ n_{k_\nu},\ n'_{k_\nu} - 1\}$; $\nu > N = \max\{N_1, N_2\}$,

$$\frac{P_{m'_{k_\nu} - 1}}{P_{m_{k_\nu}}} \geqslant \mu > 1,\ \frac{Q_{n'_{k_\nu} - 1}}{Q_{n_{k_\nu}}} \geqslant \mu > 1, \tag{5}$$

где $1 < \mu = \min\{\mu'_1,\ \mu'_2\}$.

Возможны следующие случаи.

1. Существует последовательность прямоугольников $\Delta_{k_{\nu_i}}\{m_{k_{\nu_i}},\ m'_{k_{\nu_i}} - 1;\ n_{k_{\nu_i}},\ n'_{k_{\nu_i}} - 1\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такая, что для $(m,\ n) \in \Delta_{k_{\nu_i}}$ $S_{mn} \in [S^* - r - \varepsilon, +\infty)$. Тогда из (5) следует, что промежуток $[S^* - r, +\infty]$ является $(\overline{R},\ p,\ q)$-множеством последовательности S_{mn}.

2. Для каждого Δ_{k_ν}, $\nu > N$ существует точка $(m^*_{k_\nu},\ n^*_{k_\nu}) \in \Delta_{k_\nu}$ такая, что $S_{m^*_{k_\nu} n^*_{k_\nu}} < S^* - r - \varepsilon$. Таких точек может быть несколько. Через $(m^*_{k_\nu},\ n^*_{k_\nu})$ обозначим ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точки $(m_{k_\nu},\ n_{k_\nu})$. Если и этих точек несколько, то через $(m^*_{k_\nu},\ n^*_{k_\nu})$ обозначим ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точек строки m_{k_ν}. Как и при доказательстве (4), можно показать, что

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{P_{m^*_{k_\nu} - 1}}{P_{m_{k_\nu}}} = \mu^*_1 > 1;\ \varliminf_{\nu \to \infty} \frac{Q_{n^*_{k_\nu} - 1}}{Q_{n_{k_\nu}}} = \mu^*_2 > 1. \tag{6}$$

Таким образом, $S_{mn} \in [S^* - r - \varepsilon, +\infty)$ для $m_{k_\nu} \leqslant m \leqslant m^*_{k_\nu} - 1$, $n_{k_\nu} \leqslant n \leqslant n^*_{k_\nu} - 1$, $\nu > N$. Отсюда и из (6) следует, что промежуток $[S^* - r', +\infty)$ является $(\overline{R},\ p,\ q)$-множеством последовательности S_{mn}. По теореме 1 число S принадлежит промежутку $[S^* - r', +\infty)$, т. е. $S \geqslant S^* - r$, что противоречит предположению $S^* > S + r$.

Лемма 2. *Пусть дан ряд (1) с действительными членами и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k и n_k и пусть частные суммы S_{mn} этого ряда удовлетворяют условиям*

$$\varliminf_{\substack{k,\, m,\, n \to \infty \\ 1 < \frac{P_{m_k}}{P_m} \to 1}} (S_{m_k n} - S_{mn}) \geqslant -r;\ \varliminf_{\substack{k,\, m,\, n \to \infty \\ 1 < \frac{Q_{n_k}}{Q_n} \to 1}} (S_{mn_k} - S_{mn}) \geqslant -r,$$

где $0 \leqslant r < \infty$. *Если ряд* (1) *суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$*-методом к числу* S, *то*

$$\varliminf_{k \to \infty} S_{m_k n_k} \geqslant S - r.$$

Доказательство. Предположим, что

$$\varliminf_{k \to \infty} S_{m_k n_k} = S^* < S - r.$$

Тогда найдется последовательность $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}} \to S^*$ при $\nu \to \infty$. Можем считать, что $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}} \leqslant S^* + \frac{\varepsilon}{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(S - r - S^*)$. Если обозначить через $S_{m_{k_\nu}, n^*_{k_\nu} - 1}$ первую сумму в строке m_{k_ν}, предшествующую сумме $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}$ и удовлетворяющую условию $S_{m_{k_\nu}, n^*_{k_\nu} - 1} > S^* + r + \varepsilon$, а через $S_{m^*_{k_\nu} - 1, n_{k_\nu}}$ — первую сумму в столбце n_{k_ν}, предшествующую сумме $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}$ и удовлетворяющую условию $S_{m^*_{k_\nu} - 1, n_{k_\nu}} > S^* + r + \varepsilon$, то, как и при доказательстве леммы 1, можно показать, что промежуток $(-\infty, S^* + r]$ является $(\overline{R}, p, q)$-множеством последовательности S_{mn}. По теореме 1 число $S \in (-\infty, S^* + r]$, т. е. $S \leqslant S^* + r$, что противоречит предположению $S^* < S - r$. Из леммы 1 и леммы 2 следует

Теорема 2. *Пусть дан ряд (1) с действительными членами и возрастающие последовательности натуральных чисел* m_k *и* n_k *и пусть частные суммы* S_{mn} *этого ряда удовлетворяют условиям*

$$\varliminf_{\substack{k, m, n \to \infty \\ 1 < \frac{P_m}{P_{m_k}} \to 1}} (S_{mn} - S_{m_k n}) \geqslant -r; \quad \varliminf_{\substack{k, m, n \to \infty \\ 1 < \frac{Q_n}{Q_{n_k}} \to 1}} (S_{mn} - S_{m n_k}) \geqslant -r,$$

а также условиям

$$\varliminf_{\substack{k, m, n \to \infty \\ 1 < \frac{P_{m_k}}{P_m} \to 1}} (S_{m_k n} - S_{mn}) \geqslant -r; \quad \varliminf_{\substack{k, m, n \to \infty \\ 1 < \frac{Q_{n_k}}{Q_n} \to 1}} (S_{m n_k} - S_{mn}) \geqslant -r,$$

где $0 \leqslant r < \infty$. *Если ряд (1) суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$*-методом к числу* S, *то*

$$S - r \leqslant \varliminf_{k \to \infty} S_{m_k n_k} \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} S_{m_k n_k} \leqslant S + r.$$

В частности, при $r = 0$ имеем

$$\lim_{k \to \infty} S_{m_k n_k} = S.$$

Ряд (1) называется суммируемым к числу S методом логарифмических средних [4, с. 397], если

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\ln(m+1)\ln(n+1)} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \frac{S_{ij}}{(i+1)(j+1)} = S.$$

Если $p_m = \frac{1}{m+1}$, $q_n = \frac{1}{n+1}$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, то $\left(\overline{R}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{n+1}\right)$-метод эквивалентен методу логарифмических средних суммирования двойных рядов. Условие (2) в этом случае в определении $(\overline{R}, p, q)$-множества будет иметь вид

$$\frac{\ln m_k'}{\ln m_k} \geqslant \mu(\varepsilon) > 1; \ \frac{\ln n_k'}{\ln n_k} \geqslant \mu(\varepsilon) > 1 \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Частным случаем теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть дан ряд (1) с действительными членами и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k и n_k и пусть частные суммы S_{mn} этого ряда удовлетворяют условиям*

$$\varliminf_{\substack{k,m,n\to\infty \\ 1<\frac{\ln m}{\ln m_k}\to 1}} (S_{mn} - S_{m_k n}) \geqslant 0; \ \varliminf_{\substack{k,m,n\to\infty \\ 1<\frac{\ln n}{\ln n_k}\to 1}} (S_{mn} - S_{m n_k}) \geqslant 0,$$

а также условиям

$$\varliminf_{\substack{k,m,n\to\infty \\ 1<\frac{\ln m_k}{\ln m}\to 1}} (S_{m_k n} - S_{mn}) \geqslant 0; \ \varliminf_{\substack{k,m,n\to\infty \\ 1<\frac{\ln n_k}{\ln n}\to 1}} (S_{m n_k} - S_{mn}) \geqslant 0.$$

Если ряд (1) суммируется методом логарифмических средних к числу S, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k n_k} = S$.

Следствие. *Пусть дан ряд (1) с действительными членами и пусть члены этого ряда удовлетворяют условию*

$$a_{mn} \geqslant -\frac{M}{(m+1)(n+1)[\ln^2(m+1) + \ln^2(n+1)]}, \ M > 0$$

для $m_k \leqslant m \leqslant m_k' < m_{k+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $n_k \leqslant n \leqslant n_k' < n_{k+1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, причем $\frac{\ln m_k'}{\ln m_k} \geqslant \mu > 1$; $\frac{\ln n_k'}{\ln n_k} \geqslant \mu > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где число μ и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k, m_k', n_k, n_k' наперед заданы. Если ряд (1) суммируется методом логарифмических средних к числу S, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{p_k q_k} = S,$$

если $m_k(1+\varepsilon) \leqslant p_k \leqslant (1-\varepsilon) m_k'$; $n_k(1+\varepsilon) \leqslant q_k \leqslant (1-\varepsilon) n_k'$, ε — сколь угодно малое положительное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов Н. А. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов.— «Мат. сб.», 1956, т. 38 (80), № 4, с. 509 — 524.
2. Бурляй М. Ф. Об одном свойстве $(\overline{R}, \quad P_m, \quad q_n)$-методов суммирования двойных рядов и теоремах тауберова типа. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16. Харьков, 1972, с. 3—12.
3. Пичхадзе Ш. С. $R_{p,q}$-суммируемость двойных чисел рядов. — «Тр. Груз. ин-та субтроп. хоз-ва», 1965, вып. 9—10, с. 496 — 499.
4. Пичхадзе Ш. С. Взаимоотношение между методами суммирования двойных рядов $(C, 1, 1)$ и L. — «Тр. Груз. ин-та субтроп. хоз-ва», 1963, вып. 7—8, с. 397—400.

Поступила 11 июня 1974 г.