УДК 513.88

А. А. Янцевич

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДВУМЕРНОЙ МНИМОЙ КОМПОНЕНТОЙ

В случае полных ограниченных операторов с одномерной мнимой компонентой можно только по заданному спектру построить оператор, унитарно эквивалентный исходному [1—3]. Когда же $\dim\{\overline{2\operatorname{Im} AH}\} \geqslant 2$, такое построение, как видно из треугольной модели операторов класса Ω, невозможно. Однако при некоторых дополнительных условиях на каналовые элементы оператора A можно осуществить такое построение. Например, в случае двумерной мнимой компоненты таким дополнительным условием является существование в каналовом подпространстве $\overline{2\operatorname{Im} AH}$ хотя бы одного элемента g такого, что $A^*g \in \overline{2\operatorname{Im} AH}$. Такого рода условия естественным образом возникают при изучении линейно представимых случайных процессов $x(t)$ [3] с корреляционной функцией вида

$$K(t, s) = \sigma\varphi(t)\overline{\varphi(s)} + \nu\int_0^{-s}\varphi(t+\tau)\overline{\varphi(s+\tau)}\,d\tau. \qquad (1)$$

Действительно, для инфинитеземальной корреляционной функции получаем представление

$$w(t, s) = -\left.\frac{\partial K(t+\tau, s+\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\varphi_\alpha(t)\,J_{\alpha\beta}\overline{\varphi_\beta(s)},$$

где

$$\varphi_\alpha(t) = (e^{iAt}x_0,\ g_\alpha),\quad J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

и так как

$$\varphi_1(t) = \varphi(t),\quad \varphi_2(t) = -\sigma\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\nu}{2}\varphi,$$

то на каналовые элементы оператора g_α налагается дополнительное условие вида

$$iA^*g_1 = \frac{a}{\sigma}g_1 + \frac{1}{\sigma}g_2,\ a = -\frac{\nu}{2}. \qquad (2)$$

Обозначим класс операторов Ω, $\dim E = 2$, $J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию (2), через Ω_2^g.

Класс Ω_2^g играет роль, аналогичную классу полных диссипативных операторов с одномерной мнимой компонентой.

Теорема. *Главная компонента операторов класса Ω_2^g восстанавливается по спектру с точностью до унитарного преобразования.*

Нетрудно заметить, что условие (2) сохраняется при проектировании на инвариантное подпространство оператора A. Поэтому операция сцепления позволяет свести доказательство теоремы отдельно к восстановлению треугольной модели по дискретному спектру и по непрерывному (чисто вещественному) спектру.

1. Дискретная часть треугольной модели

Пусть $\{\mu_k\}$ — некоторая ограниченная последовательность невещественных чисел, все предельные точки которой лежат на вещественной оси. Треугольная модель класса Ω_2 имеет вид [2]

$$(\dot{A}f)_k = f_k\mu_k + i\sum_{s=k+1}^{\infty} f_s \Pi_s J \Pi_k^*, \tag{3}$$

где $\Pi_k \| \Pi_k^{(1)}, \Pi_k^{(2)} \|$ — последовательность однострочных матриц. Соответствующее условие узла принимает форму

$$\Pi_s^{(1)}\overline{\Pi}_s^{(2)} + \overline{\Pi}_s^{(1)}\Pi_s^{(2)} = 2\operatorname{Im}\mu_s. \tag{4}$$

Введем

$$\vartheta_k = \frac{\overline{\Pi}_k^{(2)}}{\overline{\Pi}_k^{(1)}}\Big[v - \prod_{s=1}^{k-1} |\Pi_s^{(1)}|^2\Big], \tag{5}$$

$$u = \frac{a}{\sigma},\ v = \frac{1}{\sigma}.$$

Тогда условие (2) запишется в виде

$$\vartheta_k = i\bar{\mu}_k - u + \sum_{s=1}^{k-1} 2\operatorname{Im}\mu_s - \sum_{s=1}^{k-1} \frac{|\Pi_s^{(1)}|^2\vartheta_s}{v - \sum\limits_{j=1}^{s-1}|\Pi_j^{(1)}|^2}, \tag{6}$$

т. е. (6) является рекуррентным соотношением для определения ϑ_k.

Решение (6) имеет вид

$$\vartheta_k = \prod_{j=2}^{k-1}\gamma_j\left[i\bar{\mu}_1 - u + \sum_{\nu=1}^{j-1}\frac{\xi_\nu}{\sum\limits_{l=1}^{\nu-1}\gamma_l}\right], \tag{7}$$

где

$$\vartheta_1 = i\bar{\mu}_1 - u,$$

$$\gamma_k = \frac{v - \sum\limits_{j=1}^{k-1}|\Pi_j^{(1)}|^2}{v - \sum\limits_{j=1}^{k-2}|\Pi_j^{(1)}|^2},$$

$$\xi_k = i(\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_{k-1}).$$

Подставляя (7) в условие операторного узла (4), получаем разностное уравнение для определения $|\Pi_k^{(1)}|^2$:

$$|\Pi_k^{(1)}|^2 \left\{ \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\mu}_\nu - \bar{\mu}_{\nu-1})}{\sum\limits_{j=1}^{\nu-1} |\Pi_j^{(1)}|^2 - v} - \operatorname{Im}\mu_1 - \operatorname{Re} u \right\} = \operatorname{Im}\mu_k. \tag{8}$$

Из (8) видно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\Pi_k^{(1)}|^2 < \infty$.

Следовательно, $|\Pi_k^{(1)}|^2$ и $|\Pi_k^{(2)}|^2$ восстанавливаются по $\{\mu_k\}$ с точностью до комплексных постоянных, равных по модулю единице, что и требовалось показать.

2. Непрерывная часть треугольной модели

Пусть $\alpha(x)$ — некоторая ограниченная функция на сегменте $[0, l]$. Треугольная модель класса Ω_2 имеет вид

$$\dot{A}f = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t) \Pi(t) J \Pi^*(x)\, dt, \tag{9}$$

где

$\Pi(x) = \| \Pi^{(1)}(x),\ \Pi^{(2)}(x) \|$ — однострочная матрица,

$$|\Pi^{(1)}(x)|^2 + |\Pi^{(2)}(x)|^2 = 1. \tag{10}$$

Условия операторного узла и условия (2) в этом случае следующие:

$$\frac{A - A^*}{i} = f \int_0^l f(t) [\Pi^{(2)}(t) \overline{\Pi}^{(1)}(x) + \Pi^{(1)}(t) \overline{\Pi}^{(2)}(x)]\, dt =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} (f,\ g_\alpha) J_{\alpha\beta} g_\beta, \tag{11}$$

$$g_1 = \overline{\Pi}^{(1)}(x), \quad g_2 = \overline{\Pi}^{(2)}(x), \tag{12}$$

$$i\overline{\Pi}^{(1)}(x)\alpha(x) + \int_0^x \overline{\Pi}^{(1)}(t) [\Pi^{(2)}(t) \overline{\Pi}^{(1)}(x) +$$

$$+ \overline{\Pi}^{(2)}(x) \Pi^{(1)}(t)]\, dt = u\overline{\Pi}^{(1)}(x) + v\overline{\Pi}^{(2)}(x). \tag{13}$$

Из (10), (13) нетрудно получить следующее представление для $\sigma(x) = \overline{\Pi}^{(2)}(x)/\overline{\Pi}^{(1)}(x)$:

$$\sigma(x) = \frac{-\operatorname{Re} u}{\left[v - \int\limits_0^x |\Pi^{(1)}(t)|^2\, dt\right]^2} + i \left[\int_0^x \frac{\alpha'(t)\, dt}{v - \int\limits_0^t |\Pi^{(1)}(\sigma)|^2\, d\sigma} + \frac{\alpha(0)}{v} \right]. \tag{14}$$

Используя (10) получаем дифференциальное уравнение для определения $|\Pi^{(1)}(x)|^2$. Не выписывая это дифференциальное уравнение в явном виде, рассмотрим частный случай, когда $\alpha(x)\equiv 0$. Тогда

$$\sigma(x)=\frac{-\operatorname{Re} u}{\left[v-\int\limits_0^x|\Pi^{(1)}(t)|^2\,dt\right]^2}, \tag{15}$$

и так как

$$|\Pi^{(1)}(x)|^2+|\Pi^{(2)}(x)|^2=1,$$

то для

$$\nu(x)=v-\int\limits_0^x|\Pi^{(1)}(t)|^2\,dt$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\nu}{dx}\left[1+\frac{(\operatorname{Re} u)^2}{\nu^4}\right]=-1,\ \ \nu(0)=v, \tag{16}$$

решение которого в неявном виде имеет форму

$$\nu-\frac{(\operatorname{Re} u)^2}{3}\frac{1}{\nu^3}=-x+v-\frac{(\operatorname{Re} u)^2}{3}\frac{1}{v^3},$$

а следовательно,

$$|\Pi^{(1)}(x)|^2=-\frac{d\nu}{dx}\frac{\nu^4}{\nu^4+(\operatorname{Re} u)^2}. \tag{17}$$

Аналогично исследуется треугольная модель неунитарных операторов с двумерной компонентой неунитарности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
2. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов. —«Усп. мат. наук», 1958, т. 13, вып. 1, с. 3—85.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 160 с.

Поступила 8 февраля 1973 г.