УДК 513.88

И. М. Цалюк

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть L^p, $1 \leqslant p < \infty$ — банахово пространство классов функций, заданных на единичной окружности, интегрируемых в p-й степени, эквивалентных относительно множеств лебеговой меры нуль; L^∞ — банахово пространство заданных на окружности существенно ограниченных функций, где нормы введены обычным образом; H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — банахово пространство аналитических в единичном круге функций $f(re^{i\theta})$, ограниченных по L^p-норме при $r \to 1$. Норма в H^p вводится следующим образом:

$$\| f(re^{i\theta}) \|_{H^p} = \lim_{r \to 1} \| f(re^{i\theta}) \|_{L^p}.$$

H^p можно отождествить с замкнутым подпространством функций из L^p на окружности, коэффициенты Фурье которых с отрицательными индексами равны нулю.

Зададим на L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ функционал

$$a(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta, \ g(e^{i\theta}) \in L^q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

и будем искать

$$\sup_{\substack{f(e^{i\theta}) \in H^p \\ \| f(e^{i\theta}) \|_{H^p} \leqslant 1}} | a(f(e^{i\theta})) |.$$

Эта задача является обобщением задачи о лемме Шварца (где функционал — значение производной в фиксированной точке) и имеет двойственную:

$$\sup_{\substack{f \in H^p \\ \|f\|_{H^p} \leqslant 1}} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta = \min_{\psi \in (H^p)^{\perp} = H_0^q} \| g - \psi \|_{L^q}$$

(здесь H_0^q — подпространство функций из H^q, имеющих 0 в начале координат).

С помощью принципа двойственности установлено, что при $1 < p \leqslant \infty$ экстремум, т. е. max (min) достигается в точности на одной функции $\varphi(e^{i\theta}) \in H^p$ (соответственно, $\psi^*(e^{i\theta}) \in H_0^q$). Если $p = 1$, то функция $\psi^* \in H_0^q$, реализующая min, существует, и таких функций может быть бесконечное множество. Экстремальная функция $\varphi(e^{i\theta}) \in H^1$, реализующая max, может и не существовать, а если и существует, то не обязательно единственна (однако, ее существование обеспечивает единственность $\psi^*(e^{i\theta})$ (см. [1, 2]).

В частности, если $g(e^{i\theta}) \in C[0, 2\pi] \in L^\infty$, то sup достигается (см. [1, 2]).

Нас будет интересовать постановка и исследование экстремальных задач для пространств векторнозначных (со значениями в некотором банаховом пространстве E над полем комплексных чисел) функций, а именно пространств, являющихся естественным обобщением пространств H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Для ясности изложения напомним некоторые определения и свойства, касающиеся пространств векторнозначных функций.

При этом будем следовать [3] и [4].

Пусть E — комплексное банахово пространство с сопряженным E^*. Величину функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$ будем обозначать $\langle x, x^* \rangle$.

Функция f, определенная почти везде на единичной окружности T со значениями в банаховом пространстве E (для краткости пишем: «Функция из T в E»), называется

1) сильно измеримой, если существует последовательность $\{f_n\}$ ступенчатых функций, построенных на измеримых подмножествах T со значениями в E такая, что $\| f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta}) \|_E \to 0$ при $n \to \infty$ для почти всех $\theta \in T$;

2) слабо измеримой, если, каков бы ни был $x^* \in E^*$, числовая функция $\langle f(e^{i\theta}),\ x^*\rangle$ измерима;

3) скалярно измеримой, если пространство E сопряжено к некоторому банахову пространству E_0 и для любого элемента $y \in E_0$ числовая функция $\langle y,\ f(e^{i\theta})\rangle$ измерима.

Пусть $\boldsymbol{L}^p(E)$ для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ означает пространство сильно измеримых функций из T в E, для которых функция $\|f(e^{i\theta})\|_E \in \boldsymbol{L}^p$. В этом пространстве можно ввести норму $N_p(f)$ следующим образом: $N_p(f) = N_p(\|f\|_E)$, где $N_p(\|f\|_E)$ — норма функции $\|f(e^{i\theta})\|_E$ в пространстве L^p.

Банахово пространство классов эквивалентных относительно множества меры нуль функций из $\boldsymbol{L}^p(E)$ будем обозначать $L^p(E)$.

Обозначим через $\boldsymbol{L}^p(E_s^*)$ пространство функций f из T в E, скалярно измеримых и таких, что $\|f(e^{i\theta})\|_E \in \boldsymbol{L}^p$ (соответственно, через $L^p(E_s^*)$ пространство классов эквивалентных относительно множества меры нуль таких функций).

Если E^* — сепарабельно, то $\|f(e^{i\theta})\|_{E^*}$ — измеримая функция, когда $f(e^{i\theta})$ скалярно измерима (это небольшая перефразировка теоремы 3.5.2 из [3]).

Если для скалярно измеримой функции $f(e^{i\theta})$ из T в E^* существует элемент $x^* \in E^*$ такой, что $\langle x,\ x^*\rangle = \int\limits_0^{2\pi} \langle x,\ f(e^{i\theta})\rangle\, d\theta$ для всех $x \in E$, то говорят, что функция $f(e^{i\theta})$ интегрируема в смысле Петтиса, и x^* есть ее петтисовский интеграл

$$(P)\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta).$$

Если $f(e^{i\theta}) \in \boldsymbol{L}^p(E_s^*)$, то она интегрируема в смысле Петтиса. Сопряженным к $L^p(E)$ пространству является пространство $L^q(E_s^*)$ [5]. Функция $F(z)$, определенная на некотором открытом множестве Q комплексной плоскости со значениями в банаховом пространстве E (соответственно, в сопряженном к E пространстве E^*), называется аналитической в Q, если для любого $x^* \in E^*$ (соответственно, $x \in E$) скалярная функция $\langle F(z),\ x^*\rangle$ ($\langle x,\ F(z)\rangle$) аналитична в Q.

Пусть K — открытый единичный круг комплексной плоскости. Определим пространство $H^p(E)$ как совокупность заданных на K со значениями в банаховом пространстве E аналитических функций $f(z)$, для которых функции $\|f(re^{i\theta})\|_E$ ограничены по L^p-норме при $r \to 1$. $H^p(E)$ становится банаховым пространством, если положить

$$\|f(z)\|_{H^p(E)} = \sup_{r<1} \|\, \|f(re^{i\theta})\|_E \,\|_{L^p}.$$

Если пространство E является сопряженным к банахову сепарабельному пространству E_0, то любая функция из $H^p(E)$ имеет почти на единичной окружности T слабые некасательные предельные значения, определяющие на T некоторую функцию $f(e^{i\theta})$ из пространства $L^p(E_s^*)$. Совокупность таких функций характеризуется тем свойством, что

$$(P)\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{in\theta}\, d\theta = 0 \text{ для всех } n > 0.$$

Таким образом, $H^p(E)$ можно отождествить с подпространством из $\boldsymbol{L}^p(E_s^*)$ (см. [6]). В работе [6] приводится пример, показывающий, что при этом требование сепарабельности E существенно.

Этот факт будет использован ниже для постановки и решения экстремальных задач, являющихся обобщением задачи о

$$\sup_{\substack{F(z)\in H^\infty(E)\\ \|F(z)\|_{H^\infty(E)}\leqslant 1}} \|F_z'(z_0)\|_E \tag{1}$$

(задача о лемме Шварца в случае векторнозначных функций, Fisher [7]).

Fisher установил, что величина экстремума (1) совпадает с величиной соответствующего экстремума в аналогичной задаче для класса H^∞ комплекснозначных функций, а также выявил непосредственную связь между видом эстремальных в (1) функций, их расположением в единичном шаре пространства $H^\infty(E)$ и геометрией единичного шара пространства E.

С теоретико-функциональной точки зрения интерес представляют вопросы:

зависят ли результаты Fisher'а от конкретного вида оператора дифференцирования, или они остаются справедливыми для более широкого множества операторов;

имеют ли они место не только в пространстве $H^\infty(E)$, но и во всех классах $H^p(E)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Настоящая работа дает положительный ответ на эти вопросы, при условии, однако, сепарабельности пространства E^* (это допущение делается, поскольку наш метод существенно использует приведенные выше результаты статьи [6]).

Перейдем теперь к изложению наших результатов. Пусть m — линейное нормированное пространство скалярнозначных функций, определенных на произвольном множестве K. M — линейное нормированное пространство функций, определенных на K со значениями в сопряженном к линейному нормированному пространству E пространстве E^*.

Будем обозначать для $f(z)\in m$ (для $F(z)\in M$) $N(f)=N(|f|)=\|f\|_m$ (соответственно, $N(F)=N(\|F\|_{E^*})=\|F\|_M$) и будем предполагать m и M такими, что если $|f(z)|\leqslant\|F(z)\|_{E^*}$ для всех $z\in K$, то $N(|f|)\leqslant N(\|F\|_{E^*})$.

Теорема 1. *Пусть для любой функции $F(z)\in M$ и любого элемента $y\in E$ числовая функция $\langle y, F\rangle$ принадлежит m. Тогда если*

a — линейный непрерывный функционал на m, A — оператор из M в E^*, прич м для любых $y \in E$ и $F(z) \in M$:

$$a(\langle y,\ F(z)\rangle) = \langle y,\ A(F(z))\rangle, \text{ то } \| a \| = \| A \|.$$

Доказательство. Покажем, что $\| A \| \geqslant \| a \|$. Пусть $y \in E$, $\| y \| = 1$. Существует $x \in E^*$, такой, что $\| x \| = 1$ и $\langle y, x\rangle = \| y \| = 1$. Для любой функции $\varphi(z) \in m$ $\varphi(z) = \langle y, \varphi(z)x\rangle$. Если $\| \varphi(z) \|_m \leqslant 1$, то $\| \varphi(z) x \|_M \leqslant 1$. Имеем:

$$\| A \| = \sup_{\substack{\Phi \in M \\ \|\Phi\| \leqslant 1}} \| A\Phi \| \geqslant \sup_{\substack{\Phi \in M \\ \|\Phi\| \leqslant 1}} \langle y,\ A\Phi\rangle = \sup_{\substack{\Phi(z) \in M \\ \|\Phi(z)\|_M \leqslant 1}} a\langle y,\ \Phi(z)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{\varphi(z) \in m \\ \|\varphi(z)\|_m \leqslant 1}} a\langle y,\ \varphi(z)x\rangle = \sup_{\substack{\varphi(z) \in m \\ \|\varphi(z)\|_m \leqslant 1}} a\varphi = \| a \|.$$

Теперь убедимся, что $\| a \| \geqslant \| A \|$:

$$\| A \| = \sup_{\substack{\Phi \in M \\ \|\Phi\| \leqslant 1}} \| A\Phi \| = \sup_{\substack{\Phi \in M \\ \|\Phi\| \leqslant 1}} (\sup_{\substack{r \in E \\ \|r\| \leqslant 1}} \langle r,\ A\Phi\rangle).$$

Возьмем последовательность $\{\Phi_n\} \in M$, $\| \Phi_n \| \leqslant 1$ такую, что $\| A\Phi_n \| \to \| A \|$ при $n \to \infty$. Для каждого n возьмем $r_n \in E$ такое, что

$$\| A\Phi_n \| - \langle r_n,\ A\Phi_n\rangle < \frac{1}{n},\ \| r_n \|_E \leqslant 1;$$

положим $h_n(z) = \langle r_n, \Phi_n(z)\rangle$. Тогда $h_n \in m$, $\| h \|_m = \| \langle r_n, \Phi_n(z)\rangle \|_m = N(|\langle r_n,\ \Phi_n(z)\rangle|) \leqslant N(\| \Phi_n(z) \|_{E^*}) = \| \Phi_n \|_M \leqslant 1$.

Имеем

$$\| a \| \geqslant | a(h_n) | = | a(\langle r_n,\ \Phi_n(z)\rangle) | = |\langle r_n,\ A\Phi_n\rangle).$$

Таким образом,

$$\| a \| \geqslant \lim_{n \leftarrow \infty} |\langle r_n,\ A\Phi_n\rangle| = \lim_{n \to \infty} \| A\Phi_n \| = \| A \|.$$

Замечание. При некоторой перефразировке теорема остается справедливой, если M — банахово пространство функций со значениями не в сопряженном, а в основном пространстве E.

Назовем функцию $\Phi^*(z) \in M$ экстремальной в M для оператора A, если

$$\| A(\Phi^*(z)) \|_{E^*} = \sup_{\substack{\Phi(z) \in M \\ \|\Phi(z)\| \leqslant 1}} \| A(\Phi(z)) \|_{E^*} = \| A \|.$$

Легко показать, что норма экстремальной функции равна единице.

Пусть условия теоремы 1 выполнены. Тогда справедливо

Следствие 1. *Если $\varphi(z)$ — экстремальная функция функционала a над m, то $\varphi(z)x_0$, $x_0 \in E^*$, $\| x_0 \| = 1$ — экстремальная функция оператора A над M.*

Действительно, для любого $y \in E$ имеем: $\langle y, A(\varphi(z) x_0)\rangle = a\langle y, \varphi(z) x_0\rangle = a\varphi(z)\langle y, x_0\rangle = \langle y, x_0 a\varphi(z)\rangle$, поэтому $A(\varphi(z) x_0) = x_0 a\varphi \times \times (z) = x_0 \| a \| = x_0 \| A \|$; $\| A(\varphi(z) x_0) \| = \| x_0 \| \cdot \| A \| = \| A \|$.

Так как $\| \varphi(z) x_0 \|_M = 1$ (ибо $\| \varphi(z) \|_m = 1$), то $\varphi(z) x_0$ — экстремальна для оператора A. Столь же непосредственно из теоремы вытекает

Следствие 2. *Пусть для любой функции* $\Phi(z) \in M$ *существует элемент* $y_\Phi \in E$ *такой, что* $\langle y_\Phi, A\Phi\rangle = \| A\Phi \|_{E^*}$, $\| y_\Phi \| = 1$. *Тогда, если функционал a на m не имеет экстремальных функций, то и оператор A на M также их не имеет.*

С помощью теоремы 1 попытаемся распространить задачу, обобщающую по постановке задачу о лемме Шварца на случай векторнозначных функций. Через E обозначим банахово пространство, сопряженное к которому E^* сепарабельно.

Пусть $F(z) \in H^p(E) \subset H^p(E^{**})$. Ясно, что $H^p(E)$ — подпространство $H^p(E^{**})$, в свою очередь, как было замечено во введении, являющегося подпространством $L^p(E_s^{**})$. Поэтому $H^p(E)$ — линейное нормированное пространство функций со значениями в $E \subset E^{**}$.

Возьмем теперь в качестве m и M пространства H^p и $H^p(E)$, соответственно; $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Зададим на H^p функционал a:

$$af = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta, \quad g(e^{i\theta}) \in L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а на $H^p(E)$ — оператор A: $H^p(E) \to E^{**}$:

$$AF = (P)\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta.$$

Так как $F(e^{i\theta}) \in L^p(E_s^{**})$, то $\langle x, F(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})\rangle$ измерима для любого $x \in E^*$ и функция $\| F(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) \|_{E^{**}} \in L^1$.

Следовательно, функция $F(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) \in L^1(E_s^{**})$, интегрируема по Петтису и AF, действительно является элементом E^{**}.

Теорема 1 и следствия 1 и 2 из нее справедливы в данной ситуации, поскольку имеет место

Лемма 1. *Оператор* A: $H^p(E) \to E^{**}$, введенный по формуле

$$AF = (P)\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta, \quad g(e^{i\theta}) \in L^q, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} = 1,$$

действует из $H^p(E)$ *в пространство* E. *(При* $p = 1$ *предполагаем* $g \in C[0, 2\pi]$.

Доказательство. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой функции $F(e^{i\theta})$ со значениями в сопряженном к банахову пространству E пространство E^*, интегрируемой в смысле Петтиса:*

$$\| (P)\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,d\theta \|_{E^*} \leqslant \int_0^{2\pi} \| F(e^{i\theta}) \|_{E^*}\,d\theta$$

(доказательство элементарно следует из свойств интеграла Питтиса). Для доказательства леммы 1 построим некоторую последовательность $\{D_n\}$ из элементов пространства E и убедимся в том, что $AF(z)$ — ее предел в E. Для этого покажем, что $D_n \to AF(z)$ в топологии пространства E^{**}. Тогда последовательность $\{D_n\}$ является фундаментальной и в топологии пространства E. В силу полноты E отсюда следует, что $\{D_n\}$ имеет предел в E, который не может не совпасть с $AF(z)$ (в противном случае последовательность $\{D_n\}$ имела бы два различных предела в пространстве E^{**}).

Будем строить последовательность $\{D_n\}$.

Известно, что конечные линейные комбинации функций

$$P_{r,\varphi}(\theta) = P_r(\varphi - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

(с различными r и φ) плотны в L^q при $1 \leqslant q < \infty$ и в $C[0, 2\pi]$ при $q = \infty$, т. е. существуют комплексные числа λ_k и точки $r_k e^{i\varphi_k}$ из единичного круга такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_{r_k,\varphi_k}(\theta) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} g(e^{i\theta})$ в метрике L^q при $1 \leqslant q < \infty$ и в метрике $C[0, 2\pi]$, если $q = \infty$.

Это означает, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер N, что при $n > N$

$$\| g(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{r_k,\varphi_k}(\theta) \| < \varepsilon \text{ (в метрике } L^q \text{ или } C[0, 2\pi],$$

соответственно).

Положим

$$D_n = (P)\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{r_k,\varphi_k}(\theta)\,d\theta.$$

Ясно, что $D_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k F(r_k e^{i\varphi_k})$ — элемент E.

Применяя лемму 2 и неравенство Гельдера при $1 < q < \infty$, легко показать, что

$$\| AF(z) - D_n \|_{E^{**}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

При $p = \infty$ или $p = 1$ и $g \in C[0, 2\pi]$ подобное утверждение следует непосредственно из леммы 2.

Теперь будем искать экстремальные функции из пространства $H^p(E)$ для оператора A, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Как уже отмечалось, для функционала a при $1 < p \leqslant \infty$ экстремальная функция $\varphi(z)$ из H^p существует и единственна. При $p = 1$ такая функция существует не всегда, а если и существует, то не обязательно единственна. (Если среди экстремальных функций есть хотя бы одна, имеющая нуль внутри единичного круга, то она заведомо не единственная (см. [8]). При $p = 1$ экстремаль $\varphi(z)$ существует, когда, например $g \in C[0, 2\pi]$. В связи с этим из следствия 1 к теореме 1 вытекает, что при $1 < p \leqslant \infty$ (а также при $p = 1$ в случае, когда $g(e^{i\theta})$ непрерывна) функция $\varphi(z)x_0$, $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$ является экстремальной для оператора A.

Из следствия 2 к теореме 1 ясно, что при $p = 1$ оператор A на $H^\infty(E)$ не имеет экстремальной функции, если ее не было у соответствующего функционала a над пространством H^∞.

Ниже выясняется: все ли экстремальные функции оператора A имеют описанный вид. Оказывается, существует непосредственная связь между видом экстремальных для оператора A функций из $H^p(E)$, геометрией сферы пространства E и сферы пространства $H^p(E)$.

Напомним, что если любая точка единичной сферы линейного нормированного пространства E является крайней точкой единичного шара E, то пространство E называется строго выпуклым (это эквивалентно строгой нормированности).

Следующая теорема — основной результат — справедлива для всех p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (с некоторыми оговорками при $p = 1$). Пространство E^* предполагается сеперабельным.

Теорема 2. *Следующие два предложения эквивалентны:*

1) *пространство E строго выпукло;*

2) *каждая экстремальная функция из $H^p(E)$ оператора A является крайней точкой единичного шара $H^p(E)$.*

Если выполнено одно из них, то справедливо

3) *каждая экстремальная функция оператора A из $H^p(E)$ имеет вид $\varphi(z)x$, где $\varphi(z)$ — экстремальная функция функционала a на H^p, $x \in E$, $\|x\| = 1$.*

В том случае, когда экстремальная функция $\varphi(z)$ функционала a имеет хотя бы один нуль γ внутри единичного круга [1], *последнее условие влечет два предыдущих.*

При $p = 1$ предполагаем, что $g \in C[0, 2\pi]$. Если $p = 1$, то первое условие влечет второе только при единственности $\varphi(z)$. Но тогда $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри единичного круга. Если же $\varphi(z)$ не единственна, то она имеет нули в единичном круге, и из третьего условия вытекает первое.

Доказательство. Прежде всего заметим, что аналогично тому, как это было сделано в теореме 4 из [7], можно показать,

---

[1] Например, если $p = \infty$, то экстремальная функция $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри единичного круга только для тривиальных задач.

ввиду теоремы 1, что из строгой выпуклости пространства E следует представимость любой экстремальной функции оператора A из $H^p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в форме $\varphi(z)x$,

Убедимся теперь, что первое предположение влечет второе, т. е. что если $F(z)$ — экстремальная функция оператора A, то она является крайней точкой единичного шара $H^p(E)$.

В самом деле, если $\| F \pm J \|_{H^p(E)} \leqslant 1$, где $J \in H^p(E)$, $\| J \|_{H^p(E)} \leqslant \leqslant 1$, то $\| A(F \pm J) \| \leqslant \| A \|$, $\| A(\varphi x_0 \pm J) \| \leqslant \| A \|$, $A(\varphi(z)x_0) = a\varphi(z)x_0 = \| a \| x_0$, $\| \| a \| x_0 \pm AJ \| \leqslant \| A \|$, $\| x_0 \pm \frac{AJ}{\| A \|} \|_E \leqslant 1$.

Строгая выпуклость E означает, что $\frac{AJ}{\| A \|} = 0$, $AJ = 0$ и, так как F была экстремальной, то и $F + J$ — экстремальна:

$$A(F + J) = AF = A(\varphi x_0) = a\varphi x_0 = \| a \| x_0. \qquad (2)$$

Из замечания, сделанного в начале доказательства, следует, что экстремальность $F + J$ обеспечивает равенство

$$F + J = \varphi x_1, \; x_1 \in E, \; \| x_1 \| = 1.$$

Тогда

$$A(F + J) = A(\varphi x_1) = \| a \| x_1. \qquad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем $x_1 = x_0$, $F + J = \varphi x_0$. Так как $F = \varphi x_0$, то $J = 0$. Это означает, что F является крайней точкой единичного шара.

Теперь покажем, что из второго предположения следует первое. Пусть каждая экстремальная функция оператора A является крайней точкой единичного шара $H^p(E)$. Предположим, что пространство E не является строго выпуклым, т. е. что существует $x \in E$, $\| x \| = 1$ и $x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, $u \neq v$, $\| u \| \leqslant 1$, $\| v \| \leqslant 1$. Но тогда $\| u \| = \| v \| = 1$, $\varphi(z)u$, $\varphi(z)v$ — экстремальные функции оператора A в $H^p(E)$ по следствию 1 из теоремы 1, $\varphi(z)u \neq \varphi(z)v$ и функция $\varphi(z)x = \frac{1}{2}\varphi(z)u + \frac{1}{2}\varphi(z)v$, будучи экстремальной для A, не является действительной крайней точкой единичного шара $H^p(E)$, что противоречит предположению.

Осталось показать, что при наличии нуля γ функции $\varphi(z)$ внутри единичного круга из третьего условия вытекает первое.

Пусть каждая экстремальная функция оператора A имеет вид $\varphi(z)\tilde{x}$, где $\tilde{x}$ — некоторый элемент (не фиксированный) пространства E единичной нормы. Покажем, что тогда E строго выпукло.

Пусть E не является строго выпуклым. Тогда существуют $x \in E$, $\| x \| = 1$, u, $v \in E$, $\| u \| = \| v \| = 1$ такие, что $x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, $u \neq v$.

Возьмем $y_x \in E^*$ такой, что

$$\| y_x \|_{E^*} = 1 \text{ и } \langle x, y_x \rangle = 1.$$

Так как для любой функции $\Phi \in H^p(E)$, $\| \Phi \|_{H^p(E)} \leqslant 1$ имеем (см. теорему 1)

$$|\langle A\Phi, y_x \rangle| \leqslant \| A\Phi \|_E \cdot \| y_x \| \leqslant \| A \| = \| A(\varphi x) \| =$$
$$= \| a \| = a\varphi = a \langle \varphi x, y_x \rangle = \langle A(\varphi x), y_x \rangle,$$

то φx является решением экстремальной задачи о

$$\sup_{\substack{\Phi \in H^p(E) \\ \|\Phi\|_{H^p(E)} \leqslant 1}} \langle A\Phi, y_x \rangle. \tag{4}$$

С другой стороны, поскольку $\langle A\Phi, y_x \rangle \leqslant \| A\Phi \| \cdot \| y_x \| = \| A\Phi \|$, любая экстремальная функция задачи (4) доставляет экстремум оператору A.

Покажем, что существует функция $\Phi^*(z) \in H^p(E)$, $\| \Phi^*(z) \|_{H^p(E)} = 1$, доставляющая экстремум (4) и не представимая в виде $\Phi^*(z) = \varphi(z) x_0$, $x_0 \in E$, $\| x_0 \| = 1$, $x_0 = \text{const}$, т. е. получим противоречие с условием *3*. Заметим, что $1 = \langle u, y_x \rangle = \langle v, y_x \rangle$.

Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Положим $r_\alpha = \alpha u + (1 - \alpha) v$. Тогда $1 = \langle r_\alpha, y_x \rangle \leqslant \| r_\alpha \| \cdot \| y_x \| = \| r_\alpha \|$ и $\| r_\alpha \| \leqslant \| \alpha u \| + \| (1 - \alpha) v \| = \alpha + (1 - \alpha) = 1$, т. е. $\| r_\alpha \| = 1$.

Если точка γ из единичного круга — нуль функции $\varphi(z)$, то функция $\alpha(z) = \mu \dfrac{(z - \beta)(1 - \bar{\beta} z)}{(z - \gamma)(1 - \bar{\gamma} z)}$ (β — любая точка единичного круга K) неотрицательна на единичной окружности, не равна тождественно константе и $\varphi(z) \alpha(z) \in H^p$ (нормирующий множитель μ взят так, чтобы $\alpha(e^{i\theta}) < 1$ на окружности).

Рассмотрим функцию

$$\Phi^*(z) = \varphi(z) [\alpha(z) u + (1 - \alpha(z)) v].$$

Для любого $y \in E^*$ функция

$$\langle \Phi^*(z), y \rangle = \langle \varphi(z) [\alpha(z) u + (1 - \alpha(z)) v], y \rangle =$$
$$= \langle \varphi(z) \alpha(z) u, y \rangle + \langle \varphi(z) v, y \rangle - \langle \varphi(z) \alpha(z) v, y \rangle$$

аналитична;

$$\| \Phi^*(e^{i\theta}) \|_{L^p(E)} = \| \varphi(e^{i\theta}) r_{\alpha(e^{i\theta})} \|_{L^p(E)} = \| \varphi(e^{i\theta}) \|_{L^p} = 1.$$

Таким образом, $\Phi^*(z)$ принадлежит единичной сфере пространства $H^p(E)$ и

$$\langle A\Phi^*, y_x \rangle = a \langle \Phi^*(z), y_x \rangle = a \langle \varphi(e^{i\theta}) r_{\alpha(e^{i\theta})}, y_x \rangle = a\varphi = \| a \|,$$

т. е. Φ^* является экстремальной для оператора A (см. теорему 1).

Покажем, что равенство

$$\Phi^*(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})[\alpha(e^{i\theta})u + (1-\alpha(e^{i\theta}))v] = \varphi_1(e^{i\theta})x_0,$$
$$x_0 \in E,\ \|x_0\| = 1, \tag{5}$$

где $\varphi_1(e^{i\theta})$ — экстремальная функция функционала a в единичном шаре пространства H^p, — невозможно. Действительно, при $1 < p \leqslant \infty$ такая экстремальная функция единственна, т. е. $\varphi \equiv \varphi_1$. Но при выполнении этого тождества (5) не верно, так как

$$r_{\alpha(e^{i\theta})} = \alpha(e^{i\theta})u + (1-\alpha(e^{i\theta}))v \not\equiv \mathrm{const} = x_0.$$

Если $p = 1$, то известно, что любая экстремальная функция φ_1 удовлетворяет равенству

$$\frac{\varphi_1(e^{i\theta})}{\varphi(e^{i\theta})} = \sigma(e^{i\theta}) > 0,\ \sigma \not\equiv \mathrm{const}. \tag{6}$$

Если бы (5) было справедливо, то $\|\varphi(e^{i\theta})r_{\alpha(e^{i\theta})}\|_E = \|\varphi_1(e^{i\theta})x_0\|_E$ и, так как $\|r_\alpha(e^{i\theta})\| \equiv 1$, $\|x_0\| = 1$, то отсюда бы вытекало, что $|\varphi(e^{i\theta})| \equiv |\varphi_1(e^{i\theta})|$, что возможно, ввиду (6), лишь при $\varphi_1 = \varphi$. Но при этом условии, как было показано выше, (5) не выполняется.

Это завершает доказательство того, что E строго выпукло.

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность *С. Я. Хавинсону* за ряд существенных советов и искреннее участие в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хавинсон С. Я. Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций.— УМН, 1949, т. 4 : 4 (32) с. 158—159.
2. Хавинсон С. Я. О некоторых экстремальных задачах теории аналитических функций.— «Учен. зап. Моск. ун-та. Математика», 1951, т. 148, с. 134 — 143.
3. Хилле и Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 160 с.
4. Бурбаки. Элементы математики. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хагара. Свертка и представления. М., «Наука», 1970. 320 с.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ, теория и приложения. М., «Мир», 1973, 1071 с.
6. Grossetéte G. Classes de Hardy et nevanlinna pour les fonctions holomorphes á vallurs vectorielles.— „G. R. Acad. Sc. Paris", 1967, t. 274, Serie A, p. 251—253.
7. Fischer S. Schwarz's lemma for vectorvalued analytic functions.— „J. Funct. Anal.", 1971, vol. 8, № 1, p. 86—91.
8. De Leen K. and Rudin W. Extrime points and extremum problems in H_1.— P. J. M., 1958, № 8, p. 467—485.

Поступила 17 декабря 1971 г.