УДК 517.521.8.

Л. С. Тесленко

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

В настоящей заметке мы докажем две теоремы тауберова типа для методов Чезаро суммирования рядов и покажем, что они не переносятся на метод Абеля — Пуассона. По поводу определений и обозначений, принятых в этой заметке, мы отсылаем читателя к книге [1] и работе [2].

Справедливы следующие предложения.

Теорема 1. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *с комплексными членами, средние Чезаро порядков* p *и* $p+1$ $(p \geqslant 0)$ *которого удовлетворяют условию*

$$|C_n^p - C_n^{p+1}| \leqslant C < +\infty \tag{1}$$

для $n_k \leqslant n \leqslant m_k \leqslant n_{k+1}$, *где* $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ — *заданные возрастающие последовательности натуральных чисел.*

Если $S_n = O(1)\,(C, \beta)$ при каком-нибудь $\beta > p+1$, то $C_{\nu_k}^{p+1} = O(1)$, где $n_k \leqslant \nu_k \leqslant m_k\,(k = 1, 2, \ldots)$.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(C, \beta)$ при каком-нибудь $\beta > p+1$, то $C_{\nu_k}^{p+1} \to S\,(k \to \infty)$, где $n_k \leqslant \nu_k \leqslant m_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *с действительными членами, средние Чезаро порядков* p и $p+1$ $(p \geqslant 0)$ *которого удовлетворяют условию*

$$C_n^p - C_n^{p+1} \geqslant -C > -\infty \tag{2}$$

для $n_k \leqslant n \leqslant m_k \leqslant n_{k+1}$, *где* $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ — *заданные возрастающие последовательности натуральных чисел.*

Если $S_n = O(1)\,(C,\ \beta)$ при каком-нибудь $\beta > p+1$, то $C^{p+1}_{\nu_k} = O(1)$, где $(1+\varepsilon)\,n_k \leqslant \nu_k \leqslant (1-\varepsilon)\,m_k\,(k=1,\ 2,\ \ldots)$, ε — сколь угодно малое положительное число.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(C,\ \beta)$ при каком-нибудь $\beta > p+1$, то $C^{p+1}_{\nu_k} \to S\,(k \to \infty)$, где $(1+\varepsilon)\,n_k \leqslant \nu_k \leqslant (1-\varepsilon)\,m_k\,(k=1,\ 2,\ \ldots)$, ε — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство теоремы 1. Так как $S^{p+1}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S^p_k$, то $S^p_n = S^{p+1}_n - S^{p+1}_{n-1}$. Учитывая, что $C^p_n = \dfrac{S^p_n}{E^p_n}$, имеем

$$C^p_n - C^{p+1}_n = \frac{(E^{p+1}_n - E^p_n)\,C^{p+1}_n - C^{p+1}_{n-1}E^{p+1}_{n-1}}{E^p_n}.$$

Из последнего равенства и условия (1) для $n_k \leqslant n \leqslant m_k \leqslant n_{k+1}$, где $\dfrac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, получим

$$|\,C^{p+1}_n - C^{p+1}_{n-1}\,| \leqslant \frac{C\,(p+1)}{n}. \tag{3}$$

Для фиксированной последовательности $\nu_k \in [n_k,\ m_k]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ имеем

$$\nu_{k'_i} \in \left[n_{k'_i},\ \frac{n_{k'_i} + m_{k'_i}}{2}\right],\ \nu_{k''_i} \in \left(\frac{n_{k''_i} + m_{k''_i}}{2},\ m_{k''_i}\right],$$

где

$$\{k'_i\} \cup \{k''_i\} = \{1,\ 2,\ \ldots\},\ \{k'_i\} \cap \{k''_i\} = \varnothing.$$

Используя неравенство (3), для $\nu_{k'_i} < m < m_{k'_i}$, получаем следующую оценку:

$$|\,C^{p+1}_m - C^{p+1}_{\nu_{k'_i}}\,| \leqslant |\,C^{p+1}_m - C^{p+1}_{m-1}\,| + |\,C^{p+1}_{m-1} - C^{p+1}_{m-2}\,| + \cdots +$$
$$+ |\,C^{p+1}_{\nu_{k'_i}+1} - C^{p+1}_{\nu_{k''_i}}\,| \leqslant C\,(p+1)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{\nu_{k'_i}+1}\right) =$$
$$= C\,(p+1)\ln\frac{m}{\nu_{k'_i}} + o(1).$$

Заметив, что

$$\frac{m_{k'_i}}{\nu_{k'_i}} \geqslant \frac{2m_{k'_i}}{n_{k'_i} + m_{k'_i}} = 1 + \frac{1 - \dfrac{n_{k'_i}}{m_{k'_i}}}{1 + \dfrac{n_{k'_i}}{m_{k'_i}}} \geqslant 1 + \frac{1 - \dfrac{1}{\lambda}}{1 + \dfrac{1}{\lambda}} > 1,$$

получим

$$|C_m^{p+1}-C_{\nu_{k_i'}}^{p+1}|\leqslant C(p+1)\ln\frac{m}{\nu_{k_i'}}+o(1)\to 0, \tag{4}$$

когда $1<\frac{m}{\nu_{k_i'}}\to 1\ (i\to\infty)$.

Аналогично для $n_{k_i'}<m<\nu_{k_i''}$ имеем

$$|C_{\nu_{k_i''}}^{p+1}-C_m^{p+1}|\leqslant C(p+1)\ln\frac{\nu_{k_i''}}{m}+o(1).$$

Так как

$$\frac{\nu_{k_i''}}{n_{k_i''}}\geqslant\frac{m_{k_i''}+n_{k_i''}}{2n_{k_i''}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{m_{k_i''}}{n_{k_i''}}\right)\geqslant\frac{1}{2}(1+\lambda)>1,$$

то

$$|C_{\nu_{k_i''}}^{p+1}-C_m^{p+1}|\leqslant C(p+1)\ln\frac{\nu_{k_i''}}{m}+o(1)\to 0, \tag{5}$$

когда $1<\frac{\nu_{k_i''}}{m}\to 1\ (i\to\infty)$.

Из соотношений (4) и (5) по теореме 2 работы [3] имеем

$$\lim_{i\to\infty}C_{\nu_{k_i'}}^{p+1}=S \text{ и } \lim_{i\to\infty}C_{\nu_{k_i''}}^{p+1}=S$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}C_{\nu_k}^{p+1}=S$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Как и в теореме 1, пользуясь условием (2), получим

$$C_n^{p+1}-C_{n-1}^{p+1}\geqslant-\frac{C(p+1)}{n} \tag{6}$$

для $n_k\leqslant n\leqslant m_k\leqslant n_{k+1}$, где $\frac{m_k}{n_k}\geqslant\lambda>1\ (k=1,2,\ldots)$.

Для фиксированной последовательности $\nu_k\in[(1+\varepsilon)n_k, (1-\varepsilon)m_k]$ $(k=1,2,\ldots)$ и для сколь угодно малого $\varepsilon>0$ имеем

$$\frac{m_k}{\nu_k}\geqslant\frac{m_k}{(1-\varepsilon)m_k}=\frac{1}{1-\varepsilon}>1\ (k=1,2,\ldots)$$

и для $\nu_k<m<m_k$, используя неравенство (6), получим

$$C_m^{p+1}-C_{\nu_k}^{p+1}\geqslant-C(p+1)\ln\frac{m}{\nu_k}+o(1)$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{k\to\infty}(C_m^{p+1}-C_{\nu_k}^{p+1})\geqslant 0, \tag{7}$$

когда $1<\frac{m}{\nu_k}\to 1\ (k\to\infty)$.

Аналогично получаем

$$\frac{\nu_k}{n_k} \geqslant \frac{(1+\varepsilon)\, n_k}{n_k} = 1 + \varepsilon > 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и для $n_k < m < \nu_k$, используя неравенство (6), найдем

$$C_{\nu_k}^{p+1} - C_m^{p+1} \geqslant -C\,(p+1) \ln \frac{\nu_k}{m} + o\,(1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} (C_{\nu_k}^{p+1} - C_m^{p+1}) \geqslant 0 \tag{8}$$

когда $1 < \frac{\nu_k}{m} \to 1$ $(k \to \infty)$.

Из соотношений (7) и (8) по теореме 3 работы [3] имеем

$$\lim_{k\to\infty} C_{\nu_k}^{p+1} = S.$$

Теорема 2 доказана.

Если условие (1) выполнено для всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то из равенств

$$S_n = O\,(1)\,(C,\ \beta) \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(C,\ \beta) \quad (\beta > p + 1) \tag{9}$$

в силу теоремы 1 вытекают соответственно равенства

$$S_n = O\,(1)\,(C,\ \ p+1) \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(C,\ p+1). \tag{10}$$

Равенства (10) в силу теоремы 2 вытекают соответственно из равенств (9) и тогда, когда для всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ выполнено условие (2).

В нашей работе [4] показано, что если условие (1) или (2) выполнено для всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то равенства (10) вытекают соответственно из равенств

$$S_n = O\,(1)\,(A) \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(A)^*, \tag{11}$$

являющихся более слабыми условиями по сравнению с условиями (9).

Однако в теоремах 1 и 2 условия (9) нельзя заменить более слабыми условиями (11). Чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, рассмотрим ряд

$$F\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k\,(x), \tag{12}$$

где

$$Q_k\,(x) = \alpha_k x^{n_k} \Big[1 - x^{p_k+1} \sum_{s=0}^{\nu_k} \binom{p_k+s}{s} (1-x)^s\Big],$$

* A — метод Абеля — Пуассона суммирования рядов.

$\{\alpha_k\}$ — последовательность комплексных чисел, $\lim\limits_{k\to\infty}|\alpha_k| = \infty$. Натуральные числа n_k, p_k, $\nu_k (k = 1, 2, \ldots)$ выбираем так, чтобы удовлетворить следующим условиям:

$$\text{а) } p_k = n_k^2,\ m_k = p_k + n_k;$$

$$\text{б) } \nu_k = 40\left[\frac{t_k p_k}{1-t_k}\right],\ \text{где } t_k = \frac{1}{\sqrt{n_k}};$$

$$\text{в) } \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n_k]{|\alpha_k|} = 1;$$

$$\text{г) } |\alpha_k|\, 2^{-\sqrt{n_k}} < 2^{-\sqrt[3]{n_k}},\ |\alpha_k|\, l^{-\nu_k} < l^{-\sqrt{\nu_k}};$$

$$\text{д) } \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < +\infty,\ \text{где } \beta_k = \max\{2^{-\sqrt[3]{n_k}},\ l^{-\sqrt{\nu_k}}\};$$

$$\text{е) } n_{k+1} > n_k + p_k + \nu_k + 1\ (k = 1, 2, \ldots);$$

$$\text{ж) } \frac{|S_0| + |S_1| + \cdots + |S_{n_k}|}{n_k + 1} \to 0\ (k \to \infty).$$

где

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \tag{13}$$

$a_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ определены из (12), $S_{n_k} = \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} Q_\nu(1) + \alpha_k = \alpha_k$ (так как $Q_\nu(1) = 0$);

$$\text{з) } |\alpha_k| \frac{n_k}{n} = O(1)\ (k \to \infty)\ \text{для } \left[\frac{m_k}{2}\right] \leqslant n \leqslant m_k.$$

Условиям *в — з* можно удовлетворить, так как каждое из этих условий удовлетворяется за счет выбора достаточно большого n_k.

Из доказательства теоремы 1 работы [2] следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется методом Абеля — Пуассона к числу нуль, т. е.

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = 0. \tag{14}$$

Пусть $n_k \leqslant n \leqslant m_k$; тогда имеем

$$C_n^{p+1}(S) = \frac{1}{E_n^{p+1}} \sum_{\nu=0}^{n} E_{n-\nu}^{p} S_\nu = \frac{1}{E_n^{p+1}} \sum_{\nu=0}^{n_k} E_{n-\nu}^{p} S_\nu + \frac{\alpha_k}{E_n^{p+1}} \sum_{\nu=n_k+1}^{n} E_{n-\nu}^{p}, \tag{15}$$

так как в силу конструкции ряда (12) $S_n = S_{n_k} = \alpha_k$ для $n_k \leqslant n \leqslant m_k (k = 1, 2, \ldots)$.

Пользуясь условием $ж$, оценим первое слагаемое соотношения (15):

$$\left|\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k} E_{n-\nu}^p S_\nu}{E_n^{p+1}}\right| \leqslant \frac{E_n^p(n_k+1)}{E_n^{p+1}} \cdot \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k} |S_\nu|}{n_k+1} = O(1)\,(k \to \infty).$$

Из условия a следует, что $\frac{m_k}{n_k} \to \infty$ при $k \to \infty$, поэтому $\frac{n_k}{n} \to 0 \times (k \to \infty)$ для $\left[\frac{m_k}{2}\right] \leqslant n \leqslant m_k$.

Второе слагаемое соотношения (15) запишем в виде

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n} E_{n-\nu}^p}{E_n^{p+1}} = \alpha_k\left(1 - \frac{1}{E_n^{p+1}} \sum_{\nu=0}^{n_k} E_{n-\nu}^p\right).$$

Для $\left[\frac{m_k}{2}\right] \leqslant n \leqslant m_k$ имеем

$$0 < \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k} E_{n-\nu}^p}{E_n^{p+1}} < \frac{(n_k+1)\,E_n^p}{E_n^{p+1}} = \frac{(p+1)(n_k+1)}{n+p+1} \to 0\,(k \to \infty).$$

И из (15) получаем

$$C_n^{p+1}(S) \to \infty\ (k \to \infty) \text{ для } \left[\frac{m_k}{2}\right] \leqslant n \leqslant m_k. \tag{16}$$

Остается показать, что последовательность $\{S_n\}$, определенная равенством (13), удовлетворяет неравенству

$$|C_n^p(S) - C_n^{p+1}(S)| \leqslant C < +\infty \tag{17}$$

для $\left[\frac{m_k}{2}\right] \leqslant n \leqslant m_k\,(k = 1, 2, \ldots)$.

Из равенства

$$C_n^{p+1} = \frac{1}{E_n^{p+1}} \sum_{\nu=0}^{n} E_\nu^p C_\nu^p$$

получаем

$$C_n^p = \frac{1}{E_n^p}\left(C_n^{p+1} E_n^{p+1} - C_{n-1}^{p+1} E_{n-1}^{p+1}\right),$$

откуда имеем

$$C_n^p - C_n^{p+1} = \frac{E_{n-1}^{p+1}}{E_n^p}\left(C_n^{p+1} - C_{n-1}^{p+1}\right). \tag{18}$$

Используя соотношение (15) и условия *ж* и *з*, мы получим следующую оценку:

$$|C_n^{p+1}-C_{n-1}^{p+1}|=\left|\left(\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}E_{n-\nu}^pS_\nu}{E_n^{p+1}}-\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}E_{n-1-\nu}^pS_\nu}{E_{n-1}^{p+1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_k\left(\frac{\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n}E_{n-\nu}^p}{E_n^{p+1}}-\frac{\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n-1}E_{n-\nu-1}^p}{E_{n-1}^{p+1}}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left|E_{n-1}^{p+1}\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}E_{n-\nu}^pS_\nu-(E_{n-1}^{p+1}+E_n^p)\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}E_{n-1-\nu}^pS_\nu\right|}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}+$$

$$+|\alpha_k|\frac{\left|E_{n-1}^{p+1}\left(\sum\limits_{\nu=n_k+2}^{n}E_{n-\nu}^p+E_{n-n_k-1}^p\right)-(E_{n-1}^{p+1}+E_n^p)\sum\limits_{\nu=n_k+2}^{n}E_{n-\nu}^p\right|}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}=$$

$$=\frac{\left|E_{n-1}^{p+1}\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}E_{n-\nu}^{p-1}S_\nu-E_n^p\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}E_{n-1-\nu}^pS_\nu\right|}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}+$$

$$+|\alpha_k|\frac{\left|E_{n-1}^{p+1}E_{n-n_k-1}^p-E_n^p\sum\limits_{\nu=n_k+2}^{n}E_{n-\nu}^p\right|}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{E_n^{p-1}(n_k+1)}{E_n^{p+1}}\cdot\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}|S_\nu|}{(n_k+1)}+\frac{E_n^pE_{n-1}^p(n_k+1)}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}\cdot\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}|S_\nu|}{(n_k+1)}+$$

$$+|\alpha_k|\frac{\left|\left(\sum\limits_{\nu=0}^{n-n_k-2}E_\nu^p+\sum\limits_{\nu=n-n_k-1}^{n-1}E_\nu^p\right)E_{n-n_k-1}^p-E_n^p\sum\limits_{\nu=0}^{n-n_k-2}E_\nu^p\right|}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}=$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)+|\alpha_k|\frac{\left|\sum\limits_{\nu=0}^{n-n_k-2}E_\nu^p\left(\sum\limits_{\nu=0}^{n-n_k-1}E_\nu^{p-1}-\sum\limits_{\nu=0}^{n}E_\nu^{p-1}\right)+E_{n-n_k-1}^p\sum\limits_{\nu=n-n_k-1}^{n-1}E_\nu^p\right|}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}\leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{1}{n}\right)+|\alpha_k|\frac{E_{n-n_k-2}^{p+1}E_n^{p-1}(n_k+1)+E_{n-n_k-1}^pE_{n-1}^p(n_k+1)}{E_n^{p+1}E_{n-1}^{p+1}}=$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)|\alpha_k|\frac{n_k+1}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда и из (18) находим

$$|C_n^p - C_n^{p+1}| \leqslant C < +\infty \text{ для } \left[\frac{m_k}{2}\right] \leqslant n \leqslant m_k \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Справедливость неравенства (17) показана.

Итак, мы построили последовательность $\{S_n\}$, удовлетворяющую соотношениям (14), (16) и (17). Этим показана невозможность в теоремах 1 и 2 условия (10) заменить более слабыми условиями (11).

Теоремы 1 и 2 для $p = 0$ были отмечены Н. А. Давыдовым, но нигде не опубликованы.

В заключение приношу глубокую благодарность *Н. А. Давыводу* за постановку рассмотренных здесь задач и внимание к работе автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
2. Давыдов Н. А. О (C)-точках последовательности, суммируемой методом Пуассона — Абеля. — «Мат. сб.», 1957, т. 43 (85), вып. 1, с. 67—74.
3. Давыдов Н. А. C-свойство методов Чезаро суммирования рядов и теоремы тауберова типа. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 17. Харьков, 1973, с. 14—23.
4. Тесленко Л. С. Об условиях равносильности методов Абеля — Пуассона и Чезаро суммирования рядов. — «Приближенные методы математического анализа», 1974, с. 132—143.

Поступила 23 апреля 1974 г.