УДК 517.432 : 513.83

Ю. Л. Шмульян, *канд. физ.-мат. наук*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ДИССИПАТИВНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $B(H)$ — множество всех ограниченных операторов, действующих в H (только такие операторы рассматриваются в дальнейшем). Если $A \in B(H)$, то оператор $A_R = \frac{A + A^*}{2}$ называется вещественной частью A, а оператор $A_I = \frac{A - A^*}{2i}$ — его мнимой частью.

Оператор $A \in B(H)$ называется диссипативным, если $A_I \geqslant 0$. Множество всех диссипативных операторов (операторную верхнюю полуплоскость) будем обозначать через $\Pi_+(H)$.

Диссипативные операторы являются аналогами комплексных чисел из замкнутой верхней полуплоскости. Поэтому произведение двух диссипативных операторов, являющееся аналогом произведения двух таких чисел, может иметь спектр в любой точке комплексной плоскости. Однако точки положительной полуоси занимают при этом особое место. В самом деле, если комплексные числа λ_1 и λ_2 пробегают открытую верхнюю полуплоскость, то $\lambda_1\lambda_2$ пробегает плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси. Поэтому точки спектра произведения двух диссипативных операторов, лежащие на положительной полуоси, играют роль, аналогичную роли граничных точек спектра. Выявлению этой роли посвящена настоящая статья, состоящая из двух параграфов. В 1 рассматривается задача, несколько более общая, чем упомянутая выше, а именно исследуется положительный спектр оператора $SGTG^*$, где $S, T \in \Pi_+(H)$, G — произвольный оператор из $B(H)$. В 2 доказано, что феномены, обнаруженные в 1, проявляют свойство стабильности, если рассматриваемые диссипативные операторы аналитически зависят от параметра.

Для всякого оператора $A \in B(H)$ будем обозначать через $\sigma(A)$ — его спектр, через $\sigma_p(A)$ — точечный спектр. Наряду с обычным понятием собственного числа (с. ч.) и собственного вектора (с. в.) мы будем употреблять понятие асимптотического собственного числа (а. с. ч.) и асимптотически собственной последовательности (а. с. п.), которые определяются следующим образом: комплексное число λ называется а. с. ч. оператора A, если существует такая последовательность $\{x_n\} \subset H$, называемая а. с. п., что $\underline{\lim} \|x_n\| > 0$, $Ax_n - \lambda x_n \to 0$. Очевидно, а. с. ч. оператора A принадлежит $\sigma(A)$, и всякое с. ч. является а. с. ч.

1. Положительный спектр оператора SGTG с диссипативными S и T*

1. Теорема 1.1. *Пусть* $S,\ T \in \Pi_+(H),\ \ G \in B(H),\ \ K = SGTG^*$. *Тогда*

а) *если* $\lambda > 0$ *является с. ч. (а. с. ч.) оператора* K, *то* λ — *с. ч. (а. с. ч.) оператора* $K' = TG^*SG$ *и всех операторов, получающихся из* K *и* K' *заменой* S *или* T *соответственно на* S^* *и* T^*, *а также операторов, сопряженных к упомянутым; при этом* 0 *является с. ч. (а. с. ч.) операторов* S_I *и* T_I;

б) *если* $\lambda > 0,\ \lambda \in \sigma(K)$, то λ — *а. с. ч. оператора* K.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 1$. Пусть $SGTG^* u = u,\ \ u \neq 0$. Тогда $G^*u \neq 0$. Положив $TG^*u = v$, будем иметь $SGv = u$ и, следовательно, $Gv \neq 0$. Имеем $(SGv,\ Gv) = (u,\ Gv) = (G^*u,\ v) = (G^*u,\ TG^*u) = \overline{(TG^*u,\ G^*u)}$. Поскольку $\operatorname{Im}(SGv, Gv) \geqslant 0$, $\operatorname{Im}(TG^*u, G^*u) \geqslant 0$, то $(SGv, Gv) = (TG^*u, G^*u)$ — вещественное число. Отсюда следует, что

$$S_IGv = 0,\ T_IG^*u = 0, \tag{1.1}$$

т. е. 0 — с. ч. операторов S_I и T_I. Из (1.1) вытекает, что $S_RGv = SGv = S^*Gv = u$, $T_RG^*u = TG^*u = T^*G^*u = v$, так что $K'v = TG^*SGv = v$, $S^*GT^*G^*u = u$, $T^*G^*S^*Gv = v$, $SGT^*G^*u = u$ и, следовательно, 1 — с. ч. операторов $K' = TG^*SG$, $S^*GT^*G^*$, $T^*G^*S^*G$, SGT^*G^*, а также других упоминаемых в формулировке теоремы операторов.

Далее, $K^*(Gv) = GT^*G^*S^*(Gv) = G(T^*G^*S^*Gv) = Gv$, т. е. 1 — с. ч. K^*. Аналогично доказывается, что 1 — с. ч. остальных рассматриваемых операторов.

Пусть теперь 1 — а. с. ч. оператора K, $\{u_n\}$ — соответствующая а. с. п., т. е. $\varliminf_{n\to\infty} \| u_n \| > 0$, $Ku_n - u_n = z_n \to 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\| u_n \| \leqslant 1$. Заметим сперва, что $\| SGT \| \cdot \| G^*u_n \| \geqslant \| SGTG^*u_n \| = \| u_n + z_n \| \geqslant \| u_n \| - \| z_n \|$, откуда $\varliminf_{n\to\infty} \| G^*u_n \| > 0$. Положим $v_n = TG^*u_n$. Тогда $SGv_n = u_n + z_n$, так что $\| SGv_n \| \geqslant \| u_n \| - \| z_n \|$, $\| Gv_n \| \geqslant \dfrac{\| u_n \| - \| z_n \|}{\| S \|}$ $\varliminf_{n\to\infty} \| Gv_n \| > 0$. Кроме того, из неравенства $\| Gv_n \| \leqslant \| G \| \cdot \| v_n \|$ следует $\varliminf_{n\to\infty} \| v_n \| > 0$.

Имеем далее

$$(TG^*u_n,\ G^*u_n) = (v_n,\ G^*u_n) = (Gv_n,\ u_n) =$$
$$= (Gv_n,\ SGv_n - z_n) = \overline{(SGv_n,\ Gv_n)} - (Gv_n,\ z_n).$$

Поскольку $|(Gv_n, z_n)| \leqslant \| G \| \cdot \| v_n \| \cdot \| z_n \| \leqslant \| G \|^2 \cdot \| T \| \cdot \| z_n \| \to 0$, а числа $(TG^*u_n,\ G^*u_n)$, $(SGv_n.\ Gv_n)$ находятся в верхней полуплоскости, то

$$(T_IG^*u_n,\ G^*u_n) \to 0,\ (S_IGv_n,\ Gv_n) \to 0. \tag{1.2}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| G^*u_n \| > 0$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| Gv_n \| > 0$, получим, что нуль является а. с. ч. операторов $\sqrt{T_I}$, $\sqrt{S_I}$, а следовательно, и операторов T_I, S_I.

Далее имеем $K'v_n - v_n = TG^*SGv_n - v_n = TG^*(u_n + z_n) - v_n = TG^*z_n \to 0$, т. е. 1 — а. с. ч. оператора $K' = TG^*SG$.

Из (1.2) вытекает, что $T_IG^*u_n \to 0$, $S_IGv_n \to 0$, откуда $T^*G^*u_n - v_n = (TG^*u_n - v_n) - 2iT_IG^*u_n \to 0$, $S^*Gv_n - u_n = (SGv_n - u_n) - 2iS_IGv_n \to 0$. Поэтому $T^*G^*S^*Gv_n - v_n = T^*G^*(S^*Gv_n - u_n) + (T^*G^*u_n - v_n) \to 0$, т. е. 1 — а. с. ч. оператора T^*G^*SG.

Далее, $K^*(Gv_n) - Gv_n = G(T^*G^*S^*Gv_n - v_n) \to 0$ и, следовательно, 1 — а. с. ч. K^*. Аналогично устанавливается, что 1 — а. с. ч. остальных рассматриваемых операторов.

б) Пусть $1 \in \sigma(K)$. Если допустить, что 1 не является а. с. ч. K, то 1 будет с. ч. оператора K^*, т. е. существует такой вектор $x_0 \neq 0$, что $K^*x_0 = x_0$, $GT^*G^*S^*x_0 = x_0$. Имеем $S^*(GT^*G^*S^*x_0) = S^*x_0$, т. е. вектор $S^*x_0 \neq 0$ является собственным для оператора $S^*GT^*G^*$, отвечающим с. ч. 1. Поскольку $-S^*$, $-T^* \in \Pi_+(H)$, то, применив к оператору $S^*GT^*G^*$ уже доказанное в *а*, получим, что 1 — с. ч., а тем более а. с. ч. оператора $SGTG^* = K$, что противоречит допущению.

Следствие. *Если S_I или T_I — непрерывно обратимый оператор, то все точки положительной полуоси регулярны относительно $SGTG^*$, TG^*SG и других упоминаемых в теореме операторов, каков бы ни был оператор $G \in B(H)$.*

Справедлива теорема, являющаяся частичным обращением теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть операторы $S \in \Pi_+(H)$, $G \in B(H)$ и вектор $u \neq 0$ таковы, что $S_IGu = 0$, $G^*S_RGu \neq 0$. Тогда существует такой оператор $T \in \Pi_+(H)$, что TG^*SG имеет положительное с. ч.*

Доказательство. Положим $SGu = v\,(= S_RGu)$. Число $(G^*v, u) = (v, Gu) = (S_RGu, Gu)$ является вещественным и $G^*v \neq 0$. Поэтому существует такой эрмитов оператор Q, что $QG^*v = u$. Пусть, кроме того, Q' — такой неотрицательный оператор, что $Q'G^*v = 0$. Положим $T = Q + iQ'$. Тогда $T \in \Pi_+(H)$ и $TG^*v = u$. Следовательно, $TG^*SGu = u$.

2. Если $S \in \Pi_+(H)$, то $-S^* \in \Pi_+(H)$. Поэтому из теоремы 1.1 вытекает

Теорема 1.3. а) *Если $S \in \Pi_+(H)$, $G \in B(H)$, то всякая отрицательная точка спектра оператора SGS^*G^*, является а. с. ч.*

б) *Если $\lambda < 0$ — с. ч. (а. с. ч.) оператора SGS^*G^*, то λ является с. ч. (а. с. ч.) оператора SG^*S^*G, а 0 является с. ч. (а. с. ч.) оператора S_I.*

Рассмотрим теперь случай, когда оператор G эрмитов.

Теорема 1.4. *Следующие утверждения относительно операторов $S \in \Pi_+(H)$, $G = G^*$ эквивалентны.*

1°. *Число -1 является с. ч. (а. с. ч.) оператора SGS^*G.*

2°. *Операторы* $S_I G$ *и* $S_R G$ *имеют общий с. в.* (*общую а. с. п*), *отвечающий соответственно с. ч.* (*а. с. ч.*) 0 *и либо* i, *либо* $-i$.

3°. *Операторы* SG *и* S^*G *имеют общий с. в.* (*общую а. с. п*), *отвечающий одному и тому же собственному числу* (*а. с. ч.*) i, *либо* $-i$.

Доказательство. Ограничимся более сложным случаем а. с. ч. $1° \Rightarrow 2°$. Пусть -1 — а. с. ч. оператора SGS^*G. По доказанному в теореме 1.1 a существуют такие последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\varliminf_{n\to\infty} \| u_n \| > 0$, $\varliminf_{n\to\infty} \| v_n \| > 0$ и

$$S_I G u_n \to 0, \; S_I v_n \to 0, \tag{1.3}$$

$$S^*G u_n = -v_n, \; SGv_n - u_n \equiv z_n \to 0. \tag{1.4}$$

Поскольку $S_R = S - iS_I = S^* + iS_I$, то из (1.3) и (1.4) вытекает $S_R G u_n + v_n \to 0$, $S_R G v_n - u_n \to 0$. Рассмотрим последовательности $\varphi_n^{\pm} = u_n \pm i v_n$. Очевидно, $S_I G \varphi_n^{\pm} \to 0$. Далее, $S_R G \varphi_n^{\pm} \mp i\varphi_n^{\pm} = S_R G u_n \pm i S_R G v_n \mp i u_n + v_n = (S_R G u_n + v_n) \pm i (S_R G v_n - u_n) \to 0$. Поскольку $\varphi_n^{+} - \varphi_n^{-} = u_n$, $\varliminf_{n\to\infty} \| u_n \| > 0$, то, переходя в случае необходимости к частичным последовательностям, можно добиться того, что либо $\varliminf_{n\to\infty} \| \varphi_n^{+} \| > 0$, либо $\varliminf_{n\to\infty} \| \varphi_n^{-} \| > 0$. Этим доказано 2°.

$2° \Rightarrow 3°$. Если $S_I G \varphi_n \to 0$, $S_R G \varphi_n - i\varphi_n \to 0$, где $\varliminf_{n\to\infty} \| \varphi_n \| > 0$, то $SG\varphi_n - i\varphi_n = (S_R G \varphi_n - i\varphi_n) + iS_I G \varphi_n \to 0$, $S^*G\varphi_n - i\varphi_n = (S_R G \varphi_n - i\varphi_n) - iS_I G\varphi_n \to 0$ и, значит, $\{\varphi_n\}$ — а. с. п. для SG и S^*G, отвечающая а. с. ч. i. Аналогично рассматривается случай, когда

$$S_I G \varphi_n \to 0, \; S_R G \varphi_n + i\varphi_n \to 0.$$

$3° \Rightarrow 1°$. Пусть существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, что $\varliminf_{n\to\infty} \| \varphi_n \| > 0$, $SG\varphi_n + i\varphi_n \to 0$, $S^*G\varphi_n + i\varphi_n \to 0$. Тогда $SGS^*G\varphi_n + \varphi_n = SG(S^*G\varphi_n + i\varphi_n) - i(S^*G\varphi_n + i\varphi_n) \to 0$, т. е. (-1) — а. с. ч. оператора SGS^*G. Аналогично, если $SG\varphi_n - i\varphi_n \to 0$, $S^*G\varphi_n - i\varphi_n \to 0$, то $SGS^*G\varphi_n + \varphi_n \to 0$.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1.4 вытекает следующий способ построения с. в. u оператора SGS^*G, отвечающего с. ч. -1, причем этим способом может быть получен произвольный вектор: если $u_{\pm}$ — вектор, удовлетворяющий условиям $S_I G u_{\pm} = 0$, $S_R G u_{\pm} = \pm i u_{\pm}$ (или же равносильным условиям $SGu_{\pm} = S^*Gu_{\pm} = \pm i u_{\pm}$), то $u = u_+ + u_-$. (Один из векторов u_+ или u_- может быть нулевым).

Аналогично можно сформулировать правило для построения а. с. п. оператора SGS^*G, отвечающей а. с. ч. (-1),

Замечание 1. Введя в H новое скалярное произведение $[x, y] = (Gx, y)$, мы получим гильбертово пространство с G-метрикой [1,2]. Операторы $S_R G$ и $S_I G$ при этом оказываются G-эрмитовыми, причем $S_I G$ — G-неотрицательным. Из теории операторов в пространстве с G-метрикой вытекает, что условие $S_R G u = \pm iu$ влечет G-нейтральность вектора u, т. е. равенство $(Gu, u) = 0$.

Замечание 2. Пусть оператор G неотрицателен. Тогда спектр оператора $S_R G$ веществен, поскольку он отличается от спектра оператора $G^{1/2} S_R G^{1/2}$ разве лишь на точку 0 [3, задача 61]. Поэтому утверждение 2° не может осуществляться, а с ним и утверждение 1°. Таким образом, доказано предложение. Если $G \geqslant 0$, $S \in \Pi_+(H)$, то все точки отрицательной полуоси регулярны относительно оператора SGS^*G.

В случае индефинитного G ситуация, описанная в теореме 1.4, может осуществляться даже в случае двумерного H.

Пример. Выбрав в H $(\dim H = 2)$ какой-либо ортонормированный базис, будем реализовывать операторы в виде матриц. Положим $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$. Имеем $S_R = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $S_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$, так что $S \in \Pi_+(H)$. Операторы $S_R G = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ и $S_I G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ имеют общий с. в. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, отвечающий соответственно с. ч. i и 0. Оператор $SGS^*G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ имеет отрицательное с. ч. -1.

В бесконечномерном H можно построить пример, в котором оператор SGS^*G имеет отрицательное а. с. ч., не являющееся с. ч. Пусть S и G — счетные ортогональные суммы операторов, задаваемых в двумерных пространствах соответственно матрицами $\begin{bmatrix} \frac{1}{n} i & -i \\ i & \frac{1}{n} i \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда SGS^*G — ортогональная сумма операторов $\begin{bmatrix} \frac{1}{n^2} - 1 & -\frac{2}{n} \\ \frac{2}{n} & \frac{1}{n^2} - 1 \end{bmatrix}$ с собственными числами $\frac{1}{n^2} - 1 \pm \frac{2i}{n} \to -1$ при $n \to \infty$. Таким образом, SGS^*G имеет а. с. ч. (-1).

2. Диссипативные оператор-функции

Пусть D — область комплексной плоскости, $S(\zeta)$ — аналитическая функция, заданная в D, значения которой — операторы из $B(H)$. Если $S(\zeta) \in \Pi_+(H)$ при всех $\zeta \in D$, то функцию $S(\zeta)$ будем называть диссипативной и относить к классу $\Pi_+(H; D)$. При этом $S(\zeta)_I$ — гармоническая в D неотрицательная оператор-функция (т. е. гармоническая в D функция, значения которой — неотрицательные операторы).

В настоящем параграфе результаты 1 переносятся на диссипативные оператор-функции.

1. Для скалярной неотрицательной гармонической в единичном круге функции $g(\zeta)$ имеет место неравенство Гарнака [4]:

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}g(0) \leqslant g(\zeta) \leqslant \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}g(0), \tag{2.1}$$

причем выражение $\left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)^{\pm 1}$ не зависит от выбора функции $g(\zeta)$, а лишь от точки ζ. Если ζ пробегает некоторый компакт Q, лежащий внутри единичного круга, то существует такое число M_Q, что

$$M_Q^{-1}g(0) \leqslant g(\zeta) \leqslant M_Q g(0) \quad (\forall \zeta \in Q). \tag{2.2}$$

С помощью конформного отображения оценки (2.1) и (2.2) можно перенести на любую односвязную область. Тривиальным образом они распространяются на гармонические неотрицательные оператор-функции. Таким образом, справедлива

Лемма 2.1. *Пусть D — односвязная*[1] *область комплексной плоскости. Для каждой пары точек ζ_1, $\zeta_2 \in D$ существует такое число $M = M(\zeta_1, \zeta_2)$, что для произвольной гармонической в D неотрицательной оператор-функции $F(\zeta)$*

$$M^{-1}F(\zeta_2) \leqslant F(\zeta_1) \leqslant MF(\zeta_2). \tag{2.3}$$

Следствие 1. *Ядро оператора $F(\zeta)$ не зависит от ζ. Более того, класс таких последовательностей $\{x_n\}$, что $(F(\zeta)x_n, x_n) \to 0$, не зависит от ζ, причем сходимость равномерна внутри D.*

Следствие 2. *Область значений оператора $\sqrt{F(\zeta)}$ не зависит от ζ. Это следует из (2.3) на основании одного предложения Дугласа [5].*

Лемма 2.2. *Пусть D — односвязная область, $S(\zeta) \in \Pi_+(H; D)$, $\zeta_0 \in D$. Для каждого компакта Q на D существует такая константа $N = N[\zeta_0; Q]$, что*

$$\|[S(\zeta) - S(\zeta_0)]f\| \leqslant N(S(\zeta_0)_I f, f)^{1/2},$$
$$\|[S(\zeta)^* - S(\zeta_0)^*]f\| \leqslant N(S(\zeta_0)_I f, f)^{1/2} \quad (f \in H, \ \zeta \in Q).$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда D — единичный круг с центром $\zeta_0 = 0$, Q — концентрический круг радиуса $r < 1$. Как и в скалярном случае, $S(\zeta)$ допускает представление [6]

$$S(\zeta) = K + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\, d\sum(t),$$

где $K = K^*$, $\sum(t)$ — неубывающая ограниченная оператор-функция. Поскольку $S(0) = K + i\int_0^{2\pi} d\sum(t)$, то $\int_0^{2\pi} d\sum(t) = S(0)_I$.

---

[1] Путем проведения разрезов утверждение леммы 2.1, а с ним и оба следствия этой леммы можно распространить на неодносвязную область.

Имеем

$$S(\zeta) - S(0) = 2i\zeta \int_0^{2\pi} \frac{d\sum(t)}{e^{it} - \zeta},$$

$$|([S(\zeta) - S(0)]f,\ g)|^2 = 4|\zeta|^2 \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\left(\sum(t)f,\ g\right)}{e^{it} - \zeta} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4|\zeta|^2 \max_t \frac{1}{|e^{it} - \zeta|^2} \int_0^{2\pi} d\left(\sum(t)f,\ f\right) \int_0^{2\pi} d\left(\sum(t)g,\ g\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4|\zeta|^2}{(1 - |\zeta|)^2} (S(0)_I f,\ f) \| S(0)_I \| \cdot \| g \|^2.$$

Если $|\zeta| \leqslant r < 1$, то

$$|([S(\zeta) - S(0)]f,\ g)|^2 \leqslant \frac{4r^2}{(1-r)^2} (S(0)_I f,\ f) \| S(0)_I \| \cdot \| g \|^2,$$

откуда $\|[S(\zeta) - S(0)]f\| \leqslant N(S(0)_I f,\ f)^{1/2}$, где $N^2 = \frac{4r^2}{(1-r)^2} \|S(0)_I\|$.

Аналогично $|([S(\zeta)^* - S(0)^*]f,\ g)|^2 = |([S(\zeta) - S(0)]g,\ f)|^2 \leqslant \leqslant N^2 (S(0)_I f,\ f) \| S(0)_I \| \cdot \| g \|^2$, откуда следует, что $\|[S(\zeta)^* - S(0^*)]f\| \leqslant N(S(0)_I f,\ f)^{1/2}$.

Следствие 1. *Если* $S(\zeta_0)_I f = 0$, *то векторы* $S(\zeta)f$ *и* $S(\zeta)^* f$ *не зависят от* ζ.

Следствие 2. *Если* $(S(\zeta)_I f_n,\ f_n) \to 0$, *то*

$$\|[S(\zeta) - S(\zeta_0)]f_n\| \to 0, \quad \|[S(\zeta)^* - S(\zeta_0)^*]f_n\| \to 0$$

равномерно внутри D.

Теорема 2.3. *Пусть* $S(\zeta),\ T(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$, *и при некотором* $\zeta_0 \in D$ *оператор* $S(\zeta_0)GT(\zeta_0)G^*$ *имеет с. ч. (а. с. ч.)* $\lambda > 0$. *Тогда при всех* $\zeta \in D$ *оператор* $S(\zeta)GT(\zeta)G^*$ *имеет с. ч. (а. с. ч.)* λ, *причем соответствующий с. в. (а. с. п.) не зависит от* ζ.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda = 1$. Если 1 — с. ч. оператора $S(\zeta_0)GT(\zeta_0)G^*$, а u — соответствующий с. в., то положив $v = T(\zeta_0)G^*u$, будем иметь, как и в теореме 1.1, $T(\zeta_0)_I G^*u = 0$, $S(\zeta_0)_I Gv = 0$, $u = S(\zeta_0)Gv$.

В силу следствия 1, из леммы 2.2 $T(\zeta)G^*u = v$, $S(\zeta)Gv = u$ $(\forall\zeta \in D)$, откуда $S(\zeta)GT(\zeta)G^*u = u$ $(\forall\zeta \in D)$.

Пусть теперь 1 — а. с. ч. оператора $S(\zeta_0)GT(\zeta^0)G^*$, $\{u_n\}$ — соответствующая а. с. п., т. е. $\varliminf_{n\to\infty} \|u_n\| > 0$, $S(\zeta_0)GT(\zeta_0)G^*u_n - u_n \to 0$. Положим $v_n = T(\zeta_0)G^*u_n$. По доказанному в теореме 1.1 $(S(\zeta_0)_I Gv_n,\ Gv_n) \to 0$, $(T(\zeta_0)_I G^*u_n,\ G^*u_n) \to 0$, $S(\zeta_0)Gv_n - u_n \to 0$. Из леммы 2.2. тогда следует, что равномерно внутри D

$$[S(\zeta) - S(\zeta_0)]Gv_n \to 0, \quad [T(\zeta) - T(\zeta_0)]G^*u_n \to 0,$$

откуда

$$S(\zeta)Gv_n - u_n \to 0, \quad T(\zeta)Gu_n - v_n \to 0.$$

Тогда $S(\zeta)GT(\zeta)G^*u_n - u_n = S(\zeta)G[T(\zeta)G^*u_n - v_n] + [S(\zeta)Gv_n - u_n] \to 0$, т. е. 1 — а. с. ч. оператора $S(\zeta)GT(\zeta)G^*$, а $\{u_n\}$ — соответствующая а. с. п.

Теорема 2.4. *Пусть* $S(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$, G — *эрмитов оператор, и при некотором* $\zeta_0 \in D$ *оператор* $K(\zeta_0) = S(\zeta_0)GS(\zeta_0)^*G$ *имеет с. ч. (а. с. ч.), равное* (-1). *Тогда при всех* $\zeta \in D$ *оператор* $K(\zeta) = S(\zeta)GS(\zeta)^*G$ *имеет с. ч. (а. с. ч.), равное* (-1), *причем с. в. (а. с. п.) не зависит от* ζ.

Заметим, что эта теорема не вытекает непосредственно из теоремы 2.3, поскольку функция $-S(\zeta)^*$ не аналитична.

Доказательство. Пусть (-1) — с. ч. оператора $K(\zeta_0)$, u — соответствующий с. в., т. е. $S(\zeta_0)GS(\zeta_0)^*Gu + u = 0$. Положим $v = S(\zeta_0)^*Gu$, тогда $S(\zeta_0)Gv = -u$. Из теоремы 1.1 вытекает, что $S(\zeta_0)_I Gu = 0$, $S(\zeta_0)_I Gv = 0$, $S(\zeta_0)_R Gu = S(\zeta_0)Gu = v$, $S(\zeta_0)_R Gv = S(\zeta_0)^*Gv = -u$.

На основании следствия 1 из леммы 2.2 заключаем, что $S(\zeta)_I Gu = 0$, $S(\zeta)_I Gv = 0\ (\forall \zeta \in D)$ и, следовательно,

$$S(\zeta)_R Gu = S(\zeta)Gu = S(\zeta)^*Gu = v,\ S(\zeta)_R Gv = \\ = S(\zeta)Gv = S(\zeta)^*Sv = -u\ \ (\forall \zeta \in D).$$

Тогда $S(\zeta)GS(\zeta)^*Gu = -u\ \ (\forall \zeta \in D)$.

Пусть теперь (-1) — а. с. ч. оператора $K(\zeta_0)$, $\{u_n\}$ — соответствующая а. с. п. Положим $v_n = S(\zeta_0)^*Gu_n$.

Как показано в теореме 1.1,

$$S(\zeta_0)Gv_n + u_n \to 0,\ (S(\zeta_0)_I Gu_n,\ Gu_n) \to 0,\ (S(\zeta_0)_I Gv_n,\ Gv_n) \to 0.$$

В силу лемм 2.1 и 2.2

$$(S(\zeta)_I Gu_n,\ Gu_n) \to 0,\ (S(\zeta)_I Gv_n,\ Gv_n) \to 0,\\ [S(\zeta) - S(\zeta_0)]Gu_n \to 0,\ [S(\zeta) - S(\zeta_0)]Gv_n \to 0$$

равномерно внутри D.

Тогда

$$S(\zeta)^*Gu_n - v_n \to 0,\ S(\zeta)Gv_n + u_n \to 0,\\ K(\zeta)u_n + u_n = S(\zeta)G[S(\zeta)^*Gu_n - v_n] + [S(\zeta)Gv_n + u_n] \to 0,$$

т. е. -1 — а. с. ч. оператора $K(\zeta)$, а $\{u_n\}$ — соответствующая а. с. п.

Замечание 3. Теорема 1.4 позволяет строить оператор-функции класса $\Pi_+(H;\ D)$, удовлетворяющие теореме 2.4. Пусть S — оператор из $\Pi_+(H)$, удовлетворяющий условиям 1°—3° теоремы 1.4, $\varphi(\zeta)$ — скалярная диссипативная голоморфная в D функция. Положим $S(\zeta) = S_R + \varphi(\zeta)S_I$. Имеем $S(\zeta)_R = S_R + [\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta)]S_I$, $S(\zeta)_I = [\mathrm{Im}\,\varphi(\zeta)]S_I \geqslant O$, так что $S(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$. Если $S_R Gu = \pm iu$, $S_I Gu = 0$, то $S(\zeta)_R Gu = \pm iu$, $S(\zeta)_I Gu = 0$, т. е. при каждом $\zeta \in D$ оператор $S(\zeta)$ удовлетворяет условиям 1° — 3° и, следовательно,

(-1) входит в спектр оператора $S(\zeta) GS(\zeta)^* G$ при всех $\zeta \in D$. В частности, в двумерном H можно построить оператор-функцию $S(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$ и индефинитный оператор G, так что $S(\zeta) GS(\zeta)^* G$ имеет точки спектра на отрицательной полуоси.

Теорема 2.5. *Если* $S(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$, $G = G^*$, *и оператор* $S(\zeta) GS(\zeta)^* G$ *имеет при некотором* $\zeta_0 \in D$ (*а тогда и при всех* $\zeta \in D$) *отрицательное с. ч.* (*а. с. ч.*) $-\rho$, *то существует такая функция* $T(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$, *что* $S(\zeta) GT(\zeta) G$ *имеет положительное с. ч.* (*а. с. ч*) ρ.

Доказательство. Положим $T(\zeta) = S(\zeta) - 2S(\zeta_0)_R$. Очевидно, $T(\zeta)_I = S(\zeta)_I \geqslant O$, так что $T(\zeta) \in \Pi_+(H;\ D)$. Имеем $T(\zeta_0) = S(\zeta_0) - 2S(\zeta_0)_R = -S(\zeta_0)^*$. Поэтому оператор $S(\zeta_0) GT(\zeta_0) G = -S(\zeta_0) \times GS(\zeta_0)^* G$, а с ним и $S(\zeta) GT(\zeta) G$ при всех $\zeta \in D$ имеет с. ч. (а. с. ч.) ρ.

3. Пусть D — верхняя полуплоскость комплексной плоскости. Функция $S(\zeta)$ принадлежит классу $\Pi_+(H;\ D)$ тогда и только тогда, когда она допускает представление

$$S(\zeta) = K + L\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t\zeta}{t - \zeta}\, d\sum(t), \tag{2.4}$$

где $K = K^*$, $L = L^* \geqslant 0$, $\sum(t)$ — неубывающая ограниченная оператор-функция [6]. Заметим, что при этом $S(i) = K + i(L + Q)$, где $Q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sum(t) \geqslant O$.

Теорема 2.6. *Пусть* $S(\zeta)$ *имеет представление* (2.4), $G = G^*$. *Для того чтобы* $S(\zeta) GS(\zeta)^* G$ *имел с. ч.* (*а. с. ч.*) -1, *необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор* $u \neq 0$, *что* $LGu = QGu = 0$, *а* KGu *равно либо* iu, *либо* $-iu$ (*существовала такая последовательность* $\{u_n\}$, *что*

$$\varliminf_{n\to\infty} \| u_n \| > 0,\ LGu_n \to 0,\ QGu_n \to 0,$$

и либо $KGu_n - iu_n \to 0$, *либо* $KGu_n + iu_n \to 0$).

Доказательство. В силу теоремы 2.4 достаточно рассмотреть случай $\zeta = i$. Имеем $S(i)_R = K$, $S(i)_I = L + Q$.

Для случая с. ч. утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 1.4, если учесть, что для неотрицательных L и Q условие $(L + Q) f = 0$ равносильно паре условий $Lf = 0$, $Qf = 0$.

Пусть теперь (-1) — а. с. ч. оператора $S(i) GS(i)^* G$. По теореме 1.4 существует такая последовательность $\{y_n\}$, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \| y_n \| > 0$, $(L + Q) Gy_n \to 0$, и (для определенности) $KGy_n - iy_n \to 0$. Возможны два случая:

1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \| Gy_n \| < \infty$. Тогда $((L + Q) Gy_n,\ Gy_n) \to 0$, откуда $(LGy_n, Gy_n) \to 0$, $\| L^{1/2} Gy_n \| \to 0$, $LGy_n \to 0$ и, следовательно, $QGy_n \to 0$.

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|Gy_n\|=\infty$. Переходя к частичной последовательности, будем считать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|Gy_n\|=\infty$. Положим $z_n=y_n/\|Gy_n\|^{1/2}$. Тогда $\|Gz_n\|=\|Gy_n\|^{1/2}\to\infty$.

Имеем $|(LGz_n,\ Gz_n)|\leqslant|(L+Q)Gz_n,\ Gz_n)|\leqslant\frac{|(L+Q)\,Gy_n,\,Gy_n)|}{\|Gy_n\|}\leqslant$ $\leqslant\|(L+Q)Gy_n\|\to 0$, так что $L^{1/2}Gz_n\to 0$, $LGz_n\to 0$ и, аналогично, $QGz_n\to 0$. Кроме того, $KGz_n-iz_n=(KGy_n-iy_n)/\|Gy_n\|^{1/2}\to 0$. Таким образом, искомая а. с. п. $\{u_n\}$ существует как в случае 1) $(u_n=y_n)$, так и в случае 2) $(u_n=z_n)$.

Обратно, если существует такая последовательность $\{u_n\}$, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|u_n\|>0$, $LGu_n\to 0$, $QGu_n\to 0$ и либо $KGu_n-iu_n\to 0$, либо $KGu_n+iu_n\to 0$, то $(L+Q)\,Gu_n\to 0$, откуда на основании теоремы 1.4 вытекает, что (-1) — а. с. ч. оператора $S(i)\,GS(i)^*G$.

4. Укажем на некоторые приложения полученных результатов.

1. Пусть D — верхняя полуплоскость, $S(\zeta)$, $T(\zeta)\in\Pi_+(H;\ D)$. Допустим, что $S(\zeta)$ допускает представление

$$S(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sum_0(t)}{t-\zeta}\tag{2.5}$$

более специальное, чем представление (2.4) (см. [6]). Здесь $\sum_0(t)$ — неубывающая ограниченная оператор-функция. При этом $\|S(\zeta)\|\leqslant$ $\leqslant\gamma/\operatorname{Im}\zeta$, где $\gamma=\|\sum_0(+\infty)-\sum_0(-\infty)\|$.

Покажем, что все точки положительной полуоси регулярны относительно оператора $S(\zeta)\,GT(\zeta)\,G^*$ $(\forall\zeta\in D)$. Допустив противное, получим на основании теоремы 2.3, что существуют такие последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|u_n\|>0$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|v_n\|>0$, $S(\zeta)\,Gv_n-u_n\to 0$. Отсюда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|u_n\|=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|S(\zeta)\,Gv_n\|\leqslant\frac{\gamma\|G\|}{\operatorname{Im}\zeta}\times$ $\times\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|v_n\|$. Беря достаточно большое $\operatorname{Im}\zeta$, получим противоречие.

Аналогично, если $T(\zeta)$ допускает представление (2.5), то при произвольной $S(\zeta)\in\Pi_+(H;\ D)$ все точки положительной полуоси регулярны относительно $S(\zeta)\,GT(\zeta)\,G^*$.

2. Если $S(\zeta)$ имеет представление (2.5), а $G=G^*$, то все точки отрицательной полуоси регулярны относительно оператора $S(\zeta)\,GS(\zeta)^*G$ при произвольном ζ, $\operatorname{Im}\zeta>0$. Это можно установить рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 1 с использованием теоремы 2.4 вместо 2.3. Ниже приводится другое доказательство, основанное на теореме 2.6.

Представление (2.5) можно свести к (2.4), записав его в виде

$$S(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{1+t^2}d\sum\nolimits_0(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t\zeta}{t-\zeta}\cdot\frac{d\sum_0(t)}{1+t^2}\,.$$

Таким образом,

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, d\sum\nolimits_0 (t),\ L = O,\ d\sum (t) = \frac{d\sum_0 (t)}{1+t^2}$$

и, следовательно,

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} d\,\Sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\Sigma_0(t)}{1+t^2}.$$

Имеем

$$|(Kf, g)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} d(\Sigma_0(t) f, g) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{1+t^2} d(\Sigma_0(t) f, f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\Sigma_0(t) g, g)}{1+t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} d(\Sigma_0(t) f, f)(Qg, g) \leqslant \left\| \int_{-\infty}^{\infty} d\,\Sigma_0(t) \right\| \cdot \|f\|^2 (Qg, g).$$

Отсюда следует, что $\|Kg\| \leqslant \alpha \|Q^{1/2}g\|$ $(\forall g \in H)$ при некотором α_0. Если последовательность $\{u_n\}$ такова, что $\varliminf_{n\to\infty} \|u^n\| > 0$, $|Q^{1/2}Gu_n\| \to 0$, то $\|KGu_n\| \to 0$ и, следовательно, $KGu_n \pm iu_n$ не может стремиться к 0 при $n \to \infty$. По теореме 2.6 все отрицательные числа регулярны для $S(\zeta)GS(\zeta)^*G$.

Последний результат находит применение в теории характеристических функций линейных операторов [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С. Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой. — «Усп. мат. наук», 1962, т. 17, вып. 4 (106), с. 3—56.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G-метрикой. —«Усп. мат. наук», 1971, т. 26, вып. 4 (160), с. 43—92.
3. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., «Мир», 1970. 352с.
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М. -Л., ГИТТЛ, 1950. 703 с.
5. Douglas R. G. On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, vol. 17, 2, p. 413—415.
6. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. 543 с.
7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. -М., «Наука», 1969. 287 с.

Поступила 4 января 1974 г.