УДК 517.531.2

О. А. Письмиченко

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ МУЛЬТИВЕКТОРОВ

1. Вспомогательные сведения о мультивекторах

Всюду в работе используются термины и обозначения из статьи Л. Альфорса [1] и книги Г. и И. Вейлей [2].

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — k векторов из p-мерного комплексного пространства C^p. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ определяют мультивектор $\vec{A}^k = [\vec{a}_1\vec{a}_2 \dots \vec{a}_k]$ размерности $\binom{p}{k}$, $i_1 i_2 \dots i_k$-я компонента которого есть

$$A(i_1, i_2, \dots, i_k) = \begin{vmatrix} a_{1i_1} \dots a_{1i_k} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{ki_1} \dots a_{ki_k} \end{vmatrix},$$
$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant p.$$

Таким образом, 1 — вектор $[\vec{a}]$ совпадает с вектором $\vec{a}$ из C^p. Мультивектор $[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k]$ равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависимы.

Пусть линейно независимые векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ связаны с векторами $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ соотношением

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\vec{a}_j,$$

где $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$.
Легко найти, что

$$[\vec{b}_1 \dots \vec{b}_k] = \det(\lambda_{ij})\,[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k].$$

Если векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно независимы, то вектор $\vec{x}$ принадлежит подпространству C^k, натянутому на систему $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ тогда и только тогда, когда $[\vec{x}\,\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k] = 0$. В этом смысле k-вектор $[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k]$ однозначно определяет подпространство C^k. Будем говорить, что $\vec{A}^k = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k]$ «лежит» в C^k, если $\vec{a}_i \in C^k$, $i = 1, \dots, k$.

Внешнее произведение мультивекторов определим так:

$$[\vec{A}^k\vec{B}^h] = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k\vec{b}_1 \dots \vec{b}_h],$$

где $\vec{A}^k = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k]$, $\vec{B}^h = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_h]$. Соотношение $[\vec{A}^k\vec{B}^h] = 0$ для мультивекторов $\vec{A}^k \neq 0$ и $\vec{B}^h \neq 0$ означает, что система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h$ линейно зависимая. Иными словами, если C^k и C^h подпространства, натянутые на базисы $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_k$ и $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h$, соответственно, то $C^k \cap C^h$ содержит хотя бы один ненулевой вектор.

Определим скалярное произведение двух k-векторов, например, $\vec{X}^k = [\vec{x}_1 \dots \vec{x}_k]$ и $\vec{Y}^k = [\vec{y}_1 \dots \vec{y}_k]$:

$$(\vec{X}^k\vec{Y}^k) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} X(i_1, \dots, i_k)\,\overline{Y}(i_1, \dots, i_k) =$$
$$= \begin{vmatrix} (\vec{x}_1\vec{y}_1) & \dots & (\vec{x}_1\vec{y}_k) \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \\ (\vec{x}_k\vec{y}_1) & \dots & (\vec{x}_k\vec{y}_k) \end{vmatrix}.$$

Модуль k-вектора $\vec{X}^k$ определим так:

$$|\vec{X}^k|^2 = (\vec{X}^k\vec{X}^k).$$

Опишем теперь связь между внешним произведением и скалярным произведением. Выберем в C^p p линейно независимых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p$ таких, что детерминант

$$|\vec{a}_1\vec{a}_2 \ldots \vec{a}_p| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{p1}a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

равен 1. Обозначим C^{p-k} подпространство, натянутое на базис $\vec{a}_{k+1}, \vec{a}_{k+2}, \ldots, \vec{a}_p$. Система линейных уравнений

$$(\vec{a}_{k+1}\vec{\xi}) = 0, \ \ldots, \ (\vec{a}_p\vec{\xi}) = 0$$

определяет однозначно k-мерное подпространство C^k, ортогональное к C^{p-k}, причем базис $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k$ подпространства C^k можно выбрать так, чтобы после дополнения его до базиса C^p выполнялись соотношения

$$(\vec{a}_i\vec{\gamma}_j) = \delta_{ij}, \ i, \ j = 1, \ \ldots, \ p,$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Обозначим $\vec{E}^p = [\vec{e}_1\vec{e}_2 \ldots \vec{e}^p]$ единичный p-вектор; здесь $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$ — ортонормированный базис в C^p. Возьмем также k векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ из C^p. Легко проверяется равенство

$$[\vec{X}^k\vec{A}^{p-k}] = (\vec{X}^k\vec{\Gamma}^k)\vec{E}^p, \tag{1.1}$$

где $\vec{X}^k = [\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_k]$, $\vec{\Gamma}^k = [\vec{\gamma}_1 \ldots \vec{\gamma}_k]$, $\vec{A}^{p-k} = [\vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_p]$. Определим расстояние между k-вектором $\vec{X}^k$ и h-вектором $\vec{Y}^h$ (см. [2, с. 20])

$$|\vec{X}^k : \vec{Y}^h| = \frac{|[\vec{X}^k\vec{Y}^h]|}{|\vec{X}^k|\,|\vec{Y}^h|}. \tag{1.2}$$

Так, определенное расстояние удовлетворяет соотношению

$$0 \leqslant |\vec{X}^k : \vec{Y}^h| \leqslant 1.$$

Пусть $\vec{X}^k$ «лежит» в C^k, а $\vec{Y}^h$ — в C^h. Тогда, если C^k и C^h ортогональны, расстояние $|\vec{X}^k : \vec{Y}^h| = 1$. Условие $|\vec{X}^k : \vec{Y}^h| = 0$ эквивалентно условию: $C^k \cap C^h$ содержит хотя бы один ненулевой вектор.

2. Дефекты и величины отклонений целых мультивекторов

Постоянные мультивекторы всюду далее полагаем равными по модулю единице.

Пусть $\vec{G}(z) = \{g_1(z),\ g_2(z),\ \dots,\ g_p(z)\}$ — целая кривая в p-мерном комплексном пространстве C^p; $g_i(z)$ — линейно независимые целые функции, имеющие разве что конечное число общих нулей:

$$g_i(z) \not\equiv \mathrm{const},\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ p.$$

Обозначим $\vec{G}^{(n)}(z) = \{g_1^{(n)}(z),\ \dots,\ g_p^{(n)}(z)\}$, $n = 1, 2, \dots$. Построим k-вектор $\vec{G}^k(z) = [\vec{G}(z)\vec{G}'(z)\ \dots\ \vec{G}^{(k-1)}(z)]$.

Интересуемся точками, в которых k-мерное подпространство, натянутое на $\vec{G}(z),\ \vec{G}'(z),\ \dots,\ \vec{G}^{(k-1)}(z)$ пересекает данное C^{p-k}. Если $\vec{E}^{p-k}$ — единичный $(p-k)$-вектор, «лежащий» в C^{p-k}, то указанные подпространства пересекаются тогда и только тогда, когда равно нулю расстояние между мультивекторами $\vec{G}^k(z)$ и $\vec{E}^{p-k}$. Следовательно, искомыми точками будут корни уравнения

$$|\vec{G}^k(z) : \vec{E}^{p-k}| = 0. \tag{2.1}$$

Обозначим C^k ортогональное к C^{p-k} подпространство, а $\vec{E}^k$ — k-вектор, «лежащий» в C^k. Из определения расстояния и формулы (1.1) вытекает соотношение:

$$|\vec{C}^k(z) : \vec{E}^{p-k}| = \frac{|(\vec{G}^k(z)\vec{E}^k)|}{|\vec{G}^k(z)|} = 0. \tag{2.2}$$

Заметим, что правая часть соотношения (2.2) удобнее для применения, поэтому вместо уравнения (2.1) будем использовать такое уравнение:

$$\frac{|(\vec{G}^k(z)\vec{E}^k)|}{|\vec{G}^k(z)|} = 0. \tag{2.3}$$

Из определения скалярного произведения легко следует, что (2.3) в предположении линейной независимости $g_i(z)$ $i = 1,\ \dots,\ p$ может выполняться лишь в изолированных точках z-плоскости.

Следуя Л. Альфорсу (см. [1]), введем обозначения: $n(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)$ — число корней уравнения, $\dfrac{|(\vec{G}^k(z)\vec{E}^k)|}{|\vec{G}^k(z)|} = 0$ в круге $|z| \leqslant r$,

$n(r,\ \vec{G}^k)$ — число корней уравнения $|\vec{G}^k(z)| = 0$ в круге $|z| \leqslant r$,

$$N(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{n(t,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)}{t}\,dt,$$

$N(r, \vec{G}^k)$ аналогично $N(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k)$,

$$m(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{|\vec{G}^k(re^{i\varphi})|}{|(\vec{G}^k(re^{i\varphi})\,(\vec{E}^k)|}\,d\varphi,$$

$$T(r, \vec{G}^k) = \left|_{r_0}^{r} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\vec{G}^k(re^{i\varphi})|\,d\varphi - N(r, \vec{G}^k).\right.$$

Порядок и нижний порядок функций $T(r, \vec{G}^k)$, $k = 1, 2, \ldots, p-$ -1 определяется обычным образом. Из [1, § 4] следует, что $\rho_k = \rho$, $\lambda_k = \lambda$ для всех $k = 1, \ldots, p-1$.

Обозначим (см. [3, 4])

$$L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) = \max_{|z|=r} \ln \frac{|\vec{G}^k(z)|}{|(\vec{G}^k(z)\vec{E}^k)|} =$$

$$= \ln \frac{|\vec{G}^k(re^{i\theta_0(r)})|}{|(\vec{G}^k(re^{i\theta_0(r)})\,\vec{E}^k)|},$$

$$\Delta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k)}{T(r, \vec{G}^k)},$$

$$\beta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k)}{T(r, \vec{G}^k)}.$$

Основные результаты работы

Теорема 1. *Для целой кривой $G(z)$ конечного нижнего порядка λ справедлива оценка*

$$\beta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) \leqslant B(\lambda),$$

$$\text{где } B(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & 0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5, \\ \pi\lambda, & 0{,}5 \leqslant \lambda < \infty. \end{cases}$$

Теорема 2. *Существуют целая кривая $\vec{G}_0(z)$ заданного нижнего порядка $\lambda < \infty$* и *k-вектор $\vec{E}_0^k$ такие, что выполняется равенство*

$$\beta(\vec{E}_0^k, \vec{G}_0^k) = B(\lambda).$$

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 мы проведем с помощью метода, изложенного в работах [3, 4, 5].

Зафиксируем некоторое $r > r_0$. Обозначим $G^k_{j_1 \ldots j_k}(z)$ $j_1 \cdots j_k$-ю компоненту мультивектора $\vec{G}^k(z) = [\vec{G}(z) \cdots \vec{G}^{(k-1)}(z)]$ и положим $(z = re^{i\theta_0(r)}$

$$C^k_{j_1 \ldots j_k}(z) = |G^k_{j_1 \ldots j_k}(z)| e^{i\alpha}_{j_1 \ldots j_k}(r),$$

где $\alpha_{j_1 \ldots j_k}(r)$ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \alpha_{j_1 \ldots j_k}(r) < 2\pi, \text{ если } G^k_{j_1 \ldots j_k}(z) \neq 0,$$
$$\alpha_{j_1 \ldots j_k}(r) = 0, \text{ если } G^k_{j_1 \ldots j_k}(z) = 0.$$

Построим целую функцию $(\xi = se^{i\varphi})$:

$$H_r(\xi) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (G^k_{j_1 \ldots j_k}(\xi e^{i\theta_0}))^2 e^{-2i\alpha_{j_1 \cdots j_k}(r)},$$
$$\theta_0 = \theta_0(r).$$

Для $H_r(\xi)$ имеет место

$$H_r(r) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} |G^k_{j_1 \ldots j_k}(re^{i\theta_0})|^2 = |\vec{G}^k(re^{i\theta_0})|^2,$$
$$|H_r(\xi)| \leqslant \sum_{j_1 < \cdots < j_k} |G^k_{j_1 \ldots j_k}(\xi e^{i\theta_0})|^2 = |\vec{G}^k(\xi e^{i\theta_0})|^2.$$

Положим $\Phi_r(\xi) = (\vec{G}^k(\xi e^{i\theta_0}) \vec{E}^k) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} G^k_{j_1 \cdots j_k}(\xi e^{i\theta_0}) \overline{E}(j_1, \ldots, j_k)$ и $Q_r(\xi) = \frac{H_r(\xi)}{\Phi^2_r(\xi)}$. $\Phi_r(\xi)$ является целой функцией ξ, а $Q_r(\xi)$ — мероморфной. Из сказанного для функции $Q_r(\xi)$ следуют соотношения (сравни [4, с. 471])

$$2L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) = \ln|Q_r(r)|,$$
$$n(s, \infty, Q_r) \leqslant 2n(s, 0, \Phi_r) = 2n(s, \vec{E}^k, \vec{G}^k),$$
$$N(s, \infty, Q_r) \leqslant 2N(s, \vec{E}^k, \vec{G}^k) + A_1 \ln(2+s),$$
$$m(s, \infty, Q_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{|H_r(se^{i\varphi})|}{|\Phi_r(se^{i\varphi})|^2} d\varphi < 2m(s, \vec{E}^k, \vec{G}^k) + A_2, \tag{3.1}$$
$$T(s, Q_r) \leqslant 2T(s, \vec{G}^k) + A_3 \ln(2+s).$$

Для мероморфной функции $Q_r(\xi)$ справедливо (см. [3, с. 427])

$$\ln|Q_r(r)| \leqslant$$
$$\leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|Q_r(te^{i\varphi})| d\varphi t^{2x-1}}{t^{2x} + r^{2x})^2} dt +$$

$$+ \sum_{|b_k| \leqslant 2R} \ln \frac{|r^{2x} + |b_k|^{2x}|}{|r^{2x} - |b_k|^{2x}|} + K_1 x \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \{T(4R, Q_r) + T_1(4R, Q_r)\},$$

где $r_0 \leqslant r \leqslant 0{,}5R$, $x = \frac{\pi}{2\alpha} > 0{,}5$, $\{b_k\}$ — полюсы функции $Q_r(\xi)$. С ростом r функция $Q_r(\xi)$ изменяется; проследить за изменением корней функции $H_r(\xi)$ довольно сложно, в то же время у корней функции $\Phi_r(\xi)$ с ростом r изменяются лишь аргументы. Поэтому суммирование по корням $\Phi_r(\xi)$, сохраняя силу неравенства, упрощает его. С учетом этого напишем

$$2L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) = \ln|Q_r(r)| \leqslant$$

$$\leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|Q_r(te^{i\theta})|\, d\theta\, t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2} dt +$$

$$+ 2 \sum_{|c_k| \leqslant 2R} \ln \frac{|r^{2x} + |c_k|^{2x}|}{|r^{2x} - |c_k|^{2x}|} + K_1 x \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \{T(4R, Q_r) + T_1(4R, Q_r)\},$$

где $\{c_k\}$ — корни $(\vec{G}^k(\xi e^{i\theta_0}) \vec{E}^k) = 0$. Отсюда и из (3.1) следует

$$L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{m(t, \vec{E}^k, \vec{G}^k)\, t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2} dt +$$

$$+ \sum_{|c_k| \leqslant 2R} \ln \frac{|r^{2x} + |c_k|^{2x}|}{|r^{2x} - |c_k|^{2x}|} + K_2 x \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \{T(4R, \vec{G}^k) + T_1(4R, \vec{G}^k)\} \tag{3.2}$$

где $\{c_k\}$ — корни $(\vec{G}^k(z) \vec{E}^k) = 0$,

$$T_1(r, \vec{G}^k) = \int_{r_0}^{r} \frac{T(t, \vec{G}^k)}{t} dt.$$

Легко видеть, что порядок и нижний порядок функции $T_1(r, \vec{G}^k)$ совпадают с порядком и нижним порядком функции $T(r, \vec{G}^k)$.

Рассмотрим случай $0{,}5 \leqslant \lambda < \rho \leqslant \infty$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ выберем x так, чтобы $\gamma = \lambda + \varepsilon \leqslant x = \frac{\pi}{2\alpha} \leqslant \lambda + 2\varepsilon < \rho$. Так как (3.2) верно при любом r, $r_0 \leqslant r \leqslant 0{,}5R$, имеем (сравни [3, с. 426—428])

$$\int_{r_0}^{0{,}5R} r^{-\gamma-1} L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k)\, dr \leqslant \pi(\gamma + 3\varepsilon) \int_{r_0}^{0{,}5R} r^{-\gamma-1} T(r, \vec{G}^k)\, dr +$$

$$+ K_3 \frac{T(4R, \vec{G}^k) + T_1(4R, \vec{G}^k)}{R^{\gamma}} + A_4.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} L\,(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)\,dr}{\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T\,(r,\ \vec{G}^k)\,dr} \leqslant \pi\,(\lambda + 4\varepsilon),$$

и, поскольку ε можно взять произвольно малым,

$$\beta\,(\vec{E}^k,\ \vec{G}^k) \leqslant \pi\lambda. \tag{3.3}$$

Для кривой регулярного роста, т. е. $0,5 \leqslant \lambda = \rho < \infty$, доказательство проводится аналогично с использованием уточненного порядка для функции $T\,(r,\ \vec{G}^k) + T_1\,(r,\ \vec{G}^k)$ (см. [3, с. 429—431]).

Из (3.2) получим ($x = \gamma = \rho,\ \gamma_1 = \rho + \varepsilon$),

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-l(r)-1} L\,(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)\,dr \leqslant (2\gamma_1)^2 \times$$

$$\times \int\limits_0^R m\,(t,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k) \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{r^{2\gamma - l\,(r)-1}}{(t^{2\gamma} + r^{2\gamma})^2}\,dr dt +$$

$$+ \sum_{|c_k| \leqslant 2R} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-l(r)-1} \ln \frac{|r^{2\gamma} + |c_k|^{2\gamma}|}{|r^{2\gamma} - |c_k|^{2\gamma}|}\,dr +$$

$$+ K_4\gamma\,\{T\,(4R,\ \vec{G}_k) + T_{\hat{1}}\,(4R,\ \vec{G}^k)\} \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{r^{2\gamma - l(r)-1}}{R^{2\gamma}}\,dr.$$

Вследствие результатов [3, с. 429—431] приходим к неравенству (r_0 берем достаточно большим)

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-l(r)-1} L\,(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)\,dr \leqslant \pi\,(\rho + 3\varepsilon) \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-l(r)-1} T\,(r,\ \vec{G}^k)\,dr + A_6 +$$

$$+ K_5 \frac{T\,(4R,\ \vec{G}^k) + T_1\,(4R,\ \vec{G}^k)}{R^{l(R)}}.$$

Из этого неравенства и свойств уточненного порядка (см. [3, с. 429]) следует

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-l(r)-1} L\,(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)\,dr}{\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-l(r)-1} T\,(r,\ \vec{G}^k)\,dr} \leqslant \pi\rho,$$

т. е.

$$\beta\,(\vec{E}^k,\ \vec{G}^k) \leqslant \pi\rho. \tag{3.4}$$

Пусть теперь $\lambda < 0{,}5$ и $\lambda < \rho \leqslant \infty$. Положив в (3.2) $x = 0{,}5$, будем иметь при фиксированном r

$$L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) \leqslant r \int_0^R \frac{m(t, \vec{E}^k, \vec{G}^k)}{(t+r)^2}\, dt + \sum_{|c_k| \leqslant 2R} \ln \frac{|r + |c_k||}{|r - |c_k||} + A_7 +$$

$$+ K_6 \frac{r}{R} \{T(4R, \vec{G}^k) + T_1(4R, \vec{G}^k)\}. \tag{3.5}$$

Отсюда, взяв $\gamma = \lambda + \varepsilon < \rho$, получаем (сравни [4, с. 477])

$$\int_{r_0}^{0,5R} \frac{L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k)}{r^{\gamma+1}}\, dr \leqslant \frac{\pi\gamma}{\sin \pi\gamma} \{1 + \varepsilon - \cos \pi\gamma (1 - \Delta(\vec{E}^k, \vec{G}^k))\} \times$$

$$\times \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, \vec{G}^k)}{r^{\gamma+1}}\, dr + \frac{K_7}{1-\gamma} \cdot \frac{T(4R, \vec{G}^k) + T_1(4R, \vec{G}^k)}{R^\gamma} + A_8,$$

Поэтому

$$\beta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}. \tag{3.6}$$

При $0 < \lambda = \rho < 0{,}5$ (3.6) получаем с помощью уточненного порядка.

Положим $\lambda = \rho = 0$ и воспользуемся методом, изложенным в [5]. Выберем k-вектор таким, чтобы $\beta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $r_0(\varepsilon) < r < \infty$ из (3.5) получаем при $R \to \infty$ (сравни [4, с. 473])

$$(1-\varepsilon) L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k) \leqslant r \int_{r_0}^{\infty} \frac{m(t, \vec{E}^k, \vec{G}^k)}{(t+r)^2}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| \frac{r + |c_n|}{r - |c_n|} \right| \leqslant$$

$$\leqslant r(1+\varepsilon) \Delta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) \int_{r_0}^{\infty} \frac{T(t, \vec{G}^k)}{(t+r)^2}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| \frac{r + |c_n|}{r - |c_n|} \right|.$$

Отсюда, считая $\gamma = \varepsilon < \frac{3}{4}$, $x > r_0$, получим (см. [4, с. 474])

$$(1 - 2\varepsilon) \int_x^{\infty} r^{-\gamma-1} L(r, \vec{E}^k, \vec{G}^k)\, dr \leqslant \Delta(\vec{E}^k, \vec{G}^k) \int_0^{\infty} T(t, \vec{G}^k) \times$$

$$\times \int_x^{\infty} \frac{r^{-\gamma}}{(t+r)^2}\, dr dt + \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} r^{-\gamma-1} \ln \left| \frac{r+t}{r-t} \right| dr\, dn(t, \vec{E}^k, \vec{G}^k).$$

Используя рассуждения, приведенные в работе [5] на с. 30—32, получим сначала соотношения

$$\int_0^{\infty} T(t, \vec{G}^k) \int_x^{\infty} \frac{r^{-\gamma}}{(t+r)^2}\, dr\, dt = \int_0^{\infty} F(t) \frac{xt^\gamma}{x^\gamma (t+x)^2}\, dt,$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_x^\infty r^{-\gamma-1}\ln\left|\frac{r+t}{r-t}\right|dr\,dn(t,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)\leqslant$$

$$\leqslant\gamma^2(1-\Delta(\vec{E}^k,\ \vec{G}^k))\int\limits_0^\infty\frac{F(t)\,t^{\gamma-1}}{x^\gamma}\ln\left|\frac{t+x}{t-x}\right|dt,$$

где $F(t)=\int\limits_t^\infty s^{-\gamma-1}T(s,\ \vec{G}^k)\,ds$, а затем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(r,\ \vec{E}^k,\ \vec{G}^k)}{T(r,\ \vec{G}^k)}\leqslant 1. \tag{3.7}$$

Из неравенств (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) следует справедливость теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2

Положим $\vec{G}_0(z)=\{g(z),\ z,\ z^2,\ \dots,\ z^{p-1}\}$, $\vec{a}_i=\{0,\ \dots,\ 1,\ \dots,\ 0\}$, 1 стоит на $(i+1)$-м месте, $i=1,\ \dots,\ k$, $\vec{E}_0^k=[\vec{a}_1\vec{a}_2\cdots\vec{a}_k]$.

Пусть $0<\lambda<\infty$. В этом случае положим

$$g(z)=E_\lambda(z)=\sum_{m=1}^\infty\frac{z^m}{\Gamma\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)}\cdot$$

С помощью формулы Ганкеля получим интегральное представление:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\theta,\ a)}\frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha-z}dt,$$

где $\alpha=\frac{1}{\lambda}$, $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$, $a>|z|^\lambda$, $L(\theta,\ a)$ — граница области $\{|\arg t|<\theta,\ |t|>a\}$, проходимая в отрицательном направлении. В силу теоремы Вейерштрасса верно следующее ($n=1,\ 2,\ \dots$):

$$g^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{L(\theta,\ a)}\frac{e^t t^{\alpha-1}}{(t^\alpha-z)^{n+1}}dt.$$

Следуя [6, с. 111—115], найдем, что если $0{,}5<\lambda<\infty$, то

$$g^{(n)}(z)=\begin{cases}w(z)\,e^{z^\lambda}+\varphi_1(z), & |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2\lambda}\\ \varphi_2(z), & \frac{\pi}{2\lambda}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi,\end{cases}$$

а если $0 < \lambda < 0{,}5$, то

$$g^{(n)}(z) = \omega(z) e^{z^\lambda} + \varphi_3(z),$$
$$\text{где } \ln|\omega(z)| = O(\ln r),$$
$$|\varphi_i(z)| = O(|z|^{-n-1}),\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Из этих соотношений получим, что

$$L(r, \vec{E}_0^k, \vec{G}_0^k) = \max_{|z|=r} \ln \frac{|\vec{G}_0^k(z)|}{|(\vec{G}_0^k(z)\vec{E}_0^k)|} \geqslant r^\lambda - O(\ln r).$$

Воспользовавшись теоремой 7.4 из [6, с. 59] для вычисления $T(r, \vec{G}_0^k)$, получим

$$T(r, \vec{G}_0^k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\vec{G}_0^k(re^{i\theta})|\,d\theta \Bigg|_{r_0}^{r} - N(r, \vec{G}_0^k) \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\lambda} r^\lambda + o(r^\lambda), & 0{,}5 \leqslant \lambda < \infty \\ \dfrac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} r^\lambda + o(r^\lambda), & 0 < \lambda \leqslant 0{,}5. \end{cases}$$

Из этих неравенств вытекает, что

$$\beta(\vec{E}_0^k, \vec{G}_0^k) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda, & 0{,}5 \leqslant \lambda < \infty \\ \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & 0 < \lambda \leqslant 0{,}5. \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, положим $g(z)$ произвольной целой функцией нулевого нижнего порядка. Очевидно неравенство

$$L(r, \vec{E}_0^k, \vec{G}_0^k) = \max_{|z|=r} \ln \frac{|\vec{G}_0^k(z)|}{|(\vec{G}_0^k(z)\vec{E}^k)|} \geqslant$$
$$\geqslant \max_{|z|=r} \ln|\vec{G}_0^k(z)| - O(\ln r).$$

Отсюда следует, что

$$\beta(\vec{E}_0^k, \vec{G}_0^k) = 1.$$

Теорема 2 доказана.

Пользуясь случаем, благодарю *Виктора Павловича Петренко* за неустанное внимание к автору.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alfors L. The theory of meromorphic curves. — «Acta Soc. Sci. Fenn., Ser. A», 1941, vol. 3, № 4, p. 1—31.
2. Weyl H. and I. Meromorphic function and analytic curves. — «Princeton», 1943, № 8, p. 47—59.
3. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — «Изв. АН СССР», 1969, т. 33, № 2, с. 414—454.

4. Петренко В. П., Хусайн М. О росте целых кривых. — «Изв. АН СССР», 1973, т. 37, № 2, с. 466—477.
5. Петренко В. П. Некоторые оценки логарифмической производной мероморфной функции. — «Изв. АН Арм. ССР», 1964, т. 17, № 1, с. 23—37.
6. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 200 с.

Поступила 18 ноября 1974 г