УДК 513.88

В. Э. Лянце

ОДНОМЕРНЫЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. **Некоторые определения.** Пусть $H = L_2(R)$ — гильбертово пространство (классов) функций $R \to C$ (R — вещественная прямая, C — комплексная плоскость) и $(f, g) = (f, g)_H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, $\|f\| = \|f\|_H = (f, f)^{1/2}$, $f, g \in H$.

1.1. Определение. *Обозначим через H^1 линейное подпространство в H, состоящее из тех $f \in H$, которые локально абсолютно непрерывны на $R - \{0\}$ и для которых $f' \in H$. Пространство H^1 наделим скалярным произведением $(f, g)_1 = (f, g)_{H^1} = (f, g) + (f', g')$, $f, g \in H^1$ и нормой $\|f\|_1 = \|f\|_{H^1} = (f, f)_1^{1/2}$, $f \in H^1$.*

1.2. Определение. *Для каждого $f \in H^1$ и для каждого $x \in R - \{0\}$ через $f(x)$ обозначим значение в точке x такой функции из класса f, которая непрерывна, и полагаем $\langle \delta_x, f \rangle = f(x)$, $f \in H^1$, $x \in R - \{0\}$. Функционал δ_x (называемый дельтой Дирака, сосредоточенной в точке x) непрерывен на H^1:*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_1, \ f \in H^1, \ x \in R - \{0\}. \tag{1.1}$$

Кроме того, $\forall f \in H^1$ существуют конечные пределы $f(\pm 0)$, $f(\pm\infty)$, причем

$$f(\pm\infty) = 0. \tag{1.2}$$

Для доказательства достаточно применить формулу Ньютона — Лейбница к $d/dx\,(|f(x)|^2)$, а затем неравенство Буняковского. Неравенство (1.1) справедливо также при $x = \pm 0$.

1.3. Определение. *Пусть $H^1_= = \{f \in H^1 : f(+0) = f(-0)\}$, $H^1_0 = \{f \in H^1 : f(+0) = f(-0)\} = 0$; при $f \in H^1_=$ вместо $f(\pm 0)$ (или $\langle \delta_{\pm 0}, f \rangle$) будем писать $f(0)$ (или $\langle \delta_0, f \rangle$). Через Δ_1, Δ, Δ_0 обозначим* *такие операторы* $H \to H$ *с областями определения* $D(\Delta_1) = H^1$, $D(\Delta) = H^1_=$, $D(\Delta_0) = H^1_0$, *что* $\Delta_1 \supset \Delta \supset \Delta_0$ *и* $\Delta_1 f = -if'$ *при* $f \in H^1$.

Отметим, что H^1_0 и $H^1_=$ $\|\cdot\|$-плотно в H и (в силу 1.1)) $\|\cdot\|_1$-замкнуто в H^1 и что

$$\Delta^* = \Delta,\ \Delta_0^* = \Delta_1,\ \Delta_1^* = \Delta_0, \tag{1.3}$$

где звездочкой обозначен переход к сопряженному оператору в H.

1.4. Определение. *Пусть l обозначает произвольную функцию $R \to C$, измеримую и почти всюду конечную (относительно меры Лебега на R). Определим $l(\Delta)$ в смысле спектральной теории самосопряженных операторов. Таким образом, обозначая через Φ оператор Фурье—Планшереля*

$$\Phi f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx,\ f \in H,$$

а через S — оператор умножения на независимое переменное

$$D(S) = \{f \in H : \int\limits_R |xf(x)|^2\, dx < \infty\},\ Sf(x) = xf(x),$$

имеем $l(\Delta) = \Phi^{-1} l(S)\Phi$, где $l(S) f(x) = l(x) f(x)$. Функция l называется символом первого порядка, если $D(l(\Delta)) = D(\Delta) = H^1_=$.

1.5. **Предложение.** *Для того, чтобы функция l была символом первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname*{vraimax}_{\xi \in R} \frac{|l(\xi)|}{\sqrt{1+\xi^2}} < \infty \ \text{и}\ \operatorname*{vraimax}_{\xi \in R} \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|l(\xi)|^2}} < \infty. \tag{1.4}$$

Если l — символ первого порядка, то норма $\|\cdot\|_{l(\Delta)}$ графика оператора[1] *$l(\Delta)$ эквивалентна на $H^1_=$ норме $\|\cdot\|_1$.*

Доказательство. Соотношение $D(l(\Delta)) = D(\Delta)$ эквивалентно соотношению $D(l(S)) = D(S)$. В силу замечания Хермандера к теореме о замкнутом графике (см. [1, с. 117]), если $D(S) = D(l(S))$, то существуют такие числа $C_1, C_2 > 0$, что

$$\forall \tilde f \in D(S)\ \|l(S)\tilde f\|^2 \leqslant C_1[\|\tilde f\|^2 + \|S\tilde f\|^2],$$
$$\|S\tilde f\|^2 \leqslant C_2[\|\tilde f\|^2 + \|l(S)\tilde f\|^2]. \tag{1.4'}$$

Из (1.4′) вытекают неравенства (1.4). Обратно, если выполняются неравенства (1.4), то, очевидно, $D(l(S)) = D(S)$. Для доказательства второго утверждения достаточно заменить в (1.4′) S на $\Delta = \Phi^{-1}S\Phi$ и заметить, что норма $\|\cdot\|_\Delta$ равна на $H^1_=$ норме $\|\cdot\|_1$.

1.6. Определение. *Пусть l — символ первого порядка и $l(\Delta)_0$ — сужение оператора $l(\Delta)$ на H^1_0. Отметим, что $l(\Delta)_0$ есть*

---

[1] Если A — линейный оператор $H_1 \to H_2$, то $\|f\|_A \overset{\mathrm{df}}{=} [\|f\|^2_{H_1} + \|Af\|^2_{H_2}]^{1/2}$.

плотнозаданный, замкнутый оператор в H. (Действительно, H_0^1 является $\|\cdot\|_{l(\Delta)}$-замкнутым в $D(l(\Delta))$, так как оно $\|\cdot\|_1$-замкнуто в $H_{=}^1$). Пусть $l(\Delta)_1 \overset{\mathrm{df}}{=} [\bar{l}(\Delta)_0]^*$, где $\bar{l}(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{l(\xi)}$, а звездочкой обозначен переход к сопряженному оператору в пространстве H. (Отметим, что в силу 1.5. $\bar{l}$ также является символом первого порядка). Символ l называется правильным, если $D(l(\Delta)_1) = H^1$.

1.7. *Замечание*. Введем следующие обозначения:

$$c(x) = e^{-|x|}, \quad s(x) = e^{-|x|}\,\mathrm{sgn}\,x. \tag{1.5}$$

Отметим, что $c, s \in H^1$ и $c' = -s$, $s' = -c$ и что

$$\forall f \in H^1, \ (f, s)_1 = \mu(f), \ (f, c)_1 = \nu(f), \tag{1.6}$$

где

$$\forall f \in H^1 \ \ \mu(f) \overset{\mathrm{df}}{=} f(+0) - f(-0), \ \ \nu(f) \overset{\mathrm{df}}{=} f(+0) + f(-0), \tag{1.7}$$

в частности,

$$(c, c)_1 = (s, s)_1 = 2, \ (c, s)_1 = 0. \tag{1.8}$$

Кроме того, имеем

$$\tilde{c}(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}, \ \ \tilde{s}(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi s(\xi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\xi}{1+\xi^2}. \tag{1.9}$$

1.8. *Замечание*. Поскольку

$$H_{=}^1 = \{f \in H^1 : \mu(f) = 0\}, \tag{1.10}$$

то в силу (1.6) пространство H^1 есть $\|\cdot\|_1$-ортогональная сумма пространства $H_{=}^1$ и пространства, натянутого на s:

$$\forall f \in H^1, \ f - \frac{1}{2}\mu(f)\,s \in H_{=}^1. \tag{1.11}$$

Отметим еще, что $D(S) \subset L_1(R)$ и что

$$\tilde{H}_0^1 \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi H_0^1 = \{\tilde{g} \in D(S) : \int_R \tilde{g}(\xi)\,d\xi = 0\}. \tag{1.12}$$

Поскольку соотношение (1.12) можно записать также в виде $(1+S^2)^{1/2}\tilde{H}_0^1 = \tilde{G}$, где $\tilde{G}$ обозначает ортогональное дополнение в H функции $\xi \to (1+\xi^2)^{-1/2}$, то по теореме об ортогональной проекции, если $\tilde{h} \in H$,

$$\Big[(\tilde{h}, \ (1+S^2)^{\frac{1}{2}}\tilde{g}) \underset{\forall \tilde{g} \in \tilde{H}_0^1}{=} 0\Big] \Rightarrow \big[\tilde{h}(\xi)\sqrt{1+\xi^2} = \mathrm{const}\big]. \tag{1.13}$$

1.9. **Предложение.** *Для того чтобы символ первого порядка l был правильным, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $k \neq 0$, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|l(\xi) - k\xi|^2}{1+\xi^2}\,d\xi < \infty. \tag{1.14}$$

Если l — правильный символ первого порядка, то норма $\|\cdot\|_{l(\Delta)_1}$ эквивалентна на H^1 норме $\|\cdot\|_1$.

Доказательство. Легко видеть, что $l(\Delta)_1 \supset l(\Delta)$ и что $\dim [D(l(\Delta)_1)/H^1_=] = 1$, а поэтому (см. (1.11)) условие (правильности символа l) $D(l(\Delta)_1) = H^1$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$s \in D(l(\Delta)_1). \tag{1.15}$$

Предположим сначала, что l — правильный символ и, следовательно, (1.15) выполняется. Тогда для произвольного $g \in H^1_0 = D(\bar{l}(\Delta)_0)$ в силу (1.9) имеем

$$(l(\Delta)_1 s, g) = (s, \bar{l}(\Delta)_0 g) = (\tilde{s}, \Phi\bar{l}(\Delta)_0 g) =$$
$$= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi^2} \overline{\overline{l(\xi)}\,\tilde{g}(\xi)}\, d\xi,$$

где $\tilde{g} \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi g$. Отсюда, на основании (1.12), заключаем, что для произвольных $\tilde{g} \in \tilde{H}^1_0$ и $k' \in C$

$$(\Phi l(\Delta)_1 s, \tilde{g}) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi l(\xi) - k'(1+\xi^2)}{1+\xi^2} \overline{\tilde{g}(\xi)}\, d\xi.$$

Это означает, что функция $\xi \to \tilde{h}(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\Big[\Phi l(\Delta)_1 s(\xi) - \frac{1}{i} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi l(\xi) - k'(1+\xi^2)}{1+\xi^2}$ удовлетворяет условиям утверждения (1.13). (Отметим, что $\tilde{h} \in H$, так как в силу (1.4) второе слагаемое в квадратных скобках ограничено при $\xi \in R$). На основании этого утверждения заключаем, что все выражение в квадратных скобках равно некоторой константе k''. Выберем таксе значение k константы k', при котором $k'' = 0$ и, следовательно,

$$\Phi l(\Delta)_1 s(\xi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi l(\xi) - k(1+\xi^2)}{1+\xi^2}. \tag{1.16}$$

Поскольку здесь левая часть интегрируема с квадратом, то то же верно для правой части, откуда вытекает (1.14). Обратно, если выполняется (1.14), то правая часть (1.16) интегрируема с квадратом и, выполняя предыдущие выкладки в обратном порядке, убеждаемся, что имеет место (1.15), а поэтому символ l является правильным.

Второе из доказываемых утверждений вытекает из того, что операторы $l(\Delta)_1$ и Δ_1 замкнуты и что нормы $\|\cdot\|_{\Delta_1}$ и $\|\cdot\|_1$ совпадают на H^1.

1.10. *Замечание.* Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, l обозначает правильный символ первого порядка. Кроме того, для упрощения записи мы считаем, что константа k в (1.14) равна единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|l(\xi)-\xi|^2}{1+\xi^2}\, d\xi < \infty. \tag{1.17}$$

Введем обозначение

$$l(S)_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi l(\Delta)_1 \Phi^{-1}. \tag{1.18}$$

Теперь соотношение (1.16) можно записать в виде

$$l(S)_1 \tilde{s}(\xi) = l(\xi)\tilde{s}(\xi) - \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{1.19}$$

На основании (1.11) и (1.19) заключаем, что

$$\forall f \in H^1 \Phi l(\Delta)_1 f(\xi) = l(\xi)\Phi f(\xi) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mu(f). \tag{1.20}$$

1.11. *Замечание*. Пространство $\tilde{H}^1$, где $\tilde{H}^1 \overset{df}{=} \Phi H^1$, состоит из тех и только тех $\tilde{f} \in H$, для которых существует такое число $\tilde{\mu}(\tilde{f})$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi \tilde{f}(\xi) + \tilde{\mu}(\tilde{f})|^2\, d\xi < \infty. \tag{1.21}$$

Действительно, если $\tilde{f} \in \tilde{H}^1$, то применяя (1.20) к случаю когда $l(\xi) \equiv \xi$, находим, что (1.21) выполняется, если принять

$$\tilde{\mu}(\tilde{f}) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mu(\Phi^{-1}\tilde{f}). \tag{1.22}$$

Обратно, если $\tilde{f} \in H$ и выполняется (1.21), то, как нетрудно проверить,

$$\tilde{f} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{\mu}(\tilde{f})\tilde{s} \in D(S), \tag{1.23}$$

а поэтому $\Phi^{-1}\left(\tilde{f} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{\mu}(\tilde{f})\tilde{s}\right) \in H^1_{=}$, $\Phi^{-1}\tilde{f} \in H^1$, $\tilde{f} \in \tilde{H}^1$.

Всюду в дальнейшем через $\tilde{\mu}$ мы обозначаем функционал, заданный на $\tilde{H}^1$ соотношением (1.21) (эквивалентным соотношению (1.22)). Отметим, что теперь соотношение (1.20) можно записать в виде

$$\forall \tilde{f} \in \tilde{H}^1 \;\; l(S)_1 \tilde{f}(\xi) = l(\xi)\tilde{f}(\xi) + \tilde{\mu}(\tilde{f}). \tag{1.24}$$

Наделим пространство $\tilde{H}^1$ скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)_{\tilde{H}^1}$, индуцированным из H^1 преобразованием Фурье:

$$(\tilde{f}, \tilde{g})_1 = (\tilde{f}, \tilde{g})_{\tilde{H}^1} = (\Phi^{-1}\tilde{f}, \Phi^{-1}\tilde{g})_1, \;\; \tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{H}^1. \tag{1.25}$$

Нетрудно видеть, что для любых $\tilde{f}, \tilde{g} \in H^1$

$$(\tilde{f}, \tilde{g})_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{f}(\xi)\overline{\tilde{g}(\xi)} + \left(\xi\tilde{f}(\xi) + \tilde{\mu}(\tilde{f})\right)\overline{\left(\xi\tilde{g}(\xi) + \tilde{\mu}(\tilde{g})\right)}\right] d\xi. \tag{1.26}$$

Кроме того, в силу (1.1), (1.22) и (1.25),

$$|\tilde{\mu}(\tilde{f})| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|\tilde{f}\|_1, \ \tilde{f} \in \tilde{H}^1, \tag{1.27}$$

где $\|\tilde{f}\|_1 = +\sqrt{(\tilde{f}, \tilde{f})_1}$, $\tilde{f} \in \tilde{H}^1$. Очевидно, функционал $\tilde{\mu}$ неограничен относительно нормы пространства H.

1.12. *Замечание.* Определим на пространстве $\tilde{H}^1$ еще функционал $\tilde{\nu}$ формулой

$$\tilde{\nu}(\tilde{f}) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \tilde{f}(\xi)\, d\xi. \tag{1.28}$$

Это определение корректно. Действительно, пространство $\tilde{H}^1$ есть $(\cdot\,,\,\cdot)_{\tilde{H}^1}$-ортогональная сумма пространства $\tilde{H}^1_= \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi H^1_= = D(S)$ и пространства, натянутого на $\tilde{s}$. Как уже отмечалось, $D(S) \subset L_1(R)$, а поэтому

$$\forall \tilde{f} \in \tilde{H}^1_= \ \ \tilde{\nu}(\tilde{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi)\, d\xi = \sqrt{2\pi}\,\Phi^{-1}\tilde{f}(0). \tag{1.29}$$

С другой стороны, так как $\tilde{s}(-\xi) = -\tilde{s}(\xi)$, то $\tilde{\nu}(\tilde{s})$ существует и $\tilde{\nu}(\tilde{s}) = 0$. Кроме того, поскольку $\forall f \in H^1 \ \left\langle \delta_0, f - \frac{1}{2}\mu(f)\,s \right\rangle = \frac{1}{2}\nu(f)$, то учитывая (1.11) и (1.29) находим, что

$$\forall \tilde{f} \in \tilde{H}^1 \ \ \tilde{\nu}(\tilde{f}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\nu(\Phi^{-1}\tilde{f}). \tag{1.30}$$

Очевидно, что функционал $\tilde{\nu}$ неограничен относительно нормы пространства H, однако легко видеть, что

$$\forall \tilde{f} \in \tilde{H}^1 \ |\tilde{\nu}(\tilde{f})| \leqslant \sqrt{2\pi}\,\|\tilde{f}\|_1. \tag{1.31}$$

1.13. Определение. Пусть, как и раньше, l есть правильный символ первого порядка, удовлетворяющий условию (1.17), а θ_+ и θ_- — комплексные числа, отличные от нуля. Через L мы обозначим оператор $H \to H$, заданный на множестве тех функций f из H^1, которые удовлетворяют краевому условию

$$\theta_+ f(+0) = \theta_- f(-0) \tag{1.32}$$

соотношением

$$Lf = l(\Delta)_1 f. \tag{1.33}$$

1.14. *Замечание.*. Пусть

$$\tilde{L} = \Phi L \Phi^{-1}. \tag{1.34}$$

Легко видеть, что оператор $\tilde{L}$ задан на множестве тех $\tilde{f}$ из $\tilde{H}^1$, которые удовлетворяют краевому условию

$$m\tilde{\mu}(\tilde{f}) = n\tilde{\nu}(\tilde{f}), \tag{1.35}$$

где

$$m \overset{\text{df}}{=} i\pi(\theta_+ + \theta_-), \quad n \overset{\text{df}}{=} \theta_+ - \theta_-, \tag{1.36}$$

формулой

$$\forall \tilde{f} \in D(\tilde{L}) \quad \tilde{L}\tilde{f}(\xi) = l(\xi)\tilde{f}(\xi) + \tilde{\mu}(\tilde{f}). \tag{1.37}$$

Отметим, что условие $[\theta_+ \neq 0$ и $\theta_- \neq 0]$ эквивалентно условию

$$m \neq in\pi, \quad m \neq -in\pi, \tag{1.38}$$

ибо, в силу (1.36)

$$\theta_+ = \frac{1}{2\pi i}(m + in\pi), \qquad \theta_- = \frac{1}{2\pi i}(m - in\pi). \tag{1.39}$$

1.15. *Замечание.* Отметим, что L (и $\tilde{L}$) замкнут и плотно задан как оператор $H \to H$. Это вытекает из того, что замкнут и плотно задан оператор $l(\Delta)_1$, а функционалы δ_{+0}, δ_{-0} $\|\cdot\|_1$-непрерывны и $\|\cdot\|$-неограничены.

1.16. *Замечание.* (Формула Грина). Для любых $f,\ g \in H^1$

$$(l(\Delta)_1 f, g) - (f, \bar{l}(\Delta)_1 g) = i\left[f(+0)\overline{g(+0)} - f(-0)\overline{g(-0)}\right]. \tag{1.40}$$

Действительно, в силу (1.24) находим, что для любых $\tilde{f},\ \tilde{g} \in \tilde{H}^1$

$$(l(S)_1\tilde{f}, \tilde{g}) - (\tilde{f}, \bar{l}(S)_1\tilde{g}) = \tilde{\mu}(\tilde{f})\overline{\tilde{\nu}(\tilde{g})} - \tilde{\nu}(\tilde{f})\overline{\tilde{\mu}(\tilde{g})}. \tag{1.41}$$

Из (1.41) на основании (1.7), (1.22) и (1.30) получаем (1.40).

1.17. Следствие. *Оператор L сопряженный к оператору L^* (см. определение 1.13), удовлетворяет соотношениям*

$$L^* \subset \bar{l}(\Delta)_1, \qquad D(L^*) = \{g \in H^1 : \bar{\theta}_- g(+0) = \bar{\theta}_+ g(-0)\}. \tag{1.42}$$

Действительно, так как $l(\Delta)_0 \subset L \subset L(\Delta)_1$, то $\bar{l}(\Delta)_0 \subset L^* \subset \bar{l}(\Delta)_1$. Отметим, что из (1.36) и (1.42) вытекает

$$\tilde{L}^* \subset l(S)_1, \quad D(\tilde{L}^*) = \{\tilde{g} \in \tilde{H}^1 : m^*\tilde{\mu}(\tilde{g}) = n^*\tilde{\nu}(\tilde{g})\}, \tag{1.43}$$

где

$$m^* = \bar{m}, \quad n^* = \bar{n}. \tag{1.44}$$

1.18. Следствие. *Для того чтобы оператор L был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{Im} l(\xi) = 0$ *почти всюду при* $\xi \in R$ *и чтобы* $|\theta_+| = |\theta_-|$.

Отметим, что в силу (1.39)

$$[|\theta_+| = |\theta_-|] \leftrightarrow \left[\operatorname{Im}\frac{m}{n} = 0, \text{ или } n = 0\right]. \tag{1.45}$$

2. **Точечный спектр оператора** L. Пусть l — правильный символ первого порядка, θ_+, θ_- — отличные от нуля комплексные числа и L — соответствующий им (в смысле определения 1.13) оператор. Прежде всего опишем точечный спектр оператора $l(\Delta)_1$.

2.1 ***Лемма.*** а) *Для того чтобы число* ξ *было собственным значением оператора* $l(\Delta)_1$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* $\tilde{a}_\xi \in H$, *где*

$$\tilde{a}_\zeta(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} [l(\xi) - \zeta]^{-1}. \tag{2.1}$$

Собственное подпространство оператора $l(\Delta)_1$, *отвечающее собственному значению* ζ, *натянуто на* $a_\zeta \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi^{-1}\tilde{a}_\zeta$.

б) *Если* $\zeta \notin \overline{l(R)}$ *(где* $l(R) = \{l(\xi) : \xi \in R\}$, *а черта обозначает операцию замыкания множества в* C), *то* ζ *есть собственное значение оператора* $l(\Delta)_1$.

Доказательство. а) Пусть $\zeta \in C$, $u \in H^1$, $u \neq 0$ и $l(\Delta)_1 u = \zeta u$. Тогда, в силу (1.20), $\Phi u = c\tilde{a}_\zeta$, где c — некоторое число $\neq 0$, а поэтому $\tilde{a}_\zeta \in H$. Обратно, если $\tilde{a}_\zeta \in H$, то $\tilde{a}_\zeta \in H^1$, ибо в силу (1.4) и (1.17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi\tilde{a}_\zeta(\xi) - 1|^2 d\xi < \infty \tag{2.2}$$

и можно применить замечание 1.11. Из последнего вытекает также, что

$$\tilde{\mu}(\tilde{a}_\zeta) = -1. \tag{2.3}$$

Отсюда на основании (1.24) заключаем, что $\tilde{a}_\zeta \in Z(l(S)_1 - \zeta)$, а поэтому $a_\zeta \in Z(l(\Delta)_1 - \zeta)$.

Теперь утверждение *б* вытекает из того, что $\forall \zeta \in \overline{C - l(R)}$, $a_\zeta \in H$.

2.2. Следствие. *Для того чтобы число* ζ *было собственным значением оператора* L, *необходимо и достаточно, чтобы* $a_\zeta \in H$ *и чтобы выполнялось уравнение* $\omega(\zeta) = 0$, *где*

$$\omega(\zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} n\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta) + m. \tag{2.4}$$

Действительно, собственное значение оператора $l(\Delta)_1$ является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда a_ζ удовлетворяет краевому условию (1.35). В силу (2.3), это эквивалентно тому, что $\omega(\zeta) = 0$.

2.3. ***Лемма.*** *Для любых* ζ *и* ζ_1 *из* $C-\overline{l(R)}$, $\operatorname{Im}\zeta_1 \neq 0$

$$\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{l(\xi)-\xi} - \frac{1}{\xi-\zeta_1}\right] d\xi + i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \zeta_1. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{b}_\zeta(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\xi-\zeta}, \quad \xi \in R, \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0. \tag{2.6}$$

Как легко видеть,

$$\tilde{b}_\zeta \in \tilde{H}_1, \quad \tilde{\mu}(\tilde{b}_\zeta) = -1, \quad \tilde{\nu}(\tilde{b}_\zeta) = i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im}_\zeta. \tag{2.7}$$

Следовательно, в силу (2.3), $\tilde{\mu}(\tilde{a}_\zeta - \tilde{b}_{\zeta_1}) = 0$, а поэтому $\tilde{a}_\zeta - \tilde{b}_{\zeta_1} \in D(S) \subset L_1(R)$ при $\zeta \notin \overline{l(R)}$, $\operatorname{Im}\zeta_1 \neq 0$. Учитывая это и представляя $\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta)$ в виде $\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta - \tilde{b}_{\zeta_1}) + \tilde{\nu}(\tilde{b}_\zeta)$, приходим к (2.5).

2.4. Следствие. *Функции* $\zeta \to \tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta)$, $\zeta \to \omega(\xi)$ *голоморфны при* $\zeta \in C-\overline{l(R)}$ *и, следовательно, множество собственных значений оператора* L *не имеет предельных точек вне* $\overline{l(R)}$.

Действительно, из (2.5) вытекает, что

$$\frac{d}{d\zeta}\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{[l(\xi)-\zeta]^2} \quad \zeta \in C-\overline{l(R)}. \tag{2.8}$$

2.5. *Замечание.* Нетрудно видеть, что при $\zeta \in C-\overline{l(R)}$

$$\forall \tilde{g} \in H \quad \tilde{g}\tilde{a}_\zeta \in D(S) = \tilde{H}^1_=, \tag{2.9}$$

где $\tilde{g}\tilde{a}_\zeta(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{g}(\xi)\tilde{a}_\zeta(\xi)$. Поэтому, при $\zeta \in C-\overline{l(R)}$

$$\forall \tilde{g} \in H \quad \tilde{\mu}(\tilde{g}\tilde{a}_\zeta) = 0. \tag{2.10}$$

Покажем, что при $\zeta \in C-\overline{l(R)}$ существует такое число $C(\zeta)$, что

$$\forall \tilde{g} \in H \quad |\tilde{\nu}(\tilde{g}\tilde{a}_\zeta)| \leqslant C(\zeta)\|\tilde{g}\|. \tag{2.11}$$

Действительно, в силу (2.9) имеем $\|\tilde{g}\tilde{a}_\zeta\|_1 = \left\|(1+S^2)^{\frac{1}{2}}\tilde{g}\tilde{a}_\zeta\right\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\xi^2}{|l(\xi)-\zeta|^2}|\tilde{g}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$. В силу (1.4) дробь под знаком интеграла является ограниченной при $\xi \in R$, а поэтому существует такое число $C_1(\zeta)$, что

$$\|\tilde{g}\tilde{a}_\zeta\|_1 \leqslant C_1(\zeta)\|g\|. \tag{2.12}$$

Из (1.31) вытекает (2.12).

2.6. **Предложение.** *Если* $\zeta \in C - \overline{l(R)}$ *и* $\omega(\zeta) \neq 0$ (см. (2.4.)), *то* ζ *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(L)$ *оператора* L *и*

$$\forall \tilde{g} \in H \quad (\tilde{L} - \zeta)^{-1} \tilde{g}(\xi) = \left[\tilde{g}(\xi) - \frac{n}{\omega(\zeta)} \tilde{\nu}(\tilde{g}\tilde{a}_\zeta)\right] \tilde{a}_\zeta(\xi), \quad (2.13)$$

где $\tilde{L} \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi L \Phi^{-1}$.

Доказательство. Обозначим правую часть (2.13) через $\tilde{L}_\zeta \tilde{g}(\xi)$. Из (2.11) и (2.12) вытекает, что так определенный оператор $\tilde{L}_\zeta$ задан на всем H и ограничен по норме H $\left(\text{ибо } \forall \tilde{f} \in \tilde{H}^1 \|\tilde{f}\|_1 \geq \|f\|\right)$. Кроме того, из (2.9) вытекает, что $\tilde{L}_\zeta \tilde{g} \in \tilde{H}^1 = D(l(S)_1)$. Принимая во внимание (2.3) и (2.10) находим

$$\tilde{\mu}(\tilde{L}_\zeta \tilde{g}) = \frac{n}{\omega(\zeta)} \tilde{\nu}(\tilde{g}\tilde{a}_\zeta) \quad (2.14)$$

Далее, учитывая (2.4), получаем

$$\tilde{\nu}(\tilde{L}_\zeta \tilde{g}) = \frac{m}{\omega(\zeta)} \tilde{\nu}(\tilde{g}\tilde{a}_\zeta). \quad (2.15)$$

Из (2.14) и (2.15) следует, что $\tilde{L}_\zeta \tilde{g}$ удовлетворяет краевому условию (1.35), а поэтому $\tilde{L}_\zeta \tilde{g} \in D(\tilde{L})$. Наконец, из (1.37) и (2.14) вытекает, что $(l(S)_1 - \zeta)\tilde{L}_\zeta \tilde{g} = \tilde{g}$. Так как $\omega(\zeta) \neq 0$, то в силу следствия 2.2 $\tilde{L}_\zeta \tilde{g}$ есть единственное решение уравнения $(\tilde{L} - \zeta)\tilde{f} = \tilde{g}$ ч. т. д.

Теперь мы введем некоторое дополнительное ограничение на символ l. При этих ограничениях можно получить более конкретную информацию о точечном спектре оператора L.

2.7. Определение. *Функция* $l: R \to C$ *называется регулярным символом (первого порядка), если она взаимно однозначна, непрерывно дифференцируема на* R *и существует такое* $\alpha > 0$, *что*

$$l(\xi) = \xi + O\left(\xi^{\frac{1}{2} - \alpha}\right) \text{ при } |\xi| \to \infty. \quad (2.16)$$

2.8. *Замечание.* Регулярный символ является правильным: для него выполняется (1.4) и (1.17). Более того, если l — регулярный символ, то множество $l(R)$ замкнуто и, как легко видеть,

$$[\tilde{a}_\zeta \in H] \leftrightarrow [\zeta \in C - l(R)], \quad (2.17)$$

а поэтому (см. следствие 2.2) множество $l(R)$ не содержит собственных значений оператора L.

Для произвольных вещественных φ и η, $\eta > 0$ положим

$$X_\varphi \overset{\mathrm{df}}{=} \{\xi \in C : \xi = re^{i\varphi}, \ r > 0\}, \quad (2.18)$$

$$Z_{\varphi,\eta} \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{|\psi - \varphi| < \eta} X_\psi. \quad (2.19)$$

2.9. ***Лемма.*** *Пусть l — такая функция $X_\varphi \to C$, что*

$$\sup_{\psi \in X_\varphi} |l(\xi) - \xi| \left(1 + |\xi|^{\frac{1}{2} - \alpha}\right)^{-1}. \qquad (2.20)$$

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$

$$[l(\xi) - \zeta](\xi - \zeta)^{-1} = 1 + o(1) \text{ при } |\zeta| \to \infty \qquad (2.21)$$

равномерно относительно $\xi \in X_\varphi$ и $\zeta \in C - Z_{\varphi, \eta}$.

Доказательство. В силу (2.20) существует такое число $c > 0$, что

$$\forall \xi \in X_\varphi \left| \frac{l(\xi) - \zeta}{\xi - \zeta} - 1 \right| \leqslant c \frac{1 + |\xi|^{\frac{1}{2} - \alpha}}{|\xi - \zeta|}.$$

Пусть $\rho = |\zeta|$, $\zeta = \rho \exp i\psi$, $\tilde{r} = |\xi| / |\zeta|$, тогда

$$\left| \frac{l(\xi) - \zeta}{\xi - \zeta} - 1 \right| \leqslant c \frac{1 + (\rho \tilde{r})^{\frac{1}{2} - \alpha}}{\rho \{[\tilde{r} - \cos(\psi - \varphi)]^2 + [\sin(\varphi - \psi]^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Правая часть последнего неравенства есть $o(1)$ при $\rho \to \infty$ равномерно относительно $\tilde{r} \geqslant 0$ и $|\psi - \varphi| \geqslant \eta$.

2.10. ***Лемма.*** *Если l — регулярный символ, то для каждого $\eta > 0$ равномерно относительно $\zeta \in C - [Z_{0, \eta} \cup Z_{\pi, \eta}]$*

$$\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta) = i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \zeta + O\left(|\zeta|^{-\frac{1}{2} - \alpha}\right), \ |\zeta| \to \infty. \qquad (2.22)$$

Доказательство. Полагая $\zeta_1 = \zeta$ в соотношении (2.5) и считая, что $\zeta \in C - l(R)$ и $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$, находим

$$|\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta) - i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \zeta| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|l(\xi) - \xi|}{|l(\xi) - \zeta| \cdot |\xi - \zeta|} d\xi. \qquad (2.23)$$

В силу леммы 2.9 для каждого $\eta > 0$ существует такое R_η, что при $\xi \in R$, $|\zeta| \geqslant R_\eta$ и $\zeta \in C - [Z_{0, \eta} \cup Z\pi, \eta$ выполняется неравенство $|l(\xi) - \zeta| \geqslant (1 - \eta) |\xi - \zeta|$[1]. Поэтому при $|\zeta| \geqslant R_\eta$ и $\zeta \in C - [Z_{0, \eta} \cup Z_{\pi, \eta}]$ правая часть неравенства (2.23) не больше чем $(1 - \eta)^{-1} \int_R |l(\xi) - \xi| \cdot |\xi - \zeta|^{-2} d\xi$. Но с помощью подстановок $\rho = |\zeta|$, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\xi = \rho \tilde{\xi}$ получаем

$$\int_R \frac{|l(\xi) - \xi|}{|\xi - \zeta|^2} d\xi = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2} + \alpha}} \int_R \frac{O(\tilde{\xi}^{1/2 - \alpha})}{(\tilde{\xi} - \cos\psi)^2 + (\sin\psi)^2} d\xi.$$

---

[1] Отсюда, в частности вытекает, что та часть контура $l(R)$, которая находится вне круга $|\zeta| < R_\eta$, принадлежит множеству $Z_{0, \eta} \cup Z_{\pi, \eta}$.

Так как $(\sin\psi)^2 \geqslant (\sin\eta)^2 > 0$ при $\zeta \in C - (Z_{0,\eta} \cup Z_{\pi,\eta}]$, то последний интеграл ограничен, что и требовалось доказать.

2.11. Следствие. *Если l — регулярный символ, то для каждого $\eta > 0$ множество собственных значений оператора L, принадлежащих области $C - [Z_{0,\eta} \cup Z_{\pi,\eta}]$, является ограниченным.*

Действительно, в силу (2.4) и (2.22) имеем

$$\omega(\zeta) = i\pi n \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \zeta + m + O\left(|\zeta|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \quad |\zeta| \to \infty, \tag{2.24}$$

равномерно относительно $\zeta \in C - [Z_{0,\eta} \cup Z_{\pi,\eta}]$. В силу (1.38) $i\pi n \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \zeta + m \neq 0$, а поэтому уравнение $\omega(\zeta) = 0$ в указанной выше области не имеет больших, по модулю, решений.

2.12. Определение. *Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть*

$$X = X^{(\varepsilon)} \overset{\text{df}}{=} \Big(\bigcup_{|\varphi| \leqslant \varepsilon} X_\varphi\Big) \cup \Big(\bigcup_{|\pi - \varphi| \leqslant \varepsilon} X_\varphi\Big). \tag{2.25}$$

Комплекснозначная функция l называется вполне регулярным символом (первого порядка), если существует такое $\varepsilon > 0$, что l голоморфна и однолистна в некоторой окрестности множества X, и для некоторого $\alpha > 0$ асимптотическое равенство (2.16) *выполняется равномерно на X.*

2.13. *Замечание.* Очевидно, вполне регулярный символ является регулярным, а следовательно, также правильным символом первого порядка. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, l обозначает вполне регулярный символ.

2.14. *Замечание.* Обозначим через $Y_{-\varepsilon}$ ($Y_{+\varepsilon}$) контур, состоящий из лучей $X_{-\varepsilon}$ и $X_{\pi+\varepsilon}$ ($X_{+\varepsilon}$ и $X_{\pi-\varepsilon}$), за исключением малой окрестности нуля, в которой этот контур обходит нуль по гладкой дуге в нижней (верхней) полуплоскости. Контур $Y_{-\varepsilon}$ ($Y_{+\varepsilon}$) предполагается ориентированным слева направо.

Заметим, что наряду с (2.5) справедливы также формулы

$$\tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta) = \int\limits_{Y_{-\varepsilon}\ (\text{или}\ Y_{+\varepsilon})} \left[\frac{1}{l(\xi) - \zeta} - \frac{1}{\xi - \zeta_1}\right] d\xi + i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \zeta_1 \tag{2.26}$$

при условии, что ζ_1 не лежит между вещественной осью и контуром $Y_{-\varepsilon}$ (или $Y_{+\varepsilon}$), а ζ не лежит между контурами $l(R)$ и $l(Y_{-\varepsilon})$ (или $l(Y_{+\varepsilon})$.

Действительно, пусть Γ_R обозначает пересечение окружности $|\xi| = R$ с множеством X. В силу (2.16)

$$\int\limits_{\Gamma_R} \{[l(\xi) - \zeta]^{-1} - (\xi - \zeta_1)^{-1}\}\, d\xi \to 0 \ \text{при}\ R \to \infty$$

и наше утверждение вытекает из голоморфности по ξ подынтегральной функции.

2.15. Следствие. *Функция $\zeta \to \tilde{\nu}(\tilde{a}_\zeta)$ обладает продолжением $\zeta \to \tilde{\nu}_+(\tilde{a}_\zeta)$ $(\zeta \to \tilde{\nu}_-(\tilde{a}_\zeta))$ из области над (под) контуром $l(R)$,* *голоморфным в области над (под) контуром* $l(Y_{-\varepsilon})$ $(l(Y_{+\varepsilon}))$. Именно, предполагая, что ζ_1 находится по ту же сторону от контура интегрирования, что и ζ, т. е. над $Y_{-\varepsilon}$, в случае $\tilde{\nu}_+(\tilde{a}_\zeta)$, и под $Y_{+\varepsilon}$, в случае $\tilde{\nu}_-(\tilde{a}_\zeta)$, имеем

$$\tilde{\nu}_\pm(\tilde{a}_\zeta) = \int\limits_{Y_{\mp\varepsilon}} \left[\frac{1}{l(\xi)-\zeta} - \frac{1}{\xi-\zeta_1}\right] d\xi \pm i\pi, . \tag{2.27}$$

Применяя к интегралу (2.27) лемму 2.9 и рассуждая как при доказательстве леммы 2.10, заключаем, что для каждого $\eta > 0$

$$\tilde{\nu}_\pm(\tilde{a}_\zeta) = \pm i\pi + O\left(|\zeta|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \quad |\zeta| \to \infty \tag{2.28}$$

равномерно относительно $\zeta \in \bigcup \{X_\varphi : -\varepsilon + \eta \leqslant \varphi \leqslant \pi + \varepsilon - \eta\}$ в случае индекса $+$ и равномерно относительно $\zeta \in \bigcup \{X_\varphi : \pi - \varepsilon + \eta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + \varepsilon - \eta\}$ в случае индекса $-$.

2.16. **Предложение.** *Множество собственных значений оператора L (отвечающего вполне регулярному символу) является конечным.*

Доказательство, Из следствия 2.15 вытекает, что функция ω (см. (2.4)) обладает продолжениями ω_+ и ω_-, с такими же областями голоморфности как функции, соответственно, $\zeta \to \tilde{\nu}_+(\tilde{a}_\zeta)$ и $\zeta \to \tilde{\nu}_-(\tilde{a}_\zeta)$ и что

$$\omega_\pm(\zeta) = \pm i\pi n + m + O\left(|\zeta|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right) = 2\theta_\pm + O\left(|\zeta|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \quad |\zeta| \to \infty, \tag{2.29}$$

равномерно в тех же областях, что и в (2.28). Так как $\pm i\pi n + m \neq 0$ (см. (1.38)), то множество решений уравнения $\omega(\zeta) = 0$ ограничено, а в силу принципа изолированности нулей аналитической функции оно является конечным.

3. **Самосопряженный случай.** В этом параграфе мы построим разложение по собственным функциям оператора L в предположении, что этот оператор является самосопряженным. В соответствии с этим мы предположим, что

$$\operatorname{Im} l(\xi) = 0 \text{ при } \xi \in R \text{ и } |\theta_+| = |\theta_-|. \tag{3.1}$$

Кроме того, для упрощения задачи мы предположим, что символ l является вполне регулярным и что равномерно в области X (см. определение 2.12)

$$l'(\xi) = 1 + o(1) \text{ при } |\xi| \to \infty. \tag{3.1}$$

Обозначим через k функцию, обратную к $l : k(l(\xi)) \equiv \xi$. Легко видеть, что k также является вполне регулярным символом, принимающим вещественные значения на R, удовлетворяющим дополнительно условию (3.2). Действительно, так как $l(\xi)/\xi = 1 + O\left(|\xi|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right)$, то $k(\eta)/\eta = k(\eta)/\eta = 1 + o(1)$. Из последнего соотношения и $l(\xi) = \xi + O\left(|\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)$ заключаем, что $k(\eta) = \eta + O\left(|\eta|^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)$. Кроме того, так как $k'(\eta) = 1/l'(k(\eta))$, то из (3.2) вытекает, что $k'(\eta) = 1 + o(1)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$k'(\eta) > 0 \text{ при } \eta \in R \text{ и } \sup k'(\eta) < \infty. \tag{3.3}$$

3.1. ***Лемма.*** *При* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *справедлива формула*

$$\tilde{\nu}(\tilde{a}_z) = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{k'(\eta)}{\eta - z} d\eta. \tag{3.4}$$

Если z принадлежит достаточно малой окрестности вещественной оси, то

$$\tilde{\nu}_+(\tilde{a}_z) - \tilde{\nu}_-(\tilde{a}_z) = 2\pi i k'(z). \tag{3.5}$$

Доказательство. В силу (1.28) и (2.1)

$$\tilde{\nu}(a_z) = \lim_{N \to \infty} \int_{l(-N)}^{l(+N)} \frac{k'(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

Однако, в силу (3.3) и соотношения $l(\xi) - \xi = O\left(|\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)$, при $N \to \infty$ $\int_N^{l(N)} (\eta - z)^{-1} k'(\eta)\, d\eta = O(N^{-1/2-\alpha})$; аналогичная оценка справедлива для интеграла в пределах от $l(-N)$ до $-N$, а поэтому имеет место (3.4). Для построения аналитического продолжения $\tilde{\nu}_+(\tilde{a}_z)$ $(\tilde{\nu}_-(\tilde{a}_z))$ достаточно в формуле (3.4) прогнуть вниз (вверх) контур интегрирования так, чтобы получить контур, соединяющий точки $-N$ и $+N$ и обходящий точку z снизу (сверху). (Напомним, что k голоморфна в окрестности вещественной оси, так как она является обратной к голоморфной и однолистной функции l). Теперь ясно, что соотношение (3.5) есть следствие интегральной формулы Коши.

Введем следующее обозначение:

$$P_y^l \tilde{f}(x) = \tilde{\nu}(\tilde{f}\tilde{a}_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\xi)\, d\xi}{l(\xi) - z}; \tag{3.6}$$

$$z = x + iy; \quad x,\ y \in R, \quad y \neq 0.$$

3.2. ***Лемма.*** а) *Пусть $\tilde{f} \in H$ и пусть $\tilde{f}$ допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность вещественной оси. Тогда функция $z \to \tilde{\nu}(\tilde{f}a_z)$ допускает продолжение $z \to \tilde{\nu}_+(\tilde{f}\tilde{a}_z)$*

$(z \to \tilde{\nu}_-(\tilde{f}\tilde{a}_z))$ *из полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$, *голоморфное в некоторой окрестности замыкания этой полуплоскости. Если* z *принадлежит достаточно малой окрестности вещественной оси, то*

$$\tilde{\nu}_+(\tilde{f}\tilde{a}_z) - \tilde{\nu}_-(\tilde{f}\tilde{a}_z) = 2\pi i \tilde{f}(k(z))\,k'(z). \tag{3.7}$$

б) *Для каждого* $y \neq 0$ $P_y^l \in B(H)$, *где* $B(H)$ — *алгебра линейных непрерывных преобразований* $H \to H$.

в) *Существуют сильные пределы*

$$P_{\pm 0}^l \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{y \to \pm 0} P_y^l \tag{3.8}$$

и для каждого $\tilde{f} \in H$ *почти всюду при* $x \in R$

$$\left(P_{+0}^l - P_{-0}^l\right)\tilde{f}(x) = 2\pi i \tilde{f}(k(x))\,k'(x). \tag{3.9}$$

г) *Если* $\tilde{f} \in D(l(S)_1)$; $z = x + iy$, $x, y \in R$, $y \neq 0$, то

$$P_y^l l(S)_1 \tilde{f}(x) = z P_y^l \tilde{f}(x) + \tilde{\mu}(f)\,\tilde{\nu}(\tilde{a}_z) + \tilde{\nu}(\tilde{f}). \tag{3.10}$$

Доказательство. Мы имеем

$$P_y^l \tilde{f}(x) = \tilde{\nu}(\tilde{f}\tilde{a}_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(k(\eta))\,k'(\eta)}{\eta - z}\,d\eta, \quad z = x + iy, \quad y \neq 0. \tag{3.11}$$

Для доказательства утверждения *а* рассуждаем как в доказательстве леммы 3.1. Для доказательства *б* и *в* заметим, что из (3.11) вытекает

$$P_y^l = P_y Q, \tag{3.12}$$

где

$$P_y \tilde{f}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\xi)\,d\xi}{\xi - z}: \quad z = x + iy, \quad x, y \in R, \quad y \neq 0, \tag{3.13}$$

$$Q\tilde{f}(\eta) = \tilde{f}(k(\eta))\,k'(\eta). \tag{3.14}$$

Так как

$$\|Q\tilde{f}\|^2 \leqslant \sup_{\eta \in R} k'(\eta)\,\|\tilde{f}\|^2, \tag{3.15}$$

то $Q \in B(H)$ и утверждения *б* и *в* вытекает из соответствующих свойств интегралов типа Коши (см., например, [3]). Утверждение *г* вытекает непосредственно из (1.24) и определения $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$, $\tilde{a}_z$.

3.3. *Замечание.* Учитывая, что $l(\xi) \in R$ при $\xi \in R$, находим, что в достаточно малой окрестности вещественной оси

$$\tilde{\nu}_+(\tilde{a}_z) = \overline{\tilde{\nu}_-(\tilde{a}_{\bar{z}})}, \quad \tilde{\nu}_\pm(\tilde{f}\tilde{a}_z) = \overline{\tilde{\nu}_\mp(\tilde{f}\tilde{a}_{\bar{z}})}. \tag{3.16}$$

где $\tilde{f} \in H$ и допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность вещественной оси. Кроме того, так как условие $|\theta_+| = |\theta_-|$

эквивалентно условию $\operatorname{Im}(m/n)=0$, или $n=0$, то в силу (2.4) и (3.16)

$$\bar{n}\,\omega_{+}(z)=n\,\overline{\omega_{-}(\bar{z})}, \tag{3.17}$$

если z принадлежит достаточно малой окрестности вещественной оси. Так как из (2.4) и (3.5) вытекает, что

$$\omega_{+}(z)-\omega_{-}(z)=2\pi ink'(z), \tag{3.18}$$

то, учитывая, что $k'(x)>0$ при $x\in R$, на основании (3.17) и (3.18) заключаем, что

$$\omega_{+}(x)\neq 0 \text{ и } \omega_{-}(x)\neq 0 \text{ при } x\in R. \tag{3.19}$$

Введем следующее обозначение (см. (3.8)):

$$\tilde{M}\tilde{f}(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\omega_{+}(x)}P^{l}_{+0}\tilde{f}(x)-\frac{1}{\omega_{-}(x)}P^{l}_{-0}\tilde{f}(x)\right]\tilde{f}\in H. \tag{3.20}$$

3.4. **Предложение.** а) *Оператор* $\tilde{M}$, *определяемый соотношением* (3.20), *принадлежит алгебре* $B(H)$. *Этот оператор обратим и*

$$\tilde{M}^{-1}\tilde{g}(x)=\frac{l'(x)}{2\pi i}\left[\omega_{+}(l(x))P_{+0}\tilde{g}(l(x))-\omega_{-}(l(x))P_{-}\tilde{g}(l(x))\right],$$
$$\tilde{g}\in H, \tag{3.21}$$

где $P_{\pm 0}$ — *предельное значение интеграла* (3.13); *в частности*, $\tilde{M}^{-1}\in B(H)$.

б) *Оператор* $\tilde{M}$ *является* $\tilde{L}$-*преобразованием Фурье, именно, если* $\tilde{f}\in D(\tilde{L})$, *то почти всюду при* $x\in R$

$$\tilde{M}\tilde{L}\tilde{f}(x)=x\tilde{M}\tilde{f}(x). \tag{3.22}$$

в) *Наряду с формулой* (3.20) *справедлива также формула*

$$\tilde{M}\tilde{f}(x)=\frac{k'(x)}{\omega_{\pm}(x)}\left[\tilde{f}(x)-\frac{n}{\omega_{\mp}(x)}\tilde{\nu}_{\mp}(\tilde{f}\tilde{a}_x)\right],\quad \tilde{f}\in H. \tag{3.23}$$

Доказательство. В силу леммы 3.2, *б* и *в*, $P^{l}_{\pm 0}\in B(H)$. Принимая во внимание (3.19) и, что в силу (2.29) и (1.19)

$$\omega_{\pm}(x)\to 2\theta_{\pm}\neq 0 \text{ при } x\to\infty, \tag{3.24}$$

находим, что оператор умножения на $1/\omega_{\pm}(x)$ ограничен, а поэтому $\tilde{M}\in B(H)$. Для нахождения оператора $\tilde{M}^{-1}$ заметим, что уравнение

$$\tilde{M}\tilde{f}=\tilde{g},\quad \tilde{g}\in H \tag{3.25}$$

выполняется, если

$$\frac{1}{\omega(z)}P^{l}_{y}\tilde{f}(x)=P_{y}\tilde{g}(x),\quad z=x+iy,\quad y\neq 0, \tag{3.26}$$

ибо $P_{+0}-P_{-0}=2\pi i1$. Из (3.26) с помощью (3.9) находим

$$2\pi i\tilde{f}(k(x))\,k'(x)=\omega_+(x)\,P_{+0}\tilde{g}(x)-\omega_-(x)P_{-0}\tilde{g}(x),$$

откуда следует, что $\tilde{f}(x)$ равно правой части равенства (3.21). Выполняя предыдущие выкладки в обратном порядке, убеждаемся, что найденное $\tilde{f}$ удовлетворяет уравнению (3.25). Единственность решения $\tilde{f}$ очевидна.

Из (1.35), (2.4) и (3.10) заключаем, что при $\tilde{f}\in D(\tilde{L})$

$$P_y^l\tilde{L}\tilde{f}(x)=zP_y^l\tilde{f}(x)+\frac{1}{m}\,\omega(z)\,\tilde{\nu}(\tilde{f}),\quad z=x+iy, \tag{3.27}$$

откуда на основании (3.20) вытекает (3.22). Формула (3.23) вытекает очевидным способом из (3.20), (3.9) и (3.18).

3.5. **Предложение.** *Для произвольных $\tilde{g},\ \tilde{h}\in H$, допускающих голоморфное продолжение в некоторую окрестность вещественной оси, функция $z\to(\tilde{L}_z\tilde{g},\ \tilde{h})$, где $\tilde{L}_z\overset{\mathrm{df}}{=}(\tilde{L}-z)^{-1}$ допускает продолжение $z\to(\tilde{L}_z\tilde{g},\ \tilde{h})_+$ $(z\to(\tilde{L}_z\tilde{g},\ \tilde{h})_-)$ из полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ $(\operatorname{Im} z<0)$, мероморфное в некоторой окрестности замыкания этой полуплоскости. Если z принадлежит достаточно малой окрестности вещественной оси, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\left[(\tilde{L}_z\tilde{g},\ \tilde{h})_+-(\tilde{L}_z\tilde{g},\ \tilde{h})_-\right]=$$
$$=\omega_+(z)\,\tilde{M}\tilde{g}(z)\,\overline{\omega_+(\bar{z})\,\tilde{M}\tilde{h}(\bar{z})}\,l'(k(z)), \tag{3.28}$$

где $\tilde{M}\tilde{g}(z)$ и $\tilde{M}\tilde{h}(z)$ возникает из $\tilde{M}\tilde{g}$ и $\tilde{M}\tilde{h}$ аналитическим продолжением.

Доказательство. В силу (2.13)

$$(\tilde{L}_z\tilde{g},\ \tilde{h})_\pm=\int\limits_{\Gamma^\mp}\frac{\tilde{g}(\xi)\overline{\tilde{h}(\xi)}}{l(\xi)-z}d\xi-\frac{n}{\omega_\pm(z)}\tilde{\nu}_\pm(\tilde{g}\tilde{a}_z)\,\tilde{\nu}_\pm(\bar{\tilde{h}},\ a_z) \tag{3.29}$$

где Γ^- (Γ^+) — контур, проходящий вдоль вещественной оси, за исключением малой окрестности точки z и обходящий эту точку снизу (сверху); здесь и далее предполагается, что z принадлежит некоторой достаточно малой окрестности вещественной оси. Обозначим через I левую часть равенства (3.28). Применяя интегральную формулу Коши и учитывая, что аналитическим продолжением функции $\bar{\tilde{h}}$ является $z\to\overline{\tilde{h}(\bar{z})}$, в силу (3.29) имеем

$$I=\tilde{g}(k(z))\,\overline{\tilde{h}(\overline{k(z)})}\,k'(z)-\frac{n}{2\pi i}\left[\frac{\tilde{\nu}_+(\tilde{g}\tilde{a}_z)}{\omega_+(z)}-\frac{\tilde{\nu}_-(\tilde{g}\tilde{a}_z)}{\omega_-(z)}\right]\tilde{\nu}_+(\bar{\tilde{h}}a_z)-$$
$$-\frac{n}{2\pi i\omega_-(z)}\tilde{\nu}_-(\tilde{g}\tilde{a}_z)\left[\tilde{\nu}_+(\bar{\tilde{h}}\tilde{a}_z)-\tilde{\nu}_-(\bar{\tilde{h}}\tilde{a}_z)\right].$$

Следовательно, в силу (3.7) и (3.20)

$$I=\tilde{g}(k(z)\overline{\tilde{h}(\overline{k(z)})}\,k'(z)-n\tilde{M}\tilde{g}(z)\tilde{\nu}_+(\bar{\tilde{h}}\tilde{a}_z)-$$
$$-\frac{n}{\omega_-(z)}\tilde{\nu}_-(\tilde{g}\tilde{a}_z)\overline{\tilde{h}(\overline{k(z)})}\,k'(z)=\overline{\tilde{h}(\overline{k(z)})}\,k'(z)\Big[\tilde{g}(k(z)-$$
$$-\frac{n}{\omega_-(z)}\tilde{\nu}_-(\tilde{g}\tilde{a}_z)\Big]-n\tilde{M}\tilde{g}(z)\tilde{\nu}_+(\bar{\tilde{g}}\tilde{a}_z).$$

Применяя формулу (3.23), отвечающую соответствующему выбору индексов $+$ и $-$, получаем

$$I=\frac{\omega_+(z)\,\omega_-(z)}{k'(z)}\tilde{M}\tilde{g}(z)\tilde{M}\bar{\tilde{h}}(z). \tag{3.30}$$

Отсюда, принимая во внимание (3.16), (3.17) и (3.20), а также формулу

$$n\tilde{M}\tilde{h}(z)=\overline{n\tilde{M}\tilde{h}(\bar{z})}, \tag{3.31}$$

вытекающую из (3.16), (3.17) и (3.20), получаем (3.28).

Введем следующее обозначение:

$$Mf(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\omega_+(x)\tilde{M}\Phi f(x)\sqrt{l'(k(x))}; \tag{3.32}$$

отметим, что все дальнейшее, с очевидными и несущественными изменениями, сохранится, если в (3.32) заменить ω_+ на ω_-. Из предложения 3.4 вытекает, что $M\in B(H)$, что оператор M обратим и что $M^{-1}\in B(H)$.

3.6. **Предложение.** *Для каждой финитной функции $f\in H$ функция Mf голоморфно продолжается в некоторую окрестность вещественной оси и*

$$Mf(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{a(t,\bar{\bar{z}})}\,dt, \tag{3.33}$$

где

$$a(t,z)\overset{\mathrm{df}}{=}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik(z)t}-\frac{n}{\omega_+(z)}\overset{+}{a_z}(t)\right]\sqrt{k'(z)} \tag{3.34}$$

при этом $\overset{+}{a_z}$ обозначает аналитическое продолжение из полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ функции $z\to a_z(t)$, определяемой соотношением

$$a_z(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\Phi^{-1}\tilde{a}_z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{l(\xi)-z}-\frac{1}{\xi-z}\right]e^{it\xi}d\xi\pm\varkappa_\pm(t)\,i\sqrt{2\pi}e^{izt}, \tag{3.35}$$

где $\varkappa_+$ $(\varkappa_-)$ характеристическая функция положительной (отрицательной) полуоси, а знак $+$ $(-)$ ставится тогда, когда $\operatorname{Im}z>0$ $(\operatorname{Im}z<0)$.

Доказательство. Поскольку Φf продолжается до целой функции (для каждой финитной $f \in H$), то существование голоморфного продолжения для Mf вытекает непосредственно из (3.20) и (3.22). Далее, в силу равенства Парсеваля для Φ, имеем

$$\tilde{\nu}(\tilde{f}\tilde{a}_z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{a_{\bar z}(t)}\,dt, \tag{3.36}$$

где $\tilde{f} = \Phi f$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$. Следовательно, в силу (3.23) и (3.22)

$$Mf(z) = \left[\tilde{f}(k(z)) - \frac{n}{\omega_-(z)}\tilde{\nu}_-(\tilde{f}\tilde{a}_z)\right]\sqrt{k'(z)} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ik(z)t}dt - \frac{n}{\omega_-(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)\,a_{\bar z}^{+}(t)\,dt}\right]k'(z).$$

Отсюда вытекает (3.34), так как $\overline{k(z)} = k(\bar z)$ и $\overline{n\omega_\pm(\bar z)} = \bar{n}\omega_\mp(z)$.

3.7. ***Лемма.*** *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для произвольной финитной функции* $f \in H$

$$\tilde{\nu}_+(\Phi f\tilde{a}_z) = o(1)\ \left(\tilde{\nu}_-(\Phi f\tilde{a}_z) = o(1)\right) \text{ при } z \to \infty, \tag{3.37}$$

равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant -\varepsilon$ ($\operatorname{Im} z \leqslant +\varepsilon$).

Доказательство. В силу (1.23) существует такое $\lambda \in C$, что $\tilde{h} \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{f} + \lambda\tilde{s} \in D(S)$, где $\tilde{f} \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi f$. Полагая $h \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi^{-1}\tilde{h}$, поэтому имеем $h \in D(\Delta)$ и

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} |\xi\tilde{h}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |h'(x)\,e^{yx}|^2\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x) - \lambda e^{-|x|}|^2 e^{2yx}dx < \infty \tag{3.38}$$

при $|y| < 1$. При достаточно малом $y > 0$

$$\tilde{\nu}_+(\tilde{h}\tilde{a}_z) = \int_{-\infty-iy}^{+\infty-iy} \frac{\tilde{h}(k(\eta))\,k'(\eta)}{\eta - z}\,d\eta, \tag{3.39}$$

так как в достаточно узкой полосе вида $|\operatorname{Im}\eta| \leqslant \delta$ числитель в правой части (3.39) ограничен. Поскольку в силу (3.38) при достаточно малом $y > 0$

$$\int_{-\infty-iy}^{+\infty-iy} |\eta\tilde{h}(k(\eta))\,k'(\eta)|^2\,d\eta < \infty,$$

то для каждого такого y

$$\int_{-\infty-iy}^{+\infty-iy} |\tilde{h}(k(\eta))\,k'(\eta)|^2\,d\eta < \infty. \tag{3.40}$$

Воспользуемся тем, что, если $\varphi \in L_1(R)$, то для каждого $\alpha \geqslant \geqslant 0$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(x-z)^{-1}dx = o(1)$ при $z \to \infty$ равномерно в области $|\operatorname{Im} z| \geqslant 0$ (см., например, [3]). Учитывая это, на основании (3.39) и (3.40) заключаем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{\nu}_+(\tilde{h}\tilde{a}_z) = o(1)$ при $z \to \infty$ равномерно в области $\operatorname{Im} z \geqslant -\varepsilon$. Остается оценить $\tilde{\nu}_+(\tilde{s}\tilde{a}_z)$, а для этого достаточно оценить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\xi \pm i)^{-1}[l(\xi) - z]^{-1} d\xi.$$

Однако так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\xi \pm i)^{-1}(\xi - z)^{-1} d\xi = 2\pi i (z \pm i)^{-1} - O\left(\frac{1}{z}\right),$$

то достаточно оценить разность двух последних интегралов. Но

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi \pm i)[l(\xi) - z]} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi \pm i)(\xi - z)}\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|l(\xi) - \xi|\, d\xi}{|l(\xi) - z| \cdot |\xi - z|} = O\left(|z|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right)$$

при $z \to \infty$ равномерно в некотором секторе вида $\{z = \rho e^{i\varphi} : \rho > 0, -\delta \leqslant \varphi \leqslant \pi + \delta\}$, $\delta > 0$ (см. доказательство следствия 2.15). Аналогичным способом оцениваем $\tilde{\nu}_-(\tilde{\bar{f}}\tilde{a}_z)$.

3.8. ***Лемма.*** *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для произвольной финитной функции* $f \in H^1$

$$(L_z f, f)_+ = o(1) \quad ((L_z f, f)_- = o(1)) \text{ при } z \to \infty \tag{3.41}$$

равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant -\varepsilon$ $(\operatorname{Im} z \leqslant +\varepsilon)$; *при этом* $L_z \overset{\text{df}}{=} (L - z)^{-1}$, *а индексом* $+$ *(индексом* $-$*) отмечено аналитическое продолжение из полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$.

Доказательство. В силу (2.13)

$$(L_z f, f)_+ = \int\limits_{-\infty - iy}^{+\infty - iy} (\eta - z)^{-1} \tilde{f}(k(\eta)) \tilde{f}\,\overline{(\overline{k(\eta)})}\, k'(\eta)\, d\eta - \frac{n}{\omega_+(z)} \tilde{\nu}_+(\tilde{f}\tilde{a}_z)\, \tilde{\nu}_-(\tilde{\bar{f}}\tilde{a}_z),$$

где $\tilde{f} = \Phi f$ и $y > 0$ и достаточно мало. Поэтому наше утверждение вытекает из леммы 3.7.

3.9. **Теорема.** *Оператор M (см. (3.32) или (3.33)) является унитарным отображением пространства $H = L_2(R)$ на себя:*

$$\forall f \in H \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |Mf(x)|^2 dx, \ R(M) = H. \qquad (3.42)$$

Оператор M приводит оператор L к диагональному виду, т. е.,

$$[f \in D(L)] \leftrightarrow \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |xMf(x)|^2 dx < \infty\right]$$

$$\text{и } \forall f \in D(L) \quad MLf(x) = xMf(x). \qquad (3.43)$$

Доказательство. Пусть $f \in H^1$ — произвольная финитная функция. Используя формулу скачка

$$\frac{1}{2\pi i}[L_z f, f)_+ - (L_z f, f)_-] = Mf(z)\overline{Mf(\bar{z})},$$

вытекающую непосредственно из (3.28) и (3.32), и используя оценки (3.41), с помощью стандартной техники контурного интегрирования (см., например, [3]) получим равенство Парсеваля [3.42]. Так как финитные функции из H^1 образуют множество, всюду плотное в H, то это равенство Парсеваля справедливо для всех $f \in H$. Соотношение $R(M) = H$ вытекает из формулы (3.32) и из того, что существует $M^{-1} \in B(H)$ (см. (3.21)). Наконец, соотношения (3.24), (3.43) являются очевидным следствием соотношения (3.22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ, М., «Мир», 1967. 200 с.
2. Лянце В. Э. Разложение по собственным функциям одномерного псевдодифференциального оператора.— ДАН СССР, 1973, т. 213, № 1, с. 38—41.
3. Лянце В. Э. Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра.— «Мат. сб.» 1970, т. 82 (124), № 1 (5), с. 126—156.

Поступила 14 октября 1974 г.