УДК 517.86

М. Г. Любарский

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛЕВИТАНА

Известно несколько эквивалентных определений почти-периодических функций Левитана (Л. п. п. функций), заданных на топологической группе (G, T). Доказательства эквивалентности этих определений, как правило, нетривиальны (см. [1] и [2]). В настоящей заметке предлагается доказательство, которое благодаря использованию теории топологических групп является, по мнению автора, более простым, чем известные ранее.

Основным характеристическим свойством Л. п. п. функций является то, что их можно рассматривать как непрерывные функции на некоторой предкомпактной топологической группе (G, Ω) (теорема Б. Я. Левина [1] — В. А. Марченко [3]). Если исходить из этой теоремы как из определения класса Л. п. п. функций, то естественно построить для произвольной функции φ топологию Ω_φ, в которой φ непрерывна и которая в случае, если φ — Л. п. п. функция, образует с G предкомпактную топологическую группу. Требуя, чтобы эта топология являлась групповой и удовлетворяла тому или иному критерию предкомпактности, мы тем самым накладываем на φ ограничения, которые выполнены тогда и только тогда, когда φ — Л. п. п. функция, т. е. получаем эквивалентные исходному определения класса Л. п. п. функций.

Полученные ниже определения являются наиболее употребительными в теории Л. п. п. функций.

1. Будем исходить из следующего определения класса Л. п. п. функций, заданных на топологической группе (G, T) и отображающих ее в комплексную плоскость C.

Топологию Ω, заданную на группе G, назовем боровской компактификацией топологической группы (G, T), если Ω содержится в топологии T; Ω образует с G топологическую группу; топологическая гпуппа (G, Ω) предкомпактна.

Определение 1. *Функция $\varphi: G \to C$ называется Л. п. п. функцией на группе (G, T), если существует боровская компактификация этой группы, в которой функция φ непрерывна.*

Приведем ряд необходимых сведений из теории топологических групп.

Пусть X и Y — подмножества группы G. Условимся обозначать символом XY множество всех $z \in G$ таких, что $z = xy$ для некоторых $x \in X$ и $y \in Y$. В случае, когда множество X состоит из одного элемента $x \in G$, будем пользоваться записью xY. Множество Y^{-1} определяется как множество таких $y \in G$, что $y^{-1} \in Y$.

Пусть на группе G задана некоторая топология Ω. Топология Ω называется левоинвариантной, если отображение

$$L_a(x) = ax \quad (a \in G, \ x \in G)$$

является гомеоморфизмом топологического пространства (G, Ω) в себя при всех $a \in G$.

Аналогично определяются правоинвариантные топологии. Топологии, являющиеся одновременно лево- и правоинвариантными, будем называть инвариантными.

Множество $U \subset G$ называется окрестностью единицы e, если в U лежит открытое множество, содержащее e.

Топология Ω, заданная на группе G, образует с ней топологическую группу, если отображение

$$i(x, y) = x^{-1}y,$$

действующее из $G \times G$ в G, непрерывно по совокупности переменных x и y в топологии Ω.

Из этого определения следует, что топология, образующая с G топологическую группу, инвариантна. Кроме того, множество ее окрестностей единицы обладает следующим свойством, эквивалентным непрерывности отображения i в точке $(e, e) \in G \times G$:

a) каждой окрестности единицы U можно сопоставить такую окрестность единицы V, что $V^{-1}V \subset U$.

В дальнейшем будет использован следующий очевидный факт.

Лемма 1. *Пусть Ω — инвариантная топология на группе G, и множество ее окрестностей единицы обладает свойством a. Тогда Ω образует с G топологическую группу.*

Рассмотрим два условия, налагаемые на совокупность $\{U\}$ каких-либо подмножеств группы G:

A) каждая направленность $\{x_d\}_{d \in D}$ из G содержит такую поднаправленность $\{x_d\}_{d \in D'}$, что любому множеству $U \in \{U\}$ отвечает индекс $c \in D'$ так, что

$$x_a^{-1}x_b \in U \quad (a, b \in D', \ a, b \succ c);$$

B) каково бы ни было множество $U \in \{U\}$, группу G можно представить в виде объединения конечного числа ее подмножеств $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ таких, что $E_k^{-1}E_k \subset U$ $(k = 1, 2 \ \ldots \ , n)$.

Топологическая группа (G, Ω) называется предкомпактной, если совокупность окрестностей единицы удовлетворяет условиям A или B, которые в этом случае эквивалентны (см., например, [4]).

Последнее утверждение легко обобщается на произвольные подмножества группы.

Лемма 2. *Любая совокупность $\{U\}$ подмножеств группы G одновременно удовлетворяет или не удовлетворяет условиям A и B.*

Доказательство. Зададимся произвольным множеством $U \in \{U\}$ и рассмотрим такие подмножества E группы G, что $E^{-1}E \subset U$. Множество D всех конечных наборов d, состоящих из множеств типа E, направлено соотношением включения: $d_1 \succ d_2$ тогда и только тогда, когда набор d_1 содержит все множества из набора d_2.

Пусть множество U не удовлетворяет требованиям условия B. Тогда никакой набор $d \in D$ не покрывает группу G. Для каждого $d \in D$ выберем элемент $x_d \in G$, не покрытый набором d. Направленность $\{x_d\}_{d \in D}$ обладает тем свойством, что для любого набора $d \in D$ элементы направленности, начиная с некоторого момента, не покрываются набором d.

Если условие A выполнено, то существует поднаправленность $\{x_d\}_{d \in D'}$ такая, что $x_a^{-1}x_b \in U$ $(a, b \in D')$.

Другими словами, набор, состоящий из одного множества $E=\{x_d\}_{d\in D'}$, принадлежит D и содержит сколь угодно далекие элементы направленности $\{x_d\}_{d\in D}$. Полученное противоречие показывает, что из условия A следует условие B.

Предположим, что совокупность $\{U\}$ подмножеств группы удовлетворяет условию B. И пусть $\{x_d\}_{d\in D}$ — произвольная направленность в G. Как известно (см., например [4]), каждая направленность содержит «универсальную» поднаправленность $\{x_d\}_{d\in D'}$, т. е. поднаправленность, которая для любого множества $E\subset G$, начиная с некоторого момента, постоянно находится либо в E, либо в дополнении к E.

Для произвольного множества $U\in\{U\}$ можно указать индекс $c\in D'$, начиная с которого универсальная поднаправленность постоянно находится в одном из множеств $E\in\{E_k\}_{k=1}^n$, отвечающих U в силу свойства B. Поэтому, если $a,\ b\succ c\,(a,\ b\in D')$, то $x_a^{-1}x_b\in$ $\in E^{-1}E\subset U$.

Таким образом выполнение условия B влечет за собой выполнение условия A. Лемма доказана.

Вместо множества всех окрестностей единицы иногда удобно рассматривать их топологическую базу, т. е. такую совокупность $\{V\}$ окрестностей единицы, что какова бы ни была окрестность единицы U, найдется $V\in\{V\}$, удовлетворяющая включению $V\subset U$.

Легко видеть, что условия A, B и a выполняются для множества всех окрестностей единицы в том и только в том случае, если эти условия выполнены для их топологической базы.

2. Пусть φ — произвольная функция, отображающая группу G в комплексную плоскость C. Построим на группе G топологию Ω_φ, наименьшую в классе инвариантных топологий, в которых функция φ непрерывна.

Непрерывность функции φ: $G\to C$ в некоторой топологии Ω эквивалентна тому, что Ω содержит множества вида

$$X(x_0,\ \varepsilon)=\{x\in G: |\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon\}$$

для всех $x_0\in G$ и $\varepsilon>0$. Если топология Ω инвариантна, то вместе с каждым множеством $X(x_0,\ \varepsilon)$ ей принадлежат множества вида

$$x_1X(x_0,\ \varepsilon)\,x_2=\{x\in G: |\varphi(x_1^{-1}xx_2^{-1})-\varphi(x_0)|<\varepsilon\} \tag{2.1}$$

при всех $x_1,\ x_2\in G$.

Всевозможные конечные пересечения и последующие произвольные объединения множества вида (2.1) образуют инвариантную топологию Ω_φ, в которой функция φ непрерывна. Так как любая топология, обладающая этими свойствами, содержит все множества вида (2.1) и, следовательно, их конечные пересечения и произвольные объединения, то Ω_φ является наименьшей среди инвариантных топологий, в которых φ непрерывна.

Лемма 3. *Замкнутые в топологии* Ω_φ *множества*

$$V_{\varepsilon, N} = \{x \in G : \max_{p, q \in N} |\varphi(pxq) - \varphi(pq)| \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ *и* N *— конечный набор элементов группы* G, *образуют топологическую базу окрестностей единицы топологии* Ω_φ.

Доказательство. Так как функция $\varphi_{p, q}(x) = \varphi(pxq) - \varphi(pq)$ непрерывна в топологии Ω_φ, то множество

$$V_{\varepsilon\{p, q\}} = \{x \in G : |\varphi(pxq) - \varphi(pq)| \leqslant \varepsilon\}$$

замкнуто, а его подмножество

$$\{x \in G : |\varphi(pxq) - \varphi(pq)| < \varepsilon\} \subset V_{\varepsilon\{p, q\}},$$

содержащее единицу, открыто. Поэтому каждое такое множество является замкнутой окрестностью единицы. Множество $V_{\varepsilon, N}$ как конечное пересечение множеств $V_{\varepsilon, \{p, q\}}$ $(p, q \in N)$ также является замкнутой окрестностью единицы.

Остается проверить, что произвольная окрестность U единицы содержит множество вида $V_{\varepsilon, N}$. Это утверждение достаточно доказать в том случае, когда U является множеством вида (2.1). Действительно, так как пересечение конечного числа множеств снова принадлежит этому классу, то доказываемое утверждение будет справедливо для окрестностей единицы, являющихся конечным пересечением множеств вида (2.1). Но по построению топологии Ω_φ любое открытое множество является объединением множеств этого типа.

Итак, можно положить

$$U = \{x \in G : |\varphi(x_1^{-1} x x_2^{-1}) - \varphi(x_0)| < \varepsilon_0\} \quad (x_0, x_1, x_2 \in G, \varepsilon_0 > 0).$$

Так как U по предположению содержит единицу, то выбрав $x = e$, придем к неравенству

$$|\varphi(x_1^{-1} x_2^{-1} - \varphi(x_0)| = \delta < \varepsilon_0.$$

Положим $\varepsilon < \varepsilon_0 - \delta$ и $N = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$. Тогда любой элемент $x \in V_{\varepsilon, N}$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x_1^{-1} x x_2^{-1}) - \varphi(x_1^{-1} x_2^{-1})| \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0 - \delta$$

и, следовательно,

$$|\varphi(x_1^{-1} x x_2^{-1}) - \varphi(x_0)| \leqslant |\varphi(x_1^{-1} x x_2^{-1}) - \varphi(x_1^{-1} x_2^{-1})| + \\ + |\varphi(x_1^{-1} x_2^{-1}) - \varphi(x_0)| < \varepsilon_0 - \delta + \delta = \varepsilon_0.$$

Последнее неравенство означает, что $x \in U$. Таким образом, $V_{\varepsilon, N} \subset U$, и лемма доказана.

Элементы множества $V_{\varepsilon, N}$ в теории Л. п. п. функций принято называть ε, N-смещениями функции φ.

Если система окрестностей каждой точки топологического пространства имеет базу, состоящую из замкнутых множеств, то соответствующая топология называется регулярной. Из леммы 3 вытекает, в силу инвариантности топологии Ω_φ, следующее утверждение.

Лемма 4. *Топология Ω_φ регулярна.*

3. **Топологическая теорема.** *Пусть на группе G задана регулярная инвариантная топология Ω. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *топология Ω образует с группой G предкомпактную топологическую группу;*

2) *окрестности единицы топологии Ω удовлетворяют условию A;*

3) *окрестности единицы топологии Ω удовлетворяют условию B.*

Доказательство. В силу леммы 2 последние утверждения теоремы эквивалентны и по определению предкомпактности топологической группы следуют из первого. Остается доказать, что, например, из последнего утверждения вытекает первое.

Предположим, таким образом, что база $\{V\}$ окрестностей единицы топологии Ω, состоящая из замкнутых множеств, обладает свойством B и покажем, что в этом случае она удовлетворяет условию a. Тогда по лемме 1 топология Ω образует с G топологическую группу, которая оказывается предкомпактной, так как выполнен критерий предкомпактности B.

Пусть $U \in \{V\}$ и множества $\{E_k\}_{k=1}^n$, объединение которых совпадает с G, удовлетворяют включению

$$E_k^{-1}E_k \subset U \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Обозначим через E' множества из $\{E_k\}_{k=1}^n$, замыкание которых содержит единицу, а через E'' — оставшиеся множества. Объединение замыканий множеств типа E'' замкнуто и не содержит единицы. Поэтому дополнение W к этому множеству является окрестностью единицы и покрывается множествами типа E':

$$W \subset \bigcup E'. \tag{3.2}$$

Учитывая инвариантность топологии Ω и замкнутость окрестности U, из (3.1) получим

$$(E')^{-1}\overline{(E')} \subset \overline{U} = U,$$

и так как $\overline{(E')}$ по определению содержит единицу, то

$$(E')^{-1} \subset U.$$

Вместе с (3.2) это включение приводит к следующему:

$$W^{-1} \subset (\bigcup E')^{-1} = \bigcup (E')^{-1} \subset U, \tag{3.3}$$

где W в силу регулярности топологии Ω можно считать замкнутой окрестностью единицы.

Пусть теперь множества $\{E_k\}_{k=1}^n$ выбраны так, что любое из них удовлетворяет включению

$$E^{-1}E \subset W.$$

Отсюда, как и раньше, следует

$$E^{-1}\overline{E} \subset \overline{W} = W.$$

Переходя к обратным элементам, получим

$$(\overline{E})^{-1}E \subset W^{-1}$$

и, следовательно,

$$(\overline{E})^{-1}\,\overline{E} \subset (\overline{W^{-1}}). \tag{3.4}$$

Пусть X_1 произвольное открытое в топологии Ω множество. Если $\overline{E_1}$ не содержит X_1, то множество $X_2 = C\overline{E}_1 \cap X_1$, где символ C обозначает дополнение, не пусто, открыто и покрывается оставшимися множествами $\{E_k\}_{k=2}^n$. Повторяя это рассуждение $n-1$ раз, придем к выводу, что по крайней мере одно из множеств $\overline{E} \subset \{\overline{E}_k\}_{k=1}^n$ содержит открытое множество X.

Выберем произвольно $x \in X$. Из инвариантности топологии Ω следует, что $x^{-1}X$ есть окрестность единицы. Поэтому существует окрестность $V \in \{V\}$ такая, что $V \subset x^{-1}X$. Имеем

$$V^{-1}V \subset (x^{-1}X)^{-1}(x^{-1}X) = X^{-1}X \subset \overline{E}^{-1}\overline{E}.$$

Учитывая включения (3.3) и (3.4), получим

$$V^{-1}V \subset (\overline{E})^{-1}(\overline{E}) \subset (\overline{W^{-1}}) \subset \overline{U} = U,$$

что в силу произвольности выбора $U \in \{V\}$ совпадает со свойством a. Теорема доказана.

Следствие. *Если* φ: $(G, T) \to C$ *непрерывная функция, то следующие три утверждения эквивалентны:*

I) *топология* Ω_φ *является боровской компактификацией группы* (G, T);

II) *множества* ε, N*-смещений функции* φ *удовлетворяют условию* A;

III) *множества* ε, N*-смещений функции* φ *удовлетворяют условию* B.

Доказательство. Применим предыдущую теорему к топологии Ω_φ. По определению эта топология инвариантна и в силу леммы 4 регулярна. Ясно, что в случае топологии Ω_φ последние два утверждения теоремы совпадают соответственно с двумя последними утверждениями следствия. Остается показать, что первые утверждения теоремы и следствия также совпадают.

Из определения следует, что если Ω_φ является боровской компактификацией (G, T), то она образует с G предкомпактную топологическую группу.

Обратно, если Ω_φ образует с G предкомпактную топологическую группу, то Ω_φ является боровской компактификацией (G, T) в том случае, если она содержится в топологии T. Но по определению Ω_φ — наименьшая среди инвариантных топологий, в которых φ непрерывна. Топология T как групповая топология инвариантна, и функция φ по предположению непрерывна в ней. Поэтому T содержит Ω_φ.

Замечание. Из доказанного следствия вытекает, что непрерывная функция $\varphi: (G, T) \to C$, удовлетворяющая II или III, является Л. п. п. функцией. Обратное утверждение также справедливо.

Действительно, если φ — Л. п. п. функция, и Ω — отвечающая ей в силу определения 1 боровская компактификация группы (G, T), то из включения $\Omega \subset T$ следует непрерывность функции φ в топологии T, а из включения $\Omega_\varphi \subset \Omega$ — справедливость утверждений II и III.

4. Основываясь на замечании предыдущего пункта, можно дать два определения класса Л. п. п. функций, эквивалентных определению 1. Однако с целью получить формально более слабые условия, чем II или III, рассмотрим множества правых ε, N-смещений функции φ, т. е. множества вида

$$R_{\varepsilon, N} = \{x \in G : \max_{s \in N} |\varphi(sx) - \varphi(s)| \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ и N конечный набор элементов группы.

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в пункте 2, легко показать, что множества $R_{\varepsilon, N}$ образуют топологическую базу окрестностей единицы наименьшей левоинвариантной топологии Ω_φ^L, в которой функция φ непрерывна.

Рассмотрим наименьшую топологию, которая вместе с каждым множеством $X \in \Omega_\varphi^L$ содержит множество aXa^{-1} при любом $a \in G$. С одной стороны ясно, что определенная таким образом топология совпадает с Ω_φ, с другой стороны, конечные пересечения множеств вида $aR_{\varepsilon, N}a^{-1}$ образуют топологическую базу ее окрестностей единицы. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Множества вида*

$$\bigcap_{a \in M} aR_{\varepsilon, N}a^{-1},$$

где M — конечный набор элементов группы; $R_{\varepsilon, N}$ — множество правых ε, N-смещений функции φ, образуют топологическую базу окрестностей единицы топологии Ω_φ.

Лемма 6. *Для того, чтобы множества ε, N-смещений функции φ обладали свойствами A или B, необходимо и достаточно, чтобы этими свойствами обладали множества правых ε, N-смещений функции φ.*

Доказательство. Так как системы множеств $\{R_{\varepsilon, N}\}$ и $\{V_{\varepsilon, N}\}$ образуют базы окрестностей единицы соответственно топологий

Ω_φ^L и T, то необходимость условия леммы следует из включения $\Omega_\varphi^L \subset \Omega_\varphi$. Докажем достаточность этого условия.

Пусть множества $R_{\varepsilon, N}$ обладают свойствами A и B. Тогда для любого $R_{\varepsilon, N}$ группу G можно представить в виде объединения конечного числа ее подмножеств $\{E_k\}_{k=1}^n$ таких, что $E_k^{-1}E_k \subset R_{\varepsilon, N}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Для произвольного $a \in G$ рассмотрим множества $\varepsilon_k = E_k a^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ясно, что объединение этих множеств покрывает группу и

$$\varepsilon_k^{-1}\varepsilon_k = (E_k a^{-1})^{-1}(E_k a^{-1}) = aE_k^{-1}E_k a^{-1} \subset aR_{\varepsilon, N}a^{-1}.$$

Таким образом, множества вида $aR_{\varepsilon, N}a^{-1}$ также обладают свойством B и эквивалентным ему в силу леммы 2 свойством A.

Далее ясно, что совокупность всех конечных пересечений множеств вида $a\,R_{\varepsilon, N}a^{-1}$ обладает свойством A, а значит, и свойством B. Но по лемме 5 указанный класс множеств образует топологическую базу окрестностей единицы топологии Ω_φ. Поэтому свойствами A и B обладают все окрестности единицы этой топологии.

Лемма доказана.

Из этой леммы и замечания к следствию топологической теоремы вытекает эквивалентность определения 1 и следующих двух определений класса Л. п. п. функций.

Определение 2. *Непрерывная функция* $\varphi : (G, T) \to C$ *называется Л. п. п. функцией на группе* (G, T), *если каждая направленность* $\{x_d\}_{d \in D}$ *содержит поднаправленность* $\{x_d\}_{d \in D'}$ *такую, что каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и конечное множество* $N \subset G$, *можно указать индекс* $d \in D'$ *так, что элемент группы* $x_a^{-1}x_b$ $(a, b \in D')$ *является правым* ε, N-*смещением функции* φ *для всех* $a, b \succ d$.

Определение 3. *Непрерывная функция* $\varphi : (G, T) \to C$ *называется Л. п. п. функцией на группе* (G, T), *если для любых* $\varepsilon > 0$ *и конечного множества* $N \subset G$ *группу* G *можно представить в виде объединения конечного числа ее подмножеств* $\{E_k\}_{k=1}^n$ *таких, что* $E_k^{-1}E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *состоит из правых* ε, N-*смещений функции* φ.

Все утверждения этого пункта остаются в силе, если заменить правые ε, N-смещения функции φ левыми. В частности, определения 2 и 3 перейдут в эквивалентные.

Определение типа 3 — самое первое определение Л. п. п. функций на числовой оси — было предложено Б. М. Левитаном [5] и в несколько ином виде, чем здесь, сформулировано А. Райхом [2] для произвольных топологических групп.

Определение типа 2 было предложено Б. Я. Левиным [1], что позволило впервые рассмотреть Л. п. п. функции на топологических группах. В приведенном здесь виде определение 2 сформулировано А. Райхом [2].

Автор благодарен *Б. Я. Левину* за ряд ценных советов и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. О почти-периодических функциях Левитана. — «Укр. мат. журн.», 1949, № 1, с 49—100.
2. Reich. A. Die vorkompacten Gruppen und das Fastperiodizität. — «Math. Z», 1970. v. 116, p. 218—234.
3. Марченко В. А. Применение методов суммирования обобщенных рядов Фурье. — «Зап. научно-иссл. ин-та мат. и мех. Харьк. гос. ун-та», 1950, т. 20, с. 3—32.
4. Кэлли Дж. Л. Общая топология. М, «Наука», 1968. 120 с.
5. Левитан Б. М. Новое обобщение почти-периодических функций Г. Бора. — «Зап. Харьк. ин-та мат. и мат. об-ва», 1938, т. 15. с. 41—48.

Поступила 10 мая 1974 г.