УДК 517.55

В. Н. Логвиненко

О МЕРАХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ЭКВИВАЛЕНТНУЮ НОРМУ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Через C^n обозначим n-мерное линейное комплексное пространство векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_j \in C^1$, $1 \leqslant j \leqslant n$; через R^n - вещественную гиперплоскость в C^n. Через $K_h(x)$ обозначим гиперкуб $\{y \in R^n : \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j| \leqslant h\}$, через $dx = dx_1 \ldots dx_n$ — элемент объема в R^n.

Пусть заданы борелевская мера $d\mu$ в R^n, число $\sigma \in (0, \infty)$ и число $p \in [1, \infty)$. Через $W^p_{\sigma, n}(d\mu)$ обозначим линейное пространство целых функций $f(z)$, заданных в C^n, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{|z_1| + \cdots + |z_n| \to \infty} \{(|z_1| + \cdots + |z_n|)^{-1} \ln |f(z)|\} \leqslant \sigma$$

и принадлежащих пространству $L^p(R^n, d\mu)$. $W^p_{\sigma, n}(d\mu)$ наделяется полунормой

$$\|f\|_{W^p_{\sigma, n}(d\mu)} = \{\int\limits_{R^n} |f(x)|^p d\mu(x)\}^{1/p}.$$

Для пространства $W^p_{\sigma, n}(dx)$ используется более простое обозначение $W^p_{\sigma, n}$. $W^p_{\sigma, n}$ — банахово пространство.

Следуя В. Я. Лину [1], будем называть борелевскую меру, заданную в R^n, (σ, p)-определяющей, если существуют такие величины $C_1 = C_1(\sigma, p)$ и $C_2 = C_2(\sigma, p)$ $(0 < C_1 \leqslant C_2 < \infty)$, что для любой функции $f \in W^p_{\sigma, n}$ выполняется неравенство

$$C_1 \|f\|_{W^p_{\sigma, n}} \leqslant \|f\|_{W^p_{\sigma, n}(d\mu)} \leqslant C_2 \|f\|_{W^p_{\sigma, n}}.$$

Мера $d\mu$ в R^n называется p-определяющей, если она (σ, p)-определяющая при любом $\sigma \in (0, \infty)$. Если мера p-определяющая при любом $p \in [1, \infty)$, то ее называют определяющей.

Если мера $d\mu$ в R^n (σ, p)-определяющая при каких-либо σ и p, то существуют такие числа $h > 0$ и $M < \infty$, что при любом $x \in R^n$

$$\mu(K_h(x)) \leqslant M. \tag{1}$$

В этой работе рассматриваются лишь такие меры, для которых выполняется условие (1).

Задачу об описании $(\sigma, 2)$-определяющих мер в R^n поставил в 1965 году В. Я. Лин [1], но ее частный случай, когда мера $d\mu = X_E(x)\,dx$, где $X_E(x)$ — характеристическая функция измеримого множества $E \subset R^n$, изучался ранее Б. П. Панеяхом. Б. П. Панеях [2, 3] показал, что при любом натуральном n относительная плотность по мере Лебега[1] множества $E \subset R^n$ есть необходимое условие того, что мера $X_E(x)\,dx$ является $(\sigma, 2)$-определяющей, и того, что эта мера 2-определяющая. Однако достаточность этого условия была установлена им лишь при $n = 1$. В работе автора и Ю. Ф. Середы [4] было доказано, что и при $n > 1$ необходимое условие, найденное Б. П. Панеяхом, является достаточным для того, чтобы мера $X_E(x)\,dx$ была определяющей. Таким образом, необходимое и достаточное условие того, что $X_E(x)\,dx$, $x \in R^n$ является определяющей, формируется одинаково для всех натуральных n.

Ситуация меняется при переходе к общим борелевским мерам. Так, при $n = 1$ В. Я. Лин [1] показал, что необходимым и достаточным условием того, что непрерывная в бесконечности[2] мера $d\mu$ 2-определяющая, является плотность[3] этой меры. Это утверждение становится ложным при $n > 1$.

Пример 1. Пусть в R^2 задана мера

$$d\mu = \sum_{k \in Z \setminus \{0\}} \delta(x_1 - k)\,dx_2 + dx_1 \delta(x_2 - k).$$

Легко видеть, что эта мера непрерывна на бесконечности и плотна, но не является $(\pi, 2)$-определяющей, так как для функции $f(z) = \sin \pi z_1 \sin \pi z_2 / (z_1 z_2)$ имеем

$$\int_{R^2} \left| \frac{\sin \pi x_1}{x_1} \cdot \frac{\sin \pi x_2}{x_2} \right|^2 d\mu(x) = 0.$$

---

[1] Множество $E \subset R^n$ называется относительно плотным по мере Лебега, если существуют такие числа $h < \infty$ и $\delta > 0$, что для любого $x \in R^n$ выполняется

$$\mathrm{mes}_n\,(K_h(x) \cap E) \geqslant \delta$$

($\mathrm{mes}_n\,F$ — лебегова мера измеримого множества $F \subset R^n$).

[2] Борелевская мера $d\mu$ в R^n называется непрерывной в бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $N < \infty$ что для любого $x \overline{\in} K_N(0)$ имеем $\mu(K_\delta(x)) < \varepsilon$.

[3] Мера $d\mu$ в R^n называется плотной, если существуют такие $h < \infty$ и $\delta > 0$, что для любого $x \in R^n$ выполняется

$$\mu(K_h(x)) \geqslant \delta.$$

Кроме того, само определение (σ, p)-определяющей меры обладает некоторыми недостатками. Во-первых, пространство $W^p_{\sigma, n}(d\mu)$ может не быть нормированным, а значит, может не быть изоморфным банахову пространству $W^p_{\sigma, n}$. Как следует из одной теоремы Б. Я. Левина, сформулированной, например, в [4], такая ситуация невозможна для мер $\mathrm{X}_E(x)\,dx$ в R^n.

Пример 2. Определим меру $d\mu$ в R^1:

$$d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k).$$

Эта мера $(\pi, 2)$-определяющая, но $\sin \pi z \in W^2_{\pi, 1}(d\mu)$ и $\|\sin \pi z\|_{W^2_{\pi, 1}(d\mu)} = 0$.

Во-вторых, если мера $d\mu$ в R^n является (σ, p)-определяющей, то мера $d\mu_R$ $(\mu_R(E) = \mu(E \setminus K_R(0))$ для любого борелевского множества $E \subset R^n)$ таковой может не быть. Это также невозможно для меры $\mathrm{X}_E(x)\,dx$ в R^n.

Пример 3. Возьмем меру $d\mu$ из примера 2. Мера $d\mu_{1/2}$ не является $(\pi, 2)$-определяющей, так как

$$\left\| \frac{\sin \pi z}{z} \right\|_{W^2_{\pi, 1}(d\mu_{1/2})} = 0.$$

Желая избавиться от обоих этих недостатков, несколько сузим класс рассматриваемых мер.

Определение. *Мера $d\mu$, заданная в R^n, принадлежит классу $N(\sigma, p)$, если $W^p_{\sigma, n}$ и $W^p_{\sigma, n}(d\mu)$ — изоморфные банаховы пространства.*

Используя уже упоминавшийся результат Б. Я. Левина и результаты работы [4], легко показать, что если мера $\mathrm{X}_E(x)\,dx$ в R^n является (σ, p)-определяющей при каких-то σ и p, то

$$\mathrm{X}_E(x)\,dx \in \bigcap_{\sigma \in (0, \infty),\ p \in [1, \infty)} N(\sigma, p).$$

Теорема 1. *Если $W^p_{\sigma, n}(d\mu)$ — банахово пространство, совпадающее как линейное пространство с $W^p_{\sigma, n}$, то $d\mu \in N(\sigma, p)$.*

Ясно, что из принадлежности классу $N(\sigma, p)$ меры $d\mu$, заданной в R^n, вытекает, что эта мера (σ, p)-определяющая. Оказывается, что любая (σ, p)-определяющая мера принадлежит классам $N(\tau, p)$ при всех достаточно малых τ. Вот точная формулировка этого результата.

Теорема 2. *Пусть q — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам*

$$q > en, \ q > \frac{e^2}{2}\left\{\max_{0 \leq \tau \leq 2}\left[e^{\tau}\left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)^q\right]^{n-1}\right\}. \qquad (2)$$

Если мера $d\mu$ в R^n является (σ, p)-определяющей, то

$$d\mu \in N(\sigma/(2q), p).$$

Доказательство этой теоремы основано на аппроксимационном методе, развитом в работах [5, 6].

Следствие. *Определяющая мера* $d\mu \in \bigcap_{\sigma \in (0, \infty),\, p \in [1, \infty)} N(\sigma, p)$.

Следующая теорема оправдывает введение классов $N(\sigma, p)$.

Теорема 3. *Если мера $d\mu$, заданная в R^n, принадлежит классу $N(\sigma, p)$, то при любом $R < \infty$ мера $d\mu_R \in N(\sigma, p)$.*

Введем для мер $d\mu$ в R^n следующую характеристику:

$$\Gamma_\mu(\sigma, p) = \inf\{\|f\|_{W^p_{\sigma, n}(d\mu)} / \|f\|_{W^p_{\sigma, n}},\ f \in W^p_{\sigma, n} \setminus \{0\}\}.$$

$\Gamma_\mu(\sigma, p) > 0$ тогда и только тогда, когда мера $d\mu$ (σ, p)-определяющая.

Элементарные свойства введенной характеристики содержатся в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $d\mu$ — (σ, p)-определяющая мера в R^n, а y произвольный вектор R^n. Определим меру $d\mu_y$ так: $\mu_y(E) = \mu(E - y)$ для любого борелевского множества $E \subset R^n$. Тогда мера $d\mu_y$ также является (σ, p)-определяющей и*

$$\Gamma_{\mu_y}(\sigma, p) = \Gamma_\mu(\sigma, p).$$

Пусть $\lambda \in R^1 \setminus \{0\}$. Определим меру $d_\lambda\mu$ следующим образом: ${}_\lambda\mu(E) = \mu(\lambda E)$ для любого борелевского множества $E \subset R^n$. Тогда $d_\lambda\mu$ — $(\sigma/|\lambda|, p)$ — определяющая мера и $\Gamma_{\lambda\mu}(\sigma/|\lambda|, p) = |\lambda|^{-n/p}\Gamma_\mu(\sigma, p)$.

Для меры $d\mu = X_E(x)\,dx$, $x \in R^n$ величину $\Gamma_\mu(\sigma, p)$ обозначают через $\Gamma(E; \sigma, p)$. Пусть заданы мера $d\mu$ в R^n, число $\varepsilon > 0$, число $\eta < \infty$ и число $R \in [0, \infty)$. Проделаем следующее построение. Разобьем пространство R^n на гиперкубы J_k, $k = 1, 2, \ldots$ с ребрами длины η, параллельными координатным осям, причем сделаем это так, чтобы точка O была вершиной одного из гиперкубов. Выберем теперь те из гиперкубов J_k, для которых $\mu(J_k) \geqslant \varepsilon$. Пусть индексы, соответствующие выбранным гиперкубам, образуют множество $I = I_\varepsilon$. Положим

$$\Gamma_\mu(R, \eta, \varepsilon; \sigma, p) = \Gamma(\bigcup_{k \in I} J_k \cup K_R(0);\ \sigma, p).$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 5. *Пусть в пространстве R^n задана мера $d\mu$. Если для каких-нибудь $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $R < \infty$ выполняется неравенство*

$$\Gamma_\mu(R, \eta, \varepsilon; \sigma, p) > \eta\sigma\sqrt{n^3}\left(\frac{(n+1)!\,2^n}{\pi^n}\right)^{1/2}\left(\frac{e^{\sigma\eta p} - 1}{\sigma\eta p}\right)^{n/p}, \tag{3}$$

то $d\mu \in N(\sigma/(2q), p)$, где q — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам (2), и является (σ, p)-определяющей.

Продемонстрируем силу теоремы 5 на примере (известном, впрочем, и ранее (см. [1])).

Пример 4. Пусть мера $d\mu$, заданная в пространстве R^1, порождается монотонно неубывающей функцией $\mu(x)$, для которой при некотором $a > 0$ выполняется асимптотика

$$\mu(x) = ax + o(1), \quad |x| \to \infty.$$

Тогда $d\mu$ является определяющей мерой. В самом деле, каково бы ни было число $\eta > 0$, полагая $\varepsilon = a\eta/2$, мы можем гарантировать существование такого $R < \infty$, что

$$\bigcup_{k \in I} J_k \bigcup K_R(0) = R^1.$$

Следовательно, $\Gamma_\mu(R, \eta, \varepsilon; \sigma, p) = 1$ для любых σ и p. Но при любых заданных σ и p можно выбрать $\eta > 0$ таким малым, чтобы правая часть (3) при этих σ и p и $n = 1$ была меньше 1. Наше утверждение, таким образом, вытекает из теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лин В. Я. Об эквивалентных нормах в пространстве суммируемых с квадратом целых функций экспоненциального типа. — «Мат. сб.», 1965, т. 67 (109), № 4, с. 568—608.
2. Панеях Б. П. О некоторых теоремах типа Палея—Винера. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, с. 47—50.
3. Панеях Б. П. О некоторых задачах гармонического анализа. — ДАН СССР, 1962, т. 142, № 5, с. 1026—1029.
4. Логвиненко В. Н., Середа Ю. Ф. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 20, Харьков, 1974, с. 62—78.
5. Логвиненко В. Н. Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 3, с. 546—549.
6. Логвиненко В. Н. Теоремы типа теоремы М. Картрайт и вещественные множества единственности для целых функций многих комплексных переменных. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 22, Харьков, 1975, с. 85—100.

Поступила 18 февраля 1974 г.