УДК 513.88

К. Д. Кюрстен

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ А. ПИЧА. I

В связи с подготовкой к изданию монографии «Теория операторных идеалов» А. Пич [1] поставил ряд вопросов. В этой заметке будут даны отрицательные ответы на следующие вопросы (определения см. ниже).

1. Являются ли числа Колмогорова и аппроксимационные числа регулярными идол-функциями? Выполняются ли равенства

$$a_n(S) = a_n(S^*),$$
$$d_n(S) = c_n(S^*)$$

для каждого оператора S?

2. Известно, что числа Колмогорова, числа Гельфанда и аппроксимационные числа оператора S связаны неравенствами

$$a_n(S) \leqslant cn^{1/2} d_n(S),$$
$$a_n(S) \leqslant cn^{1/2} c_n(S).$$

Можно ли получить показатель меньше, чем $^1/_2$ в правых частях этих неравенств?

Обозначения и определения. Множество линейных непрерывных операторов, отображающих банахово пространство E в банахово пространство F, обозначается $L(E, F)$. Если M есть подпространство пространства E, то оператор вложения M в E обозначим I_M^E. Фактор — отображение E на E/M обозначим Q_M^E. Каноническое вложение E в E^{**} обозначим I_E.

Размерность пространства M, коразмерность подпространства M в E, размерность образа линейного оператора S обозначаются соответственно через $\dim M$, $\operatorname{codim} M$, $\dim S$.

Через $\operatorname{lin} X$ будем обозначать линейную оболочку подмножества $X \subset E$. Элементы пространств последовательностей l_p или c_0 обозначаются через $x = (x(k))_1^\infty$, $y = (y(k))_1^\infty$, ...

$$l_p^n = \{x \in l_p;\quad x(k) = 0 \text{ для } k > n\}.$$

Определение 1. *Функция α, сопоставляющая каждому линейному ограниченному оператору S значение $\alpha(S) \in [0;\ \infty]$,* *называется идол-функцией, если для любого произведения операторов RST выполняется неравенство*

$$\alpha(RST) \leqslant \|R\| \alpha(S) \|T\|.$$

Определение 2. *Идол-функция называется регулярной, если для любого оператора $S \in L(E, F)$*

$$\alpha(S) = \alpha(I_F S).$$

Определение 3. *Для каждого оператора $S \in L(E, F)$ и для $n = 1, 2, \ldots$ определим:*

а) аппроксимационные числа:

$$a_n(S) = \inf\{\|S - A\|; \quad A \in L(E, F), \dim A < n\};$$

в) числа Колмогорова

$$d_n(S) = \inf\{\|Q_N^F S\|; \quad N \subset F, \quad \dim N < n\};$$

с) числа Гельфанда

$$c_n(S) = \inf\{\|S I_N^E\|; \quad M \subset E, \quad \operatorname{codim} M < n\}.$$

Нетрудно доказать, что введенные числа являются идол-функциями.

1. Аппроксимационные числа и числа Колмогорова не регулярны.

Лемма 1. *Для любого оператора S*

$$d_n(S) \leqslant a_n(S) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Доказательство. По определению 3 для любого положительного числа ε найдется такой оператор A, $\dim A < n$, что выполняется неравенство

$$a_n(S) + \varepsilon \geqslant \|S - A\|.$$

С помощью образа оператора A оценивается $d_n(S)$:

$$d_n(S) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \inf_{y} \|Sx - Ay\| \leqslant$$
$$\leqslant \|S - A\| \leqslant a_n(S) + \varepsilon.$$

Теорема 1. *Для $n \geqslant 2$ идол-функции a_n и d_n* не регулярны.

Доказательство. Пусть S — оператор, отображающий l_1 в c_0 согласно формуле $(Sx)k = x(k)$. Покажем, что для этого оператора

$$d_n(S) \geqslant 1, \quad a_n(I_{c_0} S) \leqslant \frac{1}{2} \quad (n > 1). \tag{2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $N \subset c_0$, $\dim N < n$, $\|Q_N^{c_0} S\| \leqslant d_n(S) + \varepsilon$. В силу конечномерности пространства N найдется натуральное число k_0 такое, что для всех $y \in N$

$$|y(k_0)| < \varepsilon \|y\|. \tag{3}$$

Возьмем $x_0 \in l_1$, $x_0(k) = \delta_{kk_0}$ (т. е. координатный орт e_{k_0}) и проведем следующую оценку:

$$\begin{aligned} d_n(S) + \varepsilon &\geqslant \| Q^c_N S \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Q^c_N S x \| \geqslant \\ &\geqslant \| Q^c_N S x_0 \| = \inf \{ \| S x_0 - y \|; \quad y \in N \} = \\ &= \inf \{ \| S x_0 - y \|; \quad y \in N, \quad \| y \| \leqslant 2 \} \geqslant \\ &\geqslant \inf \{ | x_0(k_0) - y(k_0) |; \quad y \in N, \quad \| y \| \leqslant 2 \} \geqslant 1 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε получаем $d_n(S) \geqslant 1$. Введем теперь одномерный оператор $A : l_1 \to l_\infty$, действующий согласно формуле

$$(Ax)(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x(i).$$

С его помощью проведем оценку $a_n(I_{c_0} S)$:

$$\begin{aligned} a_n(I_{c_0} S) &\leqslant \| I_{c_0} S - A \| \leqslant \sup \{ \| I_{c_0} S x - Ax \|; \quad \| x \| \leqslant 1 \} \leqslant \\ &\leqslant \sup_k \sup \left\{ \left| x(k) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x(i) \right|; \ \| x \| \leqslant 1 \right\} \leqslant \\ &\leqslant \sup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} | x(i) |; \quad x \in l_1, \quad \| x \| \leqslant 1 \right\} \leqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом неравенства (2) установлены. Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$d_n(S) \neq d_n(I_{c_0} S), \quad a_n(S) \neq a_n(I_{c_0} S),$$

что и доказывает теорему.

Следствие. *Если $n \geqslant 2$, то существуют операторы, для которых равенства*

$$a_n(S) = a_n(S^*), \tag{4}$$
$$d_n(S) = c_n(S^*) \tag{5}$$

не выполняются.

Доказательство. Пусть α — идол-функция. Докажем, что выражение $\alpha(S^*)$ определяют регулярную идол-функцию от S:

$$\alpha((RST)^*) = \alpha(T^* S^* R^*) \leqslant \| T^* \| \alpha(S^*) \| R^* \| = \| T \| \alpha(S^*) \| R \|,$$
$$\alpha(S^*) = \alpha(S^* (I_F)^* I_{F^*}) \leqslant \| I_{F^*} \| \alpha((I_F S)^*) \leqslant \alpha(S^*) \| (I_F)^* \|,$$
$$\alpha(S^*) = \alpha((I_F S)^*).$$

(Мы использовали тот факт, что $(I_F)^* I_{F^*}$ есть единичный оператор [2]). В частности, формулами $a_n(S^*)$ и $c_n(S^*)$ определяются регулярные идол-функции. Из выполнения соотношений (4) и (5) следовало бы, что $a_n(S)$ и $d_n(S)$ — регулярные идол-функции. Но это противоречило бы теореме 1.

2. Неравенства между числами Гельфанда, числами Колмогорова и аппроксимационными числами

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением нормированных пространств над полем вещественных чисел.

Пусть для $k = 1, 2, \ldots 2^n$ вектор $(a_{k1}, \ldots a_{kn})$ пробегает всевозможные наборы чисел 0 и 1. В пространстве l_∞^m $(m = 2^n)$ рассматриваем n векторов, определенных согласно формуле

$$x_i(k) = (-1)^{a_{ki}}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \tag{1}$$

В дальнейшем будем отождествлять пространство l_1^n с $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots \ldots x_n\}$ и будем считать, что $l_1^n \subset l_\infty^m$. В [3] доказывается, что для каждого оператора P, проектирующего l_∞^m на l_1^n, выполняется соотношение

$$\| P \| \geqslant c_1 n^{1/2}, \tag{2}$$

где c_1 — положительная константа, не зависящая ни от P, ни от n Пусть B — единичный шар в l_∞^m и пусть B_1 есть симметрическая выпуклая оболочка множества $\{x_1, \ldots x_n\} \cup n^{-1/2} B$. Взяв в качестве единичного шара множество B_1, получим новое банахово пространство E. Для удобства обозначаем $l_\infty^m = F$. Алгебраически тождественное отображение E в F обозначается через S_n.

Лемма 2. *Для операторов* S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *имеют место соотношения*

$$d_{n+1}(S_n) \leqslant n^{-1/2}, \tag{3}$$

$$c_{n+1}(S_n^*) \leqslant n^{-1/2}. \tag{4}$$

Доказательство. Из определения 3 следует, что

$$d_{n+1}(S_n) \leqslant \sup_{x \in B_1} \inf \{\| S_n x - y \|; \quad y \in l_1\} \leqslant n^{-1/2}.$$

Для доказательства неравенства (4) достаточно показать

$$d_{n+1}(S_n) = c_{n+1}(S_n^*). \tag{5}$$

В силу рефлексивности пространства F уравнением

$$(Q_N^F S_n)^* = S_n^n I_M^{F^*}$$

определяется взаимнооднозначное соответствие множеств подпространств

$$\{N \subset F; \quad \dim N < n + 1\} \to \{M \subset F^*; \quad \operatorname{codim} M < n + 1\}.$$

Из определения 3 и из равенства

$$\| (Q_N^F S_n)^* \| = \| Q_N^F S_n \|$$

следует (5). Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых положительных чисел* c_2 *и* δ *существует натуральное число* n_0 *такое, что для* $n > n_0$ *выполняются соотношения*

$$a_{n+1}(S_n) \geqslant c_2 n^{-\delta}, \tag{6}$$

$$a_{n+1}(S_n^*) \geqslant c_2 n^{-\delta}. \tag{7}$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$a_{n+1}(S_n) = a_{n+1}(S_n^*). \tag{8}$$

В силу рефлексивности пространств E и F отображение φ, определенное формулой $\varphi(A) = A^*$, есть взаимнооднозначное отображение множеств

$$\{A \in L(E, F); \quad \dim A < n+1\} \to$$
$$\to \{A \in L(F^*, E^*); \quad \dim A < n+1\}.$$

Воспользовавшись равенством $\| S_n - A \| = \| S_n^* - A^* \|$ и определением 3, получаем (8).

Пусть n_0 такое число, что для $n > n_0$

$$c_2 n^{-\delta} < \frac{1}{2}, \quad n^{-1/2} + c_2 n^{-\delta} < \frac{1}{2} c_1. \tag{9}$$

Допустим, что лемма 3 не верна. Тогда, в силу (8), найдется такое натуральное число $n > n_0$, что $a_{n+1}(S_n) < c_2 n^{-\delta}$. Следовательно, можно найти оператор $R \in L(E, F)$ такой, что $\dim R \leqslant n$ и что выполняется неравенство

$$\| R - S_n \| < c_2 n^{-\delta}. \tag{10}$$

При этом можно предполагать, что $\dim R = n$. Проверим, что для $x \in l_1^n$

$$\| S_n^{-1} x \| \leqslant \| x \|. \tag{11}$$

Из определения множества B_1 и из (1) следует

$$\left\| S_n^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i S_n^{-1} x_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|.$$

Применяя (9), (10) и (11) для $x \in l_1^n$, получим

$$\| S_n S_n^{-1} x - R S_n^{-1} x \| \leqslant \| S_n - R \| \, \| S_n^{-1} x \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \| x \|, \quad \| S_n S_n^{-1} x \| = \| x \|.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Ker}(R S_n^{-1}) \cap l_1^n = \{0\}.$$

Кроме того,

$$\dim \operatorname{Ker}(RS_n^{-1}) + \dim l_1^n = m.$$

Мы можем определить проектор P на l_1^n вдоль $\operatorname{Ker}(RS_n^{-1})$, т. е. $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker}(RS_n^{-1})$. Для всех $x \in F$ имеет место равенство

$$RS_n^{-1}x = RS_n^{-1}Px.$$

Используя (10), (11) и (9), получим оценку

$$\|Px - RS_n^{-1}x\| = \|(S_n - R)\, S_n^{-1}Px\| \leqslant$$
$$\leqslant \|S_n - R\|\,\|S_n^{-1}Px\| \leqslant c_2 n^{-\delta}\|Px\| \leqslant \frac{1}{2}\|P\|\,\|x\|,$$
$$\|P - RS_n^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|P\|. \tag{12}$$

(Мы использовали $Px \in l_1^n$ и, следовательно, по (11) $\|S_n^{-1}Px\| \leqslant \leqslant \|Px\|$).

Оценим еще норму оператора $P - RS_n^{-1}$ снизу

$$\|P - RS_n^{-1}\| = \|RS_n^{-1} - I + I - P\| \geqslant$$
$$\geqslant \|P\| - 1 - \|R - S_n\|\,\|S_n^{-1}\| \quad (I = S_nS_n^{-1}).$$

Замечая, что в силу включения $n^{1/2}B_1 \supset B$ выполняется неравенство $\|S_n^{-1}\| \leqslant n^{1/2}$, и применяя неравенства (10), (9) и (2), получим

$$\|P - PS_n^{-1}\| \geqslant \|P\| - 1 - c_2 n^{1/2-\delta} >$$
$$> \|P\| - \frac{1}{2}c_1 n^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}\|P\|.$$

Это неравенство противоречит (12), что и доказывает лемму.

Теорема 2. *Если α и c такие вещественные числа, что для всех натуральных чисел n и для всех операторов S выполняются соотношения*

$$a_n(S) \leqslant cn^{\alpha}d_n(S) \tag{13}$$
$$(\textit{или } a_n(S) \leqslant cn^{\alpha}c_n(S)),$$

то $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

Доказательство. Допустим, что $\alpha < \frac{1}{2}$. В неравенство (13) поставим оператор S_{n-1}:

$$a_{n+1}(S_n) \leqslant c\,(n+1)^{\alpha}\, d_{n+1}(S_n).$$

Полагаем $\delta = \frac{1}{2} - \alpha$, $c_2 = 1 + c \sup\limits_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}$ и воспользуемся леммой 2:

$$a_{n+1}(S_n) < c_2 n^{-\delta}.$$

Это противоречит лемме 3. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Выражаю благодарность профессору *М. И. Кадецу* за руководство и оказанную помощь при оформлении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pietsch. Theorie der Operatorenideale (Zusammenfassung). Friedrish — Schiller — Universität Jena, 1972, S. 46—48.
2. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 99 с.
3. Даугавет И. К. Некоторые приложения обобщенного тождества Марцинкевича — Бермана.— «Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат. и мех.», 1968, т. 19 : 4, с. 59—64.

Поступила 17 мая 1974 г.