УДК 519.21

Л. С. Кудина

НЕРАЗЛОЖИМЫЕ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Вероятностное распределение P в R^n $(n \geqslant 2)$ будем называть радиально симметричным (р. с.), если оно инвариантно относительно поворотов вокруг некоторой точки $a = a(P) \in R^n$ $(n \geqslant 2)$.

Носителем распределения P называется множество $S(P)$ всех $y \in R^n$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$P(\{x: |y - x| < \varepsilon\}) > 0.$$

Распределение P_1 называется компонентой распределения P, если существует такое распределение P_2, что $P = P_1 \ast P_2$.

Распределение P называется неразложимым, если из представления его в виде $P = P_1 \ast P_2$, где P_1 и P_2 — некоторые распределения, следует, что либо распределение P_1, либо распределение P_2 сосредоточено в одной точке [1, с. 11].

Характеристическая функция (х. ф.) для р. с. распределения P (с $a(P)=0$) имеет представление [2, с. 244]

$$\varphi(t;\ P)=\int\limits_0^\infty \theta_n(r^2x^2)\,d\sigma(x). \tag{1}$$

Здесь

$$t=(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)\in R^n,\quad r^2=t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2,$$
$$\theta_n(z)=\Gamma(n/2)\,(2/\sqrt{z})^{(n-2)/2}J_{(n-2)/2}(\sqrt{z}),$$
$$\sigma(x)=P(\{y\in R^n:|y|<x\}),$$

$J_\alpha(z)$ — функция Бесселя порядка α.

2°. В настоящей работе изучаются признаки неразложимости р. с. распределений, а также свойства множества неразложимых распределений.

В работе будут существенно использованы следующие результаты.

Теорема А. *Пусть* $P=P_1\divideontimes P_2$, *где* P_1 *и* P_2 — *р. с. распределения в* R^n $(n\geqslant 2)$, $a(P_1)=a(P_2)=a(P_2)=0$. *Тогда характеристическая функция распределения* P *имеет вид*

$$\varphi(t;\ P)=\int\limits_0^\infty \theta_n(r^2x_3^2)\left\{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K_n(x_1,\ x_2,\ x_3)\,d\sigma_1(x_1)\,d\sigma(x_2)\right\}x_3^{n-1}\,dx_3, \tag{2}$$

где $\sigma_j(x)=P_j(\{y:|y|<x\})$, *а* $K_n(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — *функция, определенная в октанте* $\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\colon x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0\}$ *следующим образом: в области* $Q=\{2\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}x_j<x_1+x_2+x_3\}$ *дается равенством*

$$K_n(x_1,\ x_2,\ x_3)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{h-3}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\frac{\left\{\left[x_3^2-(x_1-x_2)^2\right]\left[(x_1+x_2)^2-x_3^2\right]\right\}^{(n-3)/2}}{(x_1x_2x_3)^{n-2}}, \tag{3}$$

а вне указанной области она равна 0.

Эта теорема принадлежит И. В. Островскому [3, 4].

Теорема В. *Пусть р. с. распределение* P *удовлетворяет условию*

$$P(\{x\in R^n:|x|>r\})=O(\exp\{-Lr^2\}),\quad \forall L>0,\ r\to\infty. \tag{4}$$

Тогда все его компоненты р. с.

Следствие. *Если р. с. распределение имеет ограниченный носитель, то все его компоненты являются р. с.*

Эта теорема получена в нашей работе [5].

3°. Следующая теорема является необходимым условием разложимости или — что то же самое — достаточным условием неразложимости р. с. распределения с ограниченным носителем.

Теорема 1. *Пусть P — р. с. распределение в R^n $(n \geqslant 2)$ с ограниченным носителем; ρ — радиус наименьшего шара, содержащего носитель. Если распределение P разложимо, то его можно представить в виде*

$$P = \alpha G + \beta H,$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, G — р. с. распределение, сосредоточенное в шаре радиуса строго меньшего ρ, а H — абсолютно непрерывное р. с. распределение, плотность которого $h(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{|x|>r} h(x)\,dx = O\left((\rho - r)^{(n-1)/2}\right), \quad r \to \rho - 0. \tag{5}$$

При $n \geqslant 4$ можно утверждать, что плотность $h(x)$ непрерывна при $x \neq 0$ и выполняется

$$h(x) = O\left((\rho - |x|)^{(n-3)/2}\right), \quad |x| \to \rho - 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $P = P_1 \ast P_2$, где P_1 и P_2 — распределения, не сосредоточенные в одной точке. В силу следствия теоремы В распределения P_1 и P_2 являются р. с. Обозначим через ρ_1 и ρ_2 радиусы наименьших шаров, содержащих носители P_1 и P_2 соответственно; очевидно, $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

Так как всякое р. с. распределение с $a(P) = 0$ может иметь атом только в нуле, то распределения P_1 и P_2 можно представить в виде

$$P_j = \alpha_j D_j + \beta_j F_j, \quad j = 1,\ 2,\ \alpha_j \geqslant 0,\ \beta_j > 0,\ \alpha_j + \beta_j = 1,$$

где D_j — р. с. распределения, сосредоточенные в шаре радиуса $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}\min(\rho_1, \rho_2)$, F_j — непрерывные р. с. распределения, сосредоточенные вне этого шара.

Имеем

$$P = P_1 \ast P_2 = \alpha_1\alpha_2 D_1 \ast D_2 + \alpha_1\beta_2 D_1 \ast F_2 + \alpha_2\beta_1 F_1 \ast D_2 + \\ + \beta_1\beta_2 F_1 \ast F_2.$$

Положим

$$H = F_1 \ast F_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha = 1 - \beta.$$

Если $\alpha = 0$, то в качестве G возьмем произвольное р. с. распределение, сосредоточенное в шаре радиуса строго меньшего ρ. Если $\alpha \neq 0$, то положим

$$G = \frac{1}{\alpha}\left[\alpha_1\alpha_2 D_1 \ast D_2 + \alpha_1\beta_2 D_1 \ast F_2 + \alpha_2\beta_1 F_1 \ast D_2\right].$$

Очевидно, распределение G сосредоточено в шаре радиуса $\lambda + \max(\rho_1, \rho_2) < \rho$.

Перейдем к изучению свойств распределения H. Применяя формулу (2) с $\sigma_j(x) = F_j(\{y \in R^n : |y| < x\})$, получаем

$$\varphi(t;\ H) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \theta_n(r^2 x_3^2) \left\{ \int\limits_0^{\rho_1} \int\limits_0^{\rho_2} K_n(x_1,\ x_2,\ x_3)\, d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2) \right\} x_3^{n-1}\, dx_3. \quad (7)$$

С другой стороны, из (1) имеем

$$\varphi(t;\ H) = \int\limits_0^\rho \theta_n(r^2 x^2)\, d\sigma(x), \quad (8)$$

где $\sigma(x) = H(\{y \in R^n : |y| < x\})$. Сравнивая (7) и (8), заключаем, что распределение H абсолютно непрерывно и его плотность $h(x)$ имеет вид

$$h(x) = \frac{1}{S_n} \int\limits_0^{\rho_1} \int\limits_0^{\rho_2} K_n(x_1,\ x_2,\ |x|)\, d\sigma_1(x)\, d\sigma_2(x), \quad (9)$$

где S_n — площадь поверхности единичной n-мерной сферы.

При $n \geqslant 4$ функция $K_n(x_1,\ x_2,\ x_3)$ непрерывна по совокупности своих переменных при $0 < \lambda \leqslant x_1 \leqslant \rho_1$, $0 < \lambda \leqslant x_2 \leqslant \rho_2$, $x_3 \neq 0$. Отсюда следует, что при $n \geqslant 4$ плотность $h(x)$ непрерывна при $x \neq 0$.

Обозначим через $Q(|x|)$ часть прямоугольника $\lambda \leqslant x_1 \leqslant \rho_1$, $\lambda \leqslant x_2 \leqslant \rho_2$, ограниченную прямыми $x_1 + x_2 = |x|$, $x_1 - x_2 = \pm |x|$. Из определения функции $K_n(x_1,\ x_2,\ |x|)$ следует, что эта функция равна нулю вне $Q(|x|)$, а в $Q(|x|)$ она дается формулой (3) с заменой x_3 на $|x|$. Поэтому выражение (9) для $h(x)$ можно переписать в виде

$$h(x) = \frac{A_n}{|x|^{n-2}} \iint\limits_{Q(|x|)} \{[|x|^2 - (x_1 - x_2)^2][(x_1 + x_2)^2 - |x|^2]\}^{(n-3)/2} \times$$
$$\times \frac{d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2)}{(x_1 x_2)^{n-2}}, \quad (10)$$

где

$$A_n = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{n-2}\pi^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что число $\Lambda = \max(\rho_1,\ \rho_2) + \varepsilon$ удовлетворяет неравенству $\Lambda < \rho$. При $\Lambda < |x| < \rho$ в области $Q(|x|)$ справедливы оценки

$$2\varepsilon \leqslant |x| \pm (x_2 - x_1) \leqslant 2\rho, \quad \Lambda \leqslant |x| + x_1 + x_2 \leqslant 2\rho,$$
$$\lambda \leqslant x_1, \quad \lambda \leqslant x_2.$$

Поэтому из (10) следует оценка

$$h(x) \leqslant D \iint\limits_{Q|(x)|} (x_1 + x_2 - |x|)^{(n-3)/2}\, d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2), \tag{11}$$

где D — постоянная, не зависящая от x.

Пусть $n \geqslant 3$. Так как в $Q(|x|)$ имеем $|x| \leqslant x_1 + x_2 < \rho$, то из (11) получаем

$$h(x) \leqslant D \iint\limits_{Q(|x|)} (\rho - |x|)^{(n-3)/2}\, d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2) \leqslant D(\rho - |x|)^{(n-3)/2}.$$

Тем самым оценка (6) доказана. Из (6), очевидно, следует справедливость (5) при $n \geqslant 3$.

Рассмотрим случай $n = 2$. В этом случае оценка (11) выглядит так:

$$h(x) \leqslant D \iint\limits_{Q(|x|)} \frac{d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2)}{\sqrt{x_1 + x_2 - |x|}}.$$

Предполагая, что $|x| > \Lambda$, отсюда получим

$$h(x) \leqslant D \iint\limits_{Q(\Lambda)} \frac{d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2)}{\sqrt{x_1 + x_2 - |x|}}.$$

Интегрируя по слою $r < |x| < \rho$, где $r > \Lambda$, имеем

$$\iint\limits_{r \leqslant |x| < \rho} h(x)\, dx = 2\pi \int_r^\rho h(t)\, t\, dt \leqslant 2\pi\rho \int_r^\rho h(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant D \iint\limits_{Q(\Lambda)} d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2) \left[\int_r^\rho \frac{dt}{\sqrt{x_1 + x_2 - |t|}}\right]. \tag{12}$$

(Перестановка порядка интегрирования законна в силу теоремы Фубини, так как подынтегральные функции неотрицательны). Так как для любого a, $(-\infty < a < \infty)$ имеем

$$\int_r^\rho \frac{dt}{\sqrt{|a - t|}} \leqslant 4\sqrt{\rho - r},$$

то из (12) вытекает справедливость (5) при $n = 2$. Теорема доказана.

Заметим, что оценка (5) точна в смысле порядка. В этом легко убедиться, рассмотрев композицию двух равномерных распределений на сферах $\{|x| = \rho_1\}$ и $\{|x| = \rho_2\}$.

В случае неограниченного носителя р. с. распределения аналогично получается следующая теорема.

Теорема 2. *Если разложимое р. с. распределение P удовлетворяет условию (4), то его можно представить в виде*

$$P = \alpha G + \beta H,$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, G — р. с. распределение, а H — абсолютно непрерывное р. с. распределение с неограниченным носителем.

Для р. с. распределений, разложимых на р. с. распределения, утверждение сохраняет силу и без требования выполнения условия (4).

4°. С помощью теорем 1 и 2 докажем для р. с. распределений теоремы, аналогичные результатам работ [6, 7, 9].

Теорема 3. *Пусть A — непустое замкнутое р. с. множество в R^n. Тогда множество неразложимых р. с. распределений, носители которых совпадают с A, является плотным в смысле слабой сходимости во множестве всех р. с. распределений, носители которых совпадают с A.*

Доказательство. Пусть сначала A — ограниченное замкнутое р. с. множество, ρ — радиус наименьшего шара, содержащего A. Обозначим через T — равномерное распределение на сфере $\{|x| = \rho\}$. Тогда любое р. с. распределение P с $S(P) = A$ является пределом последовательности $\{P_m\}$, где

$$P_m = \left(1 - \frac{1}{m}\right) P + \frac{1}{m} T.$$

Очевидно, $S(P_m) = A$. Согласно теореме 1, распределения P_m — неразложимы.

В случае если A неограничено, можно считать, что р. с. распределение P содержит абсолютно непрерывную часть с неограниченным носителем, так как в противном случае неразложимость сразу следует из теоремы 2. Пусть B_m — множество на луче $(m, +\infty)$, определенное равенством

$$B_m = \{r : r = |x| \geqslant m, \quad x \in A\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$\{r_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ — счетное плотное в B_m множество, $\{C_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность чисел, удовлетворяющих условиям

$$C_k^{(m)} > 0, \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(m)} = P(\{x : |x| > m\}), \qquad \sum_{r_k^{(m)} > r} C_k^{(m)} =$$
$$= O(\exp\{-Lr^2\}), \quad \forall L \geqslant 0.$$

Обозначим через $T^{(m)}$ меру

$$T^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(m)} T_k^{(m)},$$

где $T_k^{(m)}$ — равномерное распределение на сфере $\{|x| = r_k^{(m)}\}$.

Последовательность распределений $\{P_m\}$ зададим так:

$$P_m(E) = P(E \cap \{|x| \leqslant m\}) + T^{(m)}(E).$$

Для распределений P_m имеем $S(P_m) = A$. Абсолютно непрерывная часть у них сосредоточена в шаре $\{|x| \leqslant m\}$, поэтому согласно теореме 2 распределения P_m неразложимы. Очевидно, распределения P_m при $m \to \infty$ слабо сходятся к распределению P.

Заметим, что теорема 3 включает в себя следующие два утверждения.

Теорема 4. *Для любого р. с. замкнутого множества A существует неразложимое р. с. распределение, носитель которого равен A.*

Теорема 5. *Множество неразложимых р. с. распределений плотно в топологии слабой сходимости во множестве всех р. с. распределений.*

Теорему 3 можно дополнить следующим образом.

Теорема 6. *Множество неразложимых р. с. абсолютно непрерывных распределений плотно в метрике*

$$d(P_1, P_2) = \int_{R^n} |p_1(x) - p_2(x)|\, dx \tag{13}$$

(где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — плотности распределений P_1 и P_2 соответственно) во множестве всех абсолютно непрерывных распределений.

Доказательство. Пусть P — абсолютно непрерывное р. с. распределение с плотностью $p(x)$. Обозначим через P_m, $m = 1, 2, \ldots$ абсолютно непрерывные распределения с плотностями

$$p_m(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) p(x), & |x| \leqslant m - \dfrac{1}{m}, \\ \dfrac{\gamma_m}{(m - |x|)^{3/4}}, & m - \dfrac{1}{m} < |x| < m, \\ 0, & |x| \geqslant m, \end{cases}$$

где γ_m — положительные постоянные, выбираемые из условия $\int_{R^n} p_m(x)\, dx = 1$. В силу теоремы 2, распределения P_m — неразложимы. Очевидно, что последовательность распределений P_m сходится в метрике (13) к распределению P.

5°. Обозначим через U_{nk} распределение в R^n, являющееся проекцией на R^n равномерного распределения на единичной сфере в R^{n+k}, $k \geqslant 0$ (по определению, считаем, что U_{n0} — равномерное распределение на сфере в R^n).

Теорема 7. *Если $0 \leqslant k \leqslant n - 2$, то распределение U_{nk} неразложимо.*

Доказательство. При $k = 0$ утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1, поскольку распределение U_{n0} не имеет абсолютно непрерывной части. Для доказательства теоремы при $k \geqslant 1$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если $k \geqslant 1$, то распределение U_{nk} абсолютно непрерывно и его плотность $u_{nk}(x)$ при $|x| \geqslant 1$ равна 0, а при $|x| < 1$ дается формулой*

$$u_{nk}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)(1-|x|^2)^{(k-2)/2}}{\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \tag{14}$$

Доказательство леммы. Обозначим через P_{n+k} равномерное распределение на единичной сфере в R^{n+k}. Применяя формулу (1) с заменой n на $n+k$, получаем следующее выражение для х. ф. распределения:

$$\varphi(t;\ P_{n+k}) = \varphi(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k};\ P_{n+k}) =$$
$$= \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{(n+k-2)/2} J_{(n+k-2)/2}(r), \quad t \in R^{n+k}, \tag{15}$$

где $r = \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_n^2 + t_{n+1}^2 + \cdots + t_{n+k}^2}$. Полагая в формуле (15) $t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_{n+k} = 0$ и учитывая, что

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n;\ U_{nk}) = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, 0, \ldots, 0;\ P_{n+k}),$$

получаем

$$\varphi(t;\ U_{nk}) = \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{(n+k-2)/2} J_{(n+k-2)/2}(r), \quad t \in R^n, \tag{16}$$

где $r = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2}$.

Воспользуемся следующей формулой Н. Я. Сонина [8, с. 62, п. 34]:

$$J_{\mu+\nu+1}(aq) = \frac{q^{\nu+1}}{2^\nu a^{\mu+\nu+1}\Gamma(\nu+1)} \int_0^a J_\mu(qx)\, x^{\mu+1}(a^2 - x^2)^\nu\, dx$$
$$(\operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}\nu > -1).$$

Полагая в ней

$$a = 1, \quad \mu = \frac{n-2}{2}, \quad \nu = \frac{k-2}{2}, \quad q = r,$$

получим

$$J_{(n+k-2)/2}(r) = \frac{r^{k/2}}{2^{(k-2)/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^1 J_{(n-2)/2}(rx)(1-x^2)^{(k-2)/2} x^{\frac{n}{2}}\, dx.$$

Следовательно, выражение (16) для $\varphi(t;\ U_{nk})$ можно представить в виде

$$\varphi(t;\ U_{nk}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)2^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)r^{(n-2)/2}} \int_0^1 J^{(n-2)/2}(rx)(1-x^2)^{(k-2)/2}\, x^{n/2}\, dx. \tag{17}$$

С другой стороны, обозначая

$$\sigma_{nk}(x) = U_{nk}(\{y : |y| < x\})$$

из (1) получаем

$$\varphi(t;\ U_{nk}) = \int\limits_0^\infty \theta_n(r^2x^2)\,d\sigma_{nk}(x) =$$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{(n-2)/2}\int\limits_0^\infty x^{-(n-2)/2}J_{(n-2)/2}(rx)\,d\sigma_{nk}(x). \qquad (18)$$

Сравнивая выражения (17) и (18), заключаем, что функция $\sigma_{nk}(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{d\sigma_{nk}(x)}{dx} = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1-x^2)^{(k-2)/2}x^{n-1}, \quad 0 \leqslant x < 1, \qquad (19)$$

$$\frac{d\sigma_{nk}(x)}{dx} = 0, \quad x > 1.$$

Выражение (14) для $u_{nk}(x)$ получаем из правой части (19), заменяя x на $|x|$ и деля на $S_n|x|^{n-1}$, где $S_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ — площадь поверхности единичной сферы в R^n. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 7 заметим, что плотность $u_{nk}(x)$ не удовлетворяет условию

$$\int\limits_{|x|>r} u_{nk}(x)\,dx = O\left((1-|x|)^{(n-1)/2}\right), \quad |x| \to 1-0,$$

если $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Поэтому неразложимость распределения U_{nk} вытекает из теоремы 1.

Теорема 8. *При $n \geqslant 3$ равномерное распределение в n-мерном эллипсоиде неразложимо.*

Доказательство. Так как с помощью аффинного преобразования равномерное распределение в эллипсоиде сводится к равномерному распределению в единичном шаре, то теорему достаточно доказать для единичного шара. Лемма показывает, что равномерное распределение в n-мерном шаре совпадает с U_{n2}.

Если $n \geqslant 4$, то применяя теорему 7 с $k = 2$, заключаем, что распределение U_{n2} неразложимо.

Остается рассмотреть случай $n = 3$. Предположим, что распределение U_{32} разложимо. По следствию из теоремы B все его компоненты являются р. с. Пусть $U_{32} = P_1 \ast P_2$, где P_1 и P_2 — р. с., не сосредоточенные в одной точке распределения, и $a(P_1) = a(P_2) = 0$. Обозначим через ρ_1 и ρ_2 — радиусы наименьших шаров, содержащие носители P_1 и P_2; очевидно, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Полагая $\sigma_j = P_j(\{y : |y| < x\})$ и пользуясь формулой

(9) с $n=3$, заключаем, что плотность $u_{32}(x)$ представляется в виде

$$u_{32}(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\rho_1} \int\limits_0^{\rho_2} K_3(|x|, x_1, x_2)\, d\sigma_1(x)\, d\sigma_2(x_2).$$

Из определения функции K_3 следует, что если $\max(\rho_1, \rho_2) < |x| < 1$, то функция $K_3(|x|, x_2, x_3)$ отлична от нуля лишь в части $Q(|x|)$ прямоугольника $0 \leqslant x_1 \leqslant \rho_1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \rho_2$, лежащей в полуплоскости $x_1 + x_2 > |x|$, и в этой части она дается формулой (3), которая при $n=3$ выглядит так:

$$K_3(|x|, x_2, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,|x|\,x_1 x_2}.$$

Отсюда следует, что

$$u_{32}(x) = \frac{1}{8\pi^{3/2}\,|x|} \iint\limits_{Q(|x|)} \frac{d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2)}{x_1 x_2}. \tag{20}$$

Очевидно, что при возрастании $|x|$ множество $Q(|x|)$ сужается, поэтому в правой части (20) стоит строго убывающая функция от $|x|$. Это противоречит тому, что $u_{32}(x) \equiv \text{const}$. Теорема доказана.

Замечание. При $n=1$ утверждение теоремы 8 не имеет места; хорошо известно [1, с. 117], что равномерное распределение на отрезке разложимо. Верно ли утверждение теоремы 8 при $n=2$, нам выяснить не удалось. Из следствия теоремы B следует, что если равномерное распределение в единичном круге разложимо, то все его компоненты являются р. с.

Приношу благодарность *И. В. Островскому* за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
2. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961, 310 с.
3. Островский И. В. Описание класса I_0 в специальной полугруппе вероятностных мер.— ДАН СССР, 1973, т. 209, № 4, с. 788—791.
4. Островский И. В. Описание класса I_0 в одной специальной полугруппе вероятностных мер.— «Труды ФТИНТ АН УССР. Мат., физика и функц. анализ», 1973, вып. 4, с. 3—12.
5. Кудина Л. С. О компонентах радиально симметричных распределений. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 25, Харьков, 1976, с. 37—44.
6. Кудина Л. С. О замыкании множества неразложимых распределений с фиксированным спектром.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 17, Харьков, 1973, с. 51—56.
7. Кудина Л. С. Неразложимые законы с наперед заданным спектром. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16, Харьков, 1972, с. 206—212.

8. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М., ГТТИ, 1954. 244 с.
9. Parthasarathy K. R., Rao R. R., Varadhan S. R. On the category of indecomposable distributions on topological groups.— "Trans. of the Amer. Math. Soc.", 1962, vol. 102, № 2, p. 200—217.

Поступила 14 декабря 1974 г.