УДК 517.5+517.53

Ш. И. Калиман

ГОЛОМОРФНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ НАКРЫВАЮЩАЯ ПРОСТРАНСТВА ПОЛИНОМОВ БЕЗ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Пусть G_n — пространство полиномов без кратных корней, степени n, с комплексными коэффициентами, старший из которых равен 1. Его универсальная накрывающая $\tilde{G}_n$ топологически эквивалентна открытому шару в $2n$-мерном вещественном евклидовом пространстве [1]. Вместе с тем, $\tilde{G}_n$ обладает естественной комплексной структурой, исследование которой также представляет интерес.

Через E_n будем обозначать пространство $\{(z_1, \ldots, z_n) \in C^n \mid z_l \neq z_j\}$. Сопоставление каждому вектору $(z_1, \ldots, z_n) \in E_n$ полинома с корнями $z_1, \ldots, z_n$ делает E_n $n!$-листной гомоморфной накрывающей пространства G_n. Поэтому $\tilde{E}_n = \tilde{G}_n$. Преобразование

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) \to \left(z_1, z_2 - z_1, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \ldots, \frac{z_n - z_1}{z_2 - z_1}\right)$$

переводит E_n в прямое произведение $C \times \{C \setminus (0)\} \times M_{n-2}$, где

$$M_{n-2} = \{(z_1, \ldots, z_{n-2}) \in C^{n-2} \mid z_j \neq 0,\ 1;\ z_j \neq z_l\}.$$

Таким образом, $\tilde{E}_n = C^2 \times M_{n-2}$ и изучение $\tilde{C}_n$ свелось к изучению $\tilde{M}_{n-2}$. Поскольку M_1 совпадает с комплексной прямой C без двух точек $\{0, 1\}$, $\tilde{M}_1$ можно считать открытым единичным кругом. Отправляясь от этого очевидного случая, Е. А. Горин поставил вопрос: будет ли $\tilde{M}_n$ биголоморфно эквивалентно ограниченной области в C^n. В настоящей работе доказано, что ответ положителен, причем $\tilde{M}_n$ отождествляется с некоторым пространством Тейхмюллера. Идея об использовании пространства Тейхмюллера заимствована у Гриффитса [2]. Эта техника, по-видимому, еще не очень популярная, полезна и в других задачах комплексного анализа. Поэтому по предложению Е. А. Горина в статье подробно излагаются необходимые для доказательства факты о квазиконформных отображениях и пространствах Тейхмюллера.

1. Предварительные сведения

Содержащаяся в этом параграфе информация изложена в книгах [3] и [4].

Пусть U и U' — области на комплексной прямой C. Гомеоморфизм $\varphi: U \to U'$ называют k-квазиконформным $(0 \leqslant k < 1)$, если функция φ имеет обобщенные интегрируемые производные, удовлетворяющие неравенству $|\varphi_{\bar{z}}| \leqslant k |\varphi_z|$, т. е. определена функция $\mu_\varphi = \varphi_{\bar{z}} / \varphi_z$ такая, что $\mu_\varphi \in L^\infty(U)$ и $\|\mu_\varphi\|_\infty \leqslant 1$.

Если φ — квазиконформно, то φ^{-1} — тоже квазиконформно. Если $\varphi_1: U \to U'$, $\varphi_2: U' \to U''$ и отображения φ_j — квазиконформны, то таковым же будет и суперпозиция $\varphi_2 \circ \varphi_1$, причем коэффициент k квазиконформности $\varphi_2 \circ \varphi_1$ связан с коэффициентами k_j функций φ_j следующим образом:

$$\frac{1+k}{1-k} \leqslant \frac{1+k_1}{1-k_1} \cdot \frac{1+k_2}{1-k_2}. \tag{1}$$

Для конформного отображения f функция $\mu_f = 0$. Верно и обратное.

Лемма 1. *Если φ — квазиконформно и $\mu_\varphi = 0$ почти всюду, то φ — конформно.*

Для функции $\mu_{g \circ f}$ верно следующее равенство:

$$\mu_{g^\circ f} = \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_{g \circ f}} \cdot \frac{f_z}{\bar{f}_z} = \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_{g \circ f}} \cdot \frac{f_z^2}{|f_z|^2}. \tag{2}$$

Отсюда, если f — конформно, то $\mu_g \circ f = \mu_{g \circ f} \cdot \frac{f_z^2}{|f_z|^2}$, а если g — конформно, то $\mu_{g \circ f} = \mu_f$.

Будем говорить, что функция $\mu(t, z) \in L^\infty(U)$ голоморфно зависит от параметра t, если $\mu(t, z)$ голоморфно по t почти для всех $z \in U$. Из этого определения и из формулы (2) вытекает следующий факт: если g — квазиконформное отображение, h_1 и h_2 — конформные, а f_t — семейство квазиконформных отображений таких, что μ_{f_t} голоморфно зависит от t и имеют смысл суперпозиции $f_t \circ g$ и $h_1 \circ f_t \circ h_2$, то $\mu_{f_t \circ g}$ и $\mu_{h_1 \circ f_t \circ h_2}$ также голоморфны по t.

Теорема Мори. *Пусть φ — k-квазиконформное отображение открытого единичного круга D на себя такое, что $\varphi(0) = 0$; тогда*

$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|<16|z_1-z_2|^{\frac{1-k}{1+k}}$, *причем константа 16 не может быть уменьшена.*

Следствие 1. *Отображение φ продолжается до гомеоморфизма замкнутых кругов.*

Лемма 2. *Пусть $\mu\in L^\infty(C)$ и $\|\mu\|_\infty<1$. Тогда существует единственное отображение $f^\mu: C\to C$ такое, что f^μ оставляет неподвижными точки 0, 1 и ∞, для которого $\mu_{f^\mu}=\mu$. Такое f^μ назовем нормированным.*

Следствие 2. *Пусть $\mu\in L^\infty(H)$, где H — верхняя полуплоскость и $\|\mu\|_\infty<1$. Тогда существует единственное нормированное отображение $f^\mu: H\to H$ такое, что оно оставляет на месте 0, 1 и ∞, и для которого $\mu_{f^\mu}=\mu$.*

Для доказательства достаточно продолжить μ на нижнюю полуплоскость H^* по формуле $\hat{\mu}(z)=\overline{\mu(\bar{z})}$ и рассмотреть функцию $f^{\hat{\mu}}: C\to C$. О действии f^μ на 0, 1 и ∞ имеет смысл говорить, так как f^μ продолжается на границу по следствию теоремы Мори.

Лемма 3. *Если $\mu(t, z)\in L^\infty(C)$ голоморфно зависит от параметра t, то нормированное семейство $f^{\mu(t)}$ также голоморфно по t.*

Заметим, что для функций $\mu(t, z)\in L^\infty(H)$ мы уже не можем говорить о голоморфной зависимости $f^{\mu(t)}$ по t, поскольку функции $\hat{\mu}(t)$ из следствия после леммы 2 не голоморфны по t. Но если продолжить μ нулем на нижнюю полуплоскость H^*, то мы получим голоморфное по t семейство квазиконформных отображений $f_{\mu(t)}$, оставляющее на месте 0, 1 и ∞ и отображающее H в некоторую область, зависящую от t.

Перейдем теперь к рассмотрению гиперболических римановых поверхностей S, т. е. таких, для которых H является универсальной накрывающей, а преобразования наложения образуют дискретную подгруппу Γ группы Ω всех дробно-линейных преобразований H. В этом случае $S=H/\Gamma$ (орбиты), и каноническое отображение $\pi: H\to H/\Gamma$ является комплексно-аналитической проекцией. Каждое непрерывное отображение $f: S_0\to S$ порождает накрывающее отображение $\tilde{f}: H\to H$ такое, что $\pi\circ\tilde{f}=f\circ\pi_0$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\tilde{f}} & H \\ {\scriptstyle\pi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S_0 & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Отображение $\tilde{f}$ порождает гомоморфизм группы Γ_0 в группу Γ, задаваемый формулой

$$A\circ\tilde{f}=\tilde{f}\circ A_0, \tag{3}$$

где $A_0\in\Gamma_0$ и $A\in\Gamma$, Если f — гомеоморфизм, то это отображение будет изоморфизмом.

Отображение f назовем k-квазиконформным, если таковым будет $\tilde{f}$.

Определим пространство Тейхмюллера $T(S_0)$. Рассмотрим все пары (S, f) где S — риманова поверхность, а f — сохраняющее ориентацию квазиконформное отображение S_0 на S. Введем эквивалентность: $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$, если $f_2 \circ f_1^{-1}$ гомотопно в классе непрерывных отображений конформному отображению S_1 на S_2, Получаемые классы эквивалентности называются точками пространства Тейхмюллера. В качестве расстояния между классами, содержащими (S_1, f_1) и (S_2, f_2), берется величина $\log \frac{1+k}{1-k}$, где k — наименьший коэффициент квазиконформности для отображений, гомотопных $f_2 \circ f_1^{-1}$. Таким образом, $T(S_0)$ становится метрическим пространством (неравенство треугольника следует из формулы (1)).

Пусть g — квазиконформное отображение S_0 на S; тогда отображение $(S, f) \to (S, f \circ g)$ устанавливает изометрию пространств $T(S_0)$ и $T(S)$.

Ограничимся рассмотрением компактных римановых поверхностей рода g с m выколотыми точками, для которых $3g - 3 + m > 0$ (хотя теорема 1, которую мы сейчас сформулируем, верна и для более широкого класса римановых поверхностей),

Теорема 1. *Пространство* $T(S_0)$ *гомеоморфно* $(6g - 6 + 2m)$-*мерному вещественному евклидовому пространству* (*см.* [4, *с.* 166—172]).

Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Доказывается, что среди всех отображений $\tilde{f}: H \to H$, накрывающих класс гомотопных отображений $f: S_0 \to S$, существует экстремальное $\tilde{f}_0$ с наименьшим коэффициентом квазиконформности k_0, причем $\mu_{\tilde{f}_0} = k_0\bar{\varphi}/|\varphi|$, где φ — некоторый квадратичный дифференциал на S_0 (т. е. такая функция на H, что $(\varphi \circ A_0)(A_0')^2 = \varphi$ для всех $A_0 \in \Gamma_0$). Обратно, каждому квадратичному дифференциалу φ и числу $0 < k < 1$ соответствует экстремальное отображение $f_{k,\varphi}$ поверхности S_0 на некоторую поверхность $S(k, \varphi)$. Отображение открытого единичного шара в пространстве квадратичных дифференциалов в $T(S_0)$, задаваемое формулой $0 \to (0$, тождественное) $\varphi \to$ $\to (S(\|\varphi|, \varphi), f_{\|\varphi\|, \varphi}$, оказывается гомеоморфизмом, что и доказывает теорему 1, поскольку размерность пространства дифференциалов равна $6g - 6 + 2m$.

Для отображений $\tilde{f}: H \to H$, накрывающих $f: S_0 \to S$, из формулы (3) следует

$$\mu_{\tilde{f}}(A_0(z)) = \mu_{\tilde{f}}(z) A_0'(z)/\bar{A}_0'(z) \tag{4}$$

для всех $A_0 \in \Gamma_0$. Функции $\mu \in L^\infty(H)$, удовлетворяющие условию (4), образуют пространство дифференциалов Бельтрами $B(\Gamma_0)$ относительно Γ_0. Пусть $B_1(\Gamma_0)$ — открытый единичный шар в $B(\Gamma_0)$. Если $\mu \in B_1(\Gamma_0)$, то для нормированной функции $f^\mu: H \to H$ в силу

(4) имеем $\mu_{f\circ A} = \mu_f$, откуда в свою очередь следует, что $A^\mu = (f^\mu) \circ A \circ (f^\mu)^{-1}$ есть дробно-линейное преобразование H на себя, поскольку $\mu_{A^\mu} = 0$. Таким образом, μ определяет изоморфизм Γ_0 на некоторую группу $\Gamma^\mu \subset \Omega$ и квазиконформное отображение $S_0 = H/\Gamma_0 \to H/\Gamma^\mu$. Мы построили отображение $\delta : B_1(\Gamma_0) \to T(S_0)$.

Теорема 2. *Существует такое вложение* $\alpha : T(S_0) \to C^{3g-3+m}$, что $\alpha(T(S_0))$ *является ограниченной областью в* C^{3g-3+m}, *и для всякого голоморфного отображения* $\varphi : V \to B_1(\Gamma_0)$, *где* V *— область в некотором комплексном пространстве* C^l, *отображение* $\alpha \circ \delta \circ \varphi$ *также голоморфно.*

Мы перечислили основные этапы доказательства (см. [3, с. 105—124], [4, с. 97—98]). Каждой функции $\mu \in B_1(\Gamma_0)$ мы можем сопоставить не только отображение $f^\mu : H \to H$, но и отображение $f_\mu : C \to C$, голоморфное на нижней полуплоскости H^*. Такое сопоставление хорошо тем, что сохраняет голоморфную зависимость от параметров (см. замечание после леммы 3). Отображение f_μ порождает изоморфизм Γ_0 на некоторую группу дробно-линейных преобразований $\Gamma_\mu : A_\mu = f_\mu \circ A_0 \circ f_\mu^{-1}$ (A_μ является дробно-линейным преобразованием так же, как и A^μ, в силу условия (4)). Связь между отображениями f_μ, f^μ и точками пространства Тейхмюллера устанавливают две следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\mu, \nu \in B_1(\Gamma_0)$, *тогда* $f^\mu = f^\nu$ *на действительной оси тогда и только тогда, когда на ней (а значит и на всей* H^**)* $f_\nu = f_\mu$.

Лемма 5. $\delta(\mu) = \delta(\nu)$ *тогда и только тогда, когда* $f^\mu = f^\nu$ *на действительной оси.*

В доказательстве последней леммы существенно используется тот факт, что для компактных римановых поверхностей с выколотыми точками Γ_0 является фуксовой группой первого рода, т. е. неподвижные точки преобразований $A_0 \in \Gamma_0$ плотны на действительной оси.

Теперь заметим, что леммы 4 и 5 позволяют однозначно сопоставить каждой точке $\tau \in T(S_0)$ голоморфную на нижней полуплоскости H^* функцию f_μ. Для того, чтобы построить отображение из $T(S_0)$ в C^{3g-3+m}, перейдем от функции f_μ к ее производной Шварца $[f_\mu] = f_\mu'''/f_\mu' - \frac{3}{2}(f_\mu''/f_\mu')^2$. Нетрудно проверить следующие формулы:

$$[f \circ g] = ([f] \circ g)(g')^2 + [g] \quad \text{и} \quad [A] = 0$$

для дробно-линейных преобразований A. Отсюда получаем

$$[f \circ A] = ([f] \circ A)(A')^2 \quad \text{и} \quad [A \circ g] = [g].$$

Положим $\varphi_\mu = [f_\mu]$. Тогда $(\varphi_\mu \circ A)(A')^2 = [f_\mu \circ A] = [A_\mu \circ f_\mu] = [f_\mu] = \varphi_\mu$ для всех $A \in \Gamma_0$, т. е. φ_μ является квадратичным дифференциалом на римановой поверхности $\overline{S}_0 = H^*/\Gamma_0$, комплексная структура которой сопряжена к структуре $S_0 = H/\Gamma_0$. Комплексная размерность пространства дифференциалов равна $3g - 3 + m$;

сопоставление $\tau \to \varphi_\mu$ и будет нужным вложением α. Голоморфность отображения α следует из построения, и образ $\alpha(T(S_0))$ будет ограниченной областью [3, с. 114—124]. В дальнейшем вместо $\alpha(T(S_0))$ мы будем писать $T(S_0)$.

2. Построение универсальной накрывающей

Построение будем проводить для M_2 (на другие случаи оно переносится дословно). Пусть $z \in M_2$, тогда через S_z будем обозначать риманову сферу без точек 0, 1, ∞, z_1 и z_2. Всякое квазиконформное отображение f поверхности S_z продолжается на границу, поэтому можно считать гомеоморфизмом римановых сфер. Пусть S_0 — фиксированная риманова поверхность вида S_z, тогда существует естественная проекция $\rho: T(S_0) \to M_2$. В самом деле, пусть $\tau \in T(S_0)$, тогда выберем пару $(S, f) \in \tau$ так, что S имеет вид S_z и f оставляет на месте точки 0, 1 и ∞. Положим $\rho(\tau) = z$. При этом ρ — однозначно, так как для всякой такой пары $(S_{z'}, f')$, отображение $f' \circ f^{-1}$ гомотопно конформному отображению $h: S_z \to S_{z'}$. Но раз h гомотопно $f' \circ f^{-1}$, то оно оставляет на месте 0, 1 и ∞. Отсюда следует, что h — тождественное отображение и $z = z'$.

Теорема 3. *Отображение $\rho: T(S_0) \to M_2$ есть голоморфное накрытие. Таким образом, $\tilde{M}_2 = T(S_0)$.*

Так как $T(S_0)$ топологически шар, нам достаточно доказать, что ρ — голоморфное накрытие. Доказательство этого факта распадается на несколько лемм.

Лемма 6.1. *Существует семейство квазиконформных отображений $\varphi(z, w)$ открытого единичного круга D (с координатой w) на себя такое, что $\varphi(z, 0) = z$, φ продолжается тождественным отображением на границу, μ_φ голоморфно зависит от z.*

Положим $\varphi = (z + w)(1 + \bar{z}w)^{-1}$. Все свойства легко проверяются. Остается доказать, что φ — гомеоморфизм. То, что φ — локальный гомеоморфизм, вытекает из факта, что $|\varphi_{\bar{w}}| < |\varphi_w|$, так как якобиан φ равен $|\varphi_w|^2 - |\varphi_{\bar{w}}|^2 > 0$. Поскольку φ на границе тождественно, то при стремлении w к границе $\varphi(z, w)$ тоже стремится к границе. Значит, у каждой точки лишь конечное число прообразов и значит φ — накрытие. Отсюда по теореме о монодромии следует, что φ — гомеоморфизм.

Лемма 6.2. *Рассмотрим полидиск $D^2 \subset M_2$ с центром $z^0 \in M_2$, тогда для любой точки $z \in D^2$ существует квазиконформное отображение $g(z^0, z): S'_{z^0} \to S_z$, такое что g оставляет на месте 0, 1 и ∞, и μ_g голоморфно по z.*

Пусть D_j — проекция D^2 на координату z_j, а h_j — линейное отображение единичного круга D на D_j. Возьмем круги D_j на римановой сфере с центрами в точках z_j^0. Они не пересекаются и не содержат точек 0, 1 и ∞.

Положим $g(z^0, z)(w) = \begin{cases} h_j \circ \varphi(z_j') \circ h_j^{-1}, & w \in D_j \\ w, & w \notin \bigcup_{j=1}^{2} D_j \end{cases}$ с подходящими $z_j'(z_j' = h_j^{-1}(z_j - z_j^0)$ при $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ и $z = (z_1, z_2)$. Голоморфность μ, по z вытекает из замечания перед теоремой Мори.

В этой лемме мы можем заменить D_j на произвольные непересекающиеся области U_j, не содержащие 0, 1 и ∞, а h_j — на голоморфные отображения $f_j : D \to U_j$. При таком построении легко убедиться, что для всякого $z \in M_2$ существует отображение $g : S_{z^0} \to S_z$, т. е. ρ — отображение на все M_2.

Лемма 6.3. *ρ — голоморфное отображение и локальный гомеоморфизм.*

Пусть $\tau^0 \in T(S_0)$, $\rho(\tau^0) = z^0$, $(S_{z^0}, f) \in \tau^\circ$, причем f оставляет на месте 0, 1 и ∞, тогда сопоставление точкам $z \in D^2$ пар $(S_z, g(z^0, z) \circ f)$ будет отображением q полидиска D^2, обратным к ρ. Положим $h(z) = g(z^0, z) \circ f$, тогда μ_h голоморфно зависит от z. Более того, отображение $\tilde{h} : H \to H$ — накрывающее и локально представимо в виде $\pi_0^{-1} \circ h \circ \pi$. В частности, дифференциалы Бельтрами $\mu_{\tilde{h}}$ голоморфно зависят от z (в силу того же замечания перед теоремой Мори). Из теоремы 2 следует, что q — голоморфно. Множество $q(D^2)$ будет окрестностью точки τ^0, поскольку размерности M_2 и $T(S_0)$ совпадают. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\tau_1 \in T(S_0)$, $\rho(\tau_1) = z \in D^2$ и $U_1 \subset T(S_0)$ — окрестность τ_1 такая, что $\rho : U_1 \to D^2$ — гомеоморфизм. Тогда для любой точки τ_2 с $\rho(\tau_2) = z$ существует окрестность U_2 такая, что $\rho : U_2 \to D^2$ — гомеоморфизм.*

Пусть $(S_z, f_j) \in \tau_j$, причем f_j оставляют на месте 0, 1 и ∞. Тогда автоморфизм пространства $T(S_0) : (S, f) \to (S, f \circ f_1^{-1} \circ f_2)$ переводит U_1 в нужную окрестность точки τ_2.

Теперь остается лишь заметить, что U_1 и U_2 либо не пересекаются, либо совпадают. Теорема доказана.

3. Об одном свойстве пространств SE_n

Пусть SG_n — подмногообразие в G_n, состоящее из полиномов со вторым коэффициентом, равным 0, и с дискриминантом, равным 1. Через SE_n обозначим подмногообразие в E_n, накрывающее SG_n. Очевидно, что

$$SE_n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n \,|\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0,\ \prod_{l<j} (\lambda_l - \lambda_j) = 1\}.$$

Рассмотрим отображение φ из E_n в M_{n-2}:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \to \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right).$$

Лемма 8. *Отображение φ делает SE_n $\frac{n(n-1)}{2}$-листным голоморфным накрытием M_{n-2}.*

Пусть ψ отображает E_n в C^{n-1} по следующим формулам: $\psi(\lambda) = u$, $u_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $u_j = \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ при $j > 1$. Заметим, что многообразие $\psi(SE_n)$ биголоморфно эквивалентно SE_n, так как уравнение $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$ позволяет по набору u однозначно определить λ_1, а значит и весь вектор λ. В дальнейшем под SE_n мы будем подразумевать $\psi(SE_n)$. Очевидно, что отображение ψ будет проекцией SE_n на $n-2$ последние координаты. Пусть вектор $z = (z_1, \ldots, z_{n-2}) \in M_{n-2}$. Тогда $\prod_{1 \leqslant l < j} (\lambda_l - \lambda_j) = (\lambda_2 - \lambda_1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{-1 \leqslant j < l} (z_j - z_l)$, где $z_0 = 0$ и $z_{-1} = 1$. Таким образом, уравнение $\prod_{l<j} (\lambda_l - \lambda_j) = 1$ позволяет определить по вектору z $\frac{n(n-1)}{2}$ значение $u_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = [\prod_{-1 \leqslant l < j} (z_l - z_j)]^{-\frac{2}{n(n-1)}}$, а значит и весь вектор u, поскольку $u_l = z_{l-1}$ при $l \geqslant 2$. Лемма доказана.

Следствие. *Универсальные накрывающие пространств SE_n и SG_n совпадают с пространством $\tilde{M}_{n-2} = T(S_0)$.*

Это следствие позволяет установить связь между автоморфизмами пространств Тейхмюллера и автоморфизмами пространств SE_n и SG_n. Последние представляют интерес с связи с изучением алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами. Сейчас мы приведем один результат, позволяющий перечислить все отображения SE_n в SE_m. Через Γ обозначим группу автоморфизмов SE_n такую, что $M_{n-2} = SE_n/\Gamma$ (орбиты). Заметим, что Γ изоморфна группе, порожденной $(+1)^{\frac{2}{n(n-1)}}$.

Теорема 5. *Пусть f — голоморфная функция на SE_n, не принимающая значений 0 и 1. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ $f \circ \gamma = f$.*

Известно, что таких функций конечное число [5]. Этот результат позволит указать их, поскольку на M_{n-2} их легко выписать в явном виде.

Рассмотрим M_{n-2} как расслоение, базой которого будет M_{n-3}, и слой L_z над каждой точкой $z \in M_{n-3}$ является римановой сферой с координатой z_{n-2}, у которой выколоты точки $0, 1, z_1, \ldots, z_{n-3}, \infty$. Аналогично мы можем рассматривать SE_n как расслоение над M_{n-3}, слой F_z которого будет римановой поверхностью

$$u_1 = [\prod_{-1 \leqslant l < j \leqslant n-3} (z_l - z_j) \prod_{l=-1}^{n-3} (z_l - z_{n-2})]^{-\frac{2}{n(n-1)}},$$

где $z_{n-2} \in L_z$. Поверхность F_z является $\frac{n(n-1)}{2}$-листным накрытием L_z, ее замыкание $\bar{F}_z$ — компактная риманова поверхность, а выколотые точки проектируются в точки $0, 1, z_1, \ldots, z_{n-3}, \infty$. В соответствии с этим выколотые точки разбиваются на классы K_0, K_1, K_{z_j}, K_∞. Группа Γ действует на каждом классе транзитивно.

Через D будем обозначать открытый единичный круг, а через D^* — круг D без нуля. Для дальнейшего нам понадобится следующий факт.

Лемма 9. *Пусть функция $h(t, z)$, непрерывна по $t \in [0, 1]$, голоморфна по $z \in D^*$ и не имеет существенных особенностей в точках $(t, 0)$. Тогда если функция $h_0(z) = h(0, z)$ продолжается в точку $z = 0$ и $h_0(0) = 0$, то все функции $h_t(z) = h(t, z)$ имеют в точке $z = 0$ значение 0, причем с той же кратностью.*

Доказательство достаточно тривиально. Через f^z обозначим сужение функции f на F_z. Так как f^z не принимает значений 0 и 1, она не имеет существенных особенностей и является мероморфной функцией на $\overline{F}_z$, нули и полюса которой находятся в выколотых точках. Рассмотрим выколотую точку $\alpha \in F_{z^\bullet}$.

Лемма 10. *Пусть функция $f^{z^\bullet}$ имеет в точке α значение 0 с кратностью k. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ функция f^{z^0} имеет значение 0 с кратностью k в точке $\gamma(\alpha)$. Точка α имеет окрестность U в F, голоморфно эквивалентную D^*. Множество $\varphi(U)$ — проекция U на $L_{z^\bullet}$.*

Рассмотрим отображение $s: [0, 1] \to M_{n-3}$ такое, что $s(0) = s(1) = z^0$, петля s не стягиваема в M_{n-3}, но становится стягиваемой, если в M_{n-3} добавить диагональ $z_{l_0} = z_{j_0}$. Пусть r будет гомеоморфным отображением прямого произведения $[0, 1] \times D$ в $M_{n-3} \times C$ со следующими свойствами: $r(t, z)$ непрерывно по параметру $t \in [0, 1]$ и голоморфно по $z \in D$, $r(0, D^*) = r(1, D^*) = \varphi(U)$ $r(t, D^*) \in L_{s(t)}$, проекция $r(t, 0)$ на M_{n-3} совпадает с $s(t)$. Сузим r на $[0, 1] \times D^*$. Отображение $r_1(t, z) = \varphi^{-1} \circ r\left(t, z^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$ будет накрывать отображение r. Считаем, что $r_1(0, D^*) = U$. Множество $r_1(1, D^*) = U'$ будет окрестностью в F_{z^0} некоторой выколотой точки α'. Нетрудно убедиться, что точка α' получается из точки α домножением на $(+1)^{\frac{2}{n(n-1)}} \in \Gamma$, поскольку наша риманова поверхность имеет вид

$$u_1 = \Big[\prod_{-1 \leqslant l < j < n-3} (z_l - z_j) \prod_{j=-1}^{n-3} (z_j - z_{n-2})\Big]^{-\frac{2}{n(n-1)}}$$

и первый из сомножителей под корнем содержит разность $z_l - z_j$, $l = l_0$, $j = j_0$. Но функция f, суженная на $r_1[0, 1] \times D^*$, подходит под лемму 9. Поэтому $f^{z^\bullet}(\alpha') = 0$ с кратностью k. Поскольку $(1)^{\frac{2}{n(n-1)}}$ является образующей группы Γ, это верно и для любой точки $\gamma(\alpha)$. Лемма доказана.

Рассматривая функцию f^{-1}, легко убедиться, что эта лемма верна и для полюсов.

Значит, функция $f^{z^\bullet}/f^{z^\bullet} \circ \gamma$ будет голоморфна всюду на $\overline{F}_{z_\bullet}$. Но поскольку $F_{z^\bullet}$ — компактная риманова поверхность, $f^{z^0}/f^{z^\bullet} \circ \gamma$ равняется константе c_1. Заметим, что функция $1-f$ тоже не принимает значений 0 и 1, а поэтому $(1-f^{z^0})=c_2(1-f^{z^0}\circ\gamma)$. С другой стороны, $(1-f^{z^0})=1-c_1 f^{z^0}\circ\gamma$. Отсюда $c_2=c_1=1$. Значит, $f=f\circ\gamma$, теорема доказана.

Зная, таким образом, все функции f, мы можем перечислить все отображения из SE_n в SE_m, поскольку координатные функции не принимают значений 0 и 1.

4. Выводы и замечания

Мы доказали, что пространство $\tilde{M}_n$ можно отождествить с некоторым пространством Тейхмюллера. Поэтому на $\tilde{M}_n$ переносятся факты, верные для пространств Тейхмюллера. В частности $\tilde{M}_n$ является ограниченной голоморфно выпуклой областью Бергмана в C^n, неоднородной относительно группы голоморфных автоморфизмов и гиперболически полной в смысле Кобояси (см. [6]). Мы приведем независимое доказательство последнего результата.

Теорема 6. *Пространство $\tilde{M}_n$ является гиперболически полным.*

Доказательство опять проведем для случая $n=2$. Так как $\tilde{M}_n$ — голоморфная универсальная накрывающая M_n, достаточно показать, что M_n является гиперболически полным (см. [7, теорема 4.7]). Эта задача представляет самостоятельный интерес и поставлена Кобояси в качестве нерешенного вопроса (см. [7]), но доказательство у нее довольно простое.

Через d_V будем обозначать метрику Кобояси на многообразии V, а через $B_V^r(u_0)$ — множество $\{u\in V \mid d_V(u, u_0)\leqslant r\}$. Необходимо доказать, что $B_{M_2}^r(z^0)$ является компактным для любого r и всех $z^0=(z_1^0, z_2^0)\in M_2$. Рассмотрим три проекции из M_2 на M_1 (т. е. на комплексную прямую C без точек 0 и 1): $h_1(z_1, z_2)=z_1$, $h_2(z_1, z_2)=z_2$ и $h_3(z_1, z_2)=z_1/z_2$.

Поскольку $d_{M_2}(z^0, z)\geqslant d_{M_1}(h_j(z^0), h_j(z))$, шар $B_{M_2}^r(z^0)$ принадлежит прообразу шара $B_{M_1}^r(h_j(z^0))$. Но в силу того, что M_1 — полное гиперболическое пространство, шар $B_{M_1}^r(h_j(z^0))$ компактен. Теперь остается заметить, что пересечение прообразов шаров $B_{M_1}^r(h_j(z^0))$ тоже компактно. Теорема доказана.

Интересно было бы узнать, будет ли пространство $\tilde{M}_n$ голоморфно стягиваемым. В настоящее время известны примеры голоморфно выпуклых областей в C^n, которые топологически стягиваемы, а голоморфно нет [8]. Однако эти области содержат комплексные прямые.

В тех случаях, когда $\tilde{M}_n$ голоморфно стягиваема, всякое алгебраическое уравнение с голоморфными коэффициентами, гомотопное уравнению с постоянными коэффициентами в классе алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами, будет гомотопно ему и в классе уравнений с голоморфными коэффициентами (речь идет об уравнениях без кратных корней со старшим коэффициентом, равным 1).

Поскольку фундаментальная группа пространства G_n является группой кос, мы можем вложить группу кос в автоморфизмы пространства $C^2 \otimes T(S_0)$. Интересно было бы вписать это представление в явном виде, а также исследовать этот вопрос и для других групп Коксетера.

Автор благодарен *Е. А. Горину* и *В. Я. Лину* за внимание к работе, полезные советы и постановку вопросов, которые с их разрешения включены в последнюю часть этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов.— «Усп. мат. наук», 1968, т. 23 : 4, с. 247—248.
2. Гриффитс Ф. А. Комплексно-аналитические свойства некоторых открытых по Зарискому множеств на алгебраических многообразиях. — «Математика», 1971, т. 15 : 5, с. 14—22.
3. Альфорс Л. Лекции о квазиконформных отображениях, М., «Мир», 1969, с. 105—124.
4. Альфорс Л., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М., Изд-во иностр. лит., 1961, с. 97—98.
5. Горин Е. А. Спектральная устойчивость некоторых банаховых алгебр.— «Функц. анализ», 1974, т. 8 : 2, с. 73—74.
6. Берс Л. Униформизация. Модули и клейновы группы.— «Усп. мат. наук», 1973, т. 28 : 4, с. 153—198.
7. Кобояси С. Гиперболические многообразия и голоморфные отображения.— «Математика», 1973, т. 17 : 1, с. 47—96.
8. Hirschowitz A. A propos du principe d'Oka — «Comptes Rendus», 1971, V. 272 : 12, serie A, p. 792—794.

Поступила 5 марта 1974 г.