УДК 517.944

Н. Ю. Иохвидович

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ

В работе [1] нами был изучен вопрос о классах единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u - (x,\, t)}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{u}\,(x,\, t), \tag{1}$$

где $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $\bar{u}\,(x, t) = (u_1\,(x, t), \ \ldots, \ u_n\,(x, t))$ — искомая вектор-функция, $P\left(\frac{\partial}{dx}\right)$ и $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрицы размера $(n \times n)$, состоящие из дифференциальных операторов порядка $\leqslant s$ с постоянными комплексными коэффициентами, при начальном условии

$$\bar{u}\,(x,\, 0) = 0 \tag{2}$$

в классе функций, удовлетворяющих некоторой оценке лишь на одной из полуосей $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 0$.

При этом предполагалось, что

$$\det\,[\lambda P\,(w) - Q\,(w)] \not\equiv C.$$

Настоящая работа посвящена исследованию тех же вопросов в случае

$$\det\,[\lambda P\,(w) - Q\,(w)] \equiv C.$$

Такая же задача изучается для разностного по x аналога системы (1).

Так же, как и в [1], предполагаем, что решения задачи Коши (1)—(2) (и соответствующей задачи для разностной системы) имеют нормальный тип по t, т. е. что эти решения и их производные, входящие в (1), растут по t при $t \to \infty$ не быстрее, чем $\exp\{\alpha t\}$ с некоторым $\alpha > 0$.

Применив к системе (1) с начальным условием (2) преобразование Лапласа, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром λ:

$$\lambda P\left(\frac{d}{dx}\right)\bar{y}(x, \lambda) = Q\left(\frac{\partial}{dx}\right)\bar{y}(x, \lambda), \tag{3}$$

где $\bar{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda))$ — преобразование Лапласа функции $\bar{u}(x, t)$, $\lambda = \sigma + i\tau$, $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$.

Теорема 1. *Если* $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv C \neq 0$, *то задача Коши* (1)—(2) *может иметь лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Легко показать, что каждая функция $y_p(x, \lambda)$ — p-я компонента решения $\bar{y}(x, \lambda)$ системы (3), $p = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяет некоторому (одному и тому же при всех p) дифференциальному уравнению

$$\det\left[\lambda P\left(\frac{d}{\partial x}\right) - Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y_p(x, \lambda) = 0.$$

Поскольку в данном случае $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv C \neq 0$, то единственно возможным решением этого уравнения является $y_p(x, \lambda) \equiv \equiv 0$, $p = 1, 2, \ldots, n$, а отсюда, в силу единственности преобразования Лапласа, и $\bar{u}(x, t) \equiv 0$.

Теорема 2. *Если* $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv 0$, *то в классе финитных функций* (по x) *существует нетривиальное решение задачи Коши* (1)—(2).

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ — *аналитические функции от* λ *при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$.

Тогда существует достаточно гладкая финитная по x, аналитическая по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция $f(x, \lambda)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda) \exp\{-w_j(\lambda)x\}\,dx = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Доказательство. Рассмотрим финитную достаточно гладкую функцию $\varphi(x)$ такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Построим функцию $\psi_j(x, \lambda) = \varphi(x) \exp\{w_j(\lambda)x\}$. Легко проверить, что функция

$$f(x, \lambda) = \psi_0 * \psi_1 * \cdots * \psi_{m-1}(x, \lambda)$$

является финитной достаточной гладкой по x, аналитической по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda) \exp\{-w_j(\lambda) x\} dx = 0, \; j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим систему уравнений (3). Поскольку $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv 0$, то ранг матрицы $A(w, \lambda) = \lambda P(w) - Q(w)$ равен $r < n$. Пусть $A_r(w, \lambda)$ — ранговый (т. е. отличный от тождественного нуля) минор матрицы $A(w, \lambda)$, расположенный, скажем, в левом верхнем углу матрицы $A(w, \lambda)$.

1) Пусть сначала $\det A_r(w, \lambda) \not\equiv C$. Рассмотрим первых r уравнений системы (3). Зададим $y_{r+1}(x, \lambda) = \cdots = y_n(x, \lambda) = f(x, \lambda)$, где $f(x, \lambda)$ — финитная достаточно гладкая по x, аналитическая по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda) \exp\{-w_j(\lambda) x\} dx = 0, \; j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4}$$

где $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, — корни уравнения $\det A_r(w, \lambda) = 0$, m — его порядок по w. Тогда мы получим неоднородную систему r уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) y_i(x, \lambda) = -\sum_{i=r+1}^{n} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) y_i(x, \lambda) \equiv \equiv f_k(x, \lambda), \; k = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

(Здесь $a_{ki}(w, \lambda)$, $k, i = 1, \ldots, n$, — элементы матрицы $A(w, \lambda)$).

Легко показать, используя (4) и интегрируя по частям, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x, \lambda) \exp\{-w_j(\lambda) x\} dx = 0, \; j = 0, \ldots, m-1; \; k = 1, \ldots, r.$$

Кроме того, $f_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ — финитные достаточно гладкие по x, аналитические по λ функции.

Применим к i-у уравнению системы (5) оператор $A_{ik}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right)$, k — одно из чисел $1, 2, \ldots, r$, где $A_{ik}(w, \lambda)$ — это алгебраическое дополнение элемента $a_{ik}(w, \lambda)$ матрицы $A_r(w, \lambda)$. Суммируя затем уравнения системы по i и переставляя члены, получим уравнения

$$\det A_r\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) y_k(x, \lambda) = F_k(x, \lambda), \; k = 1, 2, \ldots, r, \tag{6}$$

причем $F_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ — это финитные по x, аналитические по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функции и

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_k(x, \lambda) \exp\{-w_j(\lambda) x\} dx = 0, \; j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{7}$$

Это следует из того, что функции $F_k(x, \lambda)$, $k=1, \ldots, r$ получаются из правых частей системы (5) путем операций дифференцирования и сложения.

Найдем частное решение уравнения (6), применяя метод вариации произвольных постоянных, в виде

$$y_k(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{kj}(x, \lambda) z_j(x, \lambda),$$

где $z_j(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\det A_r\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) y_k(x, \lambda) = 0.$$

Тогда, как известно [2],

$$c_{kj}(x, \lambda) = \frac{W_j(0, \lambda)(-1)^{m+j}}{W(0, \lambda)\, a_k(\lambda)} \int_{-\infty}^{x} F_k(x, \lambda) \exp\{-w_j(\lambda) x\}\, dx,$$

где $W(x, \lambda)$ — вронскиан функций $z_k(x, \lambda)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$; $W_j(x, \lambda)$ — вронскиан функций $z_k(x, \lambda)$, $k=0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m-1$.

Отсюда следует, в силу (7), что $c_{kj}(x, \lambda)$, $j=0, 1, \ldots, m-1$, — аналитические по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, финитные по x функции.

Следовательно, общее решение системы уравнений (6) имеет вид

$$y_k(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{kj}(\lambda) z_j(x, \lambda) + \tilde{F}_k(x, \lambda), \; k=1, \ldots, r, \tag{8}$$

где $\tilde{F}_k(x, \lambda)$, $k=1, \ldots, r$, найденные частные финитные по x, аналитические по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ решения уравнений (6).

Уравнения (6) получены из системы (5) путем операций дифференцирования и сложения уравнений системы. Следовательно, общее решение системы (5) входит как подкласс в общие решения (8) уравнений (6). Кроме того, как известно из [3], пространство решений системы (5) конечномерно и его размерность равна m — степени алгебраического уравнения $\det A_r(w, \lambda) = 0$ по w. Следовательно, между функциями $c_{kj}(\lambda)$ в (8), $1 \leqslant k \leqslant r$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ существуют такие связи, что функции $y_k(x, \lambda)$, $k=1, 2, \ldots, r$ являются решением системы (5), т. е.

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) c_{ij}(\lambda) z_j(x, \lambda) \equiv$$

$$\equiv f_k(x, \lambda) - \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) \tilde{F}_i(x, \lambda), \; k=1, \ldots r. \tag{9}$$

(В тождестве (9) среди функций $c_{ij}(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ есть лишь m линейно независимых). Но правая часть (9) — финитная по x функция. Поэтому при достаточно больших значениях x из (8) имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) c_{ij}(\lambda)\, z_j(x, \lambda) \equiv 0, \ k = 1, 2, \ldots, r.$$

Тогда из линейной независимости системы функций $z_j(x, \lambda)$, $j = 0, \ldots, m-1$ заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) c_{ij}(\lambda)\, z_j(x, \lambda) \equiv 0, \ -\infty < x < \infty, \ k = 1, 2, \ldots, r.$$

А из (9) следует, что

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ki}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) \tilde{F}_i(x, \lambda) \equiv f_k(x, \lambda), \ k = 1, 2, \ldots, r,$$

т. е. функция

$\tilde{F}(x, \lambda) = (\tilde{F}_1(x, \lambda), \ldots, \tilde{F}_r(x, \lambda))$ — финитное по x решение системы (5).

Итак, мы показали, что финитная по x вектор-функция

$$\bar{y}(x, \lambda) = (\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_r, f, \ldots, f) \tag{10}$$

удовлетворяет первым r уравнениям системы (3).

Далее необходимо показать, что функция (10) удовлетворяет и остальным уравнениям системы (3).

Рассмотрим l-е уравнение системы (3), $l > r$. Это уравнение является линейной комбинацией с коэффициентами $C_{l1}(w, \lambda), \ldots, C_{lr}(w, \lambda)$ первых r уравнений системы (3). Легко показать, что

$$\det A_r(w, \lambda)\, C_{lk}(w, \lambda) = P_{lk}(w, \lambda), \ k = 1, \ldots, r,$$

где $P_{lk}(w, \lambda)$, $k = 1, \ldots, r$, — это многочлены от w и λ.

Тогда очевидно, что уравнение

$$\det A_r\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) \sum_{i=1}^{n} a_{li}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) y_i(x, \lambda) = 0 \tag{11}$$

есть линейная комбинация первых r уравнений системы (3), причем коэффициентами этой линейной комбинации являются многочлены $P_{lk}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right)$, $k = 1, \ldots, r$. Следовательно, функция (10) удовлетворяет уравнению (11).

С другой стороны, для того чтобы уравнению (11) удовлетворяла функция $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{n} a_{li}\left(\frac{d}{dx}\right) y_i(x, \lambda) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{c}_j(\lambda) z_j(x, \lambda)$, $\tilde{c}_j(\lambda)$ — произвольные функции от λ.

Значит функция (10) должна удовлетворять тождеству

$$a_{l_1}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) \tilde{F}_1 + \cdots + a_{lr}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) \tilde{F}_r + a_{l, r+1}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) f +$$

$$+ \cdots + a_{ln}\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) f \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{c}_j(\lambda) z_j(x, \lambda). \qquad (12)$$

Но левая часть в (12) — финитная (по x) функция, т. е. при достаточно больших значениях x из (12) имеем $\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{c}_j(\lambda) z_j(x, \lambda) \equiv 0$. Тогда из линейной независимости системы функций $z_j(x, \lambda)$, $j = 0, \ldots, m-1$ заключаем, что $\tilde{c}_j(\lambda) = 0$, $j = 0, \ldots, m-1$, а из (12) получаем, что функция (10) удовлетворяет l-у уравнению системы (3), $l > r$.

Следовательно, вектор-функция $\bar{y}(x, \lambda)$ из (10) — это финитное по x, аналитическое по λ при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (3).

Обозначим

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_0 + i\tau)^{-2} \exp\{(\sigma_0 + i\tau) t\} \bar{y}(x, \sigma_0 + i\tau) \, d\tau. \qquad (13)$$

Очевидно, что функция $\bar{u}(x, t)$ дает искомое финитное по x решение задачи (1)—(2).

2) Если $\det A_r(w, \lambda) \equiv C \neq 0$, то решения уравнений (6) имеют вид

$$y_k(x, \lambda) = \frac{1}{C} F_k(x, \lambda), \; k = 1, 2, \ldots, r. \qquad (14)$$

Это и есть финитное (по x) решение системы уравнений (5) (как видно из непосредственной подстановки функций (14) в систему (5)). Следовательно, так же, как в случае *1*, вектор-функция

$$\bar{y}(x, \lambda) = \left(\frac{1}{C} F_1(x, \lambda), \ldots, \frac{1}{C} F_r(x, \lambda), f(x, \lambda), \ldots, f(x, \lambda)\right)$$

есть финитное по x, аналитическое по λ при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$ решение системы (3), а функция $\bar{u}(x, t)$, заданная формулой (13), дает искомое финитное по x решение задачи (1)—(2).

Теорема 2 доказана полностью.

Далее рассмотрим вопрос о единственности решения задачи Коши для разностного (по x) аналога системы (1):

$$P(\Delta)\frac{d\bar{u}(x, t)}{dt} = Q(\Delta)\,\bar{u}(x, t), \tag{15}$$

где $P(\Delta)$ и $Q(\Delta)$ — матрицы размера $(n \times n)$, элементами которых являются полиномы относительно оператора сдвига по x с постоянными комплексными коэффициентами, при начальном условии

$$\bar{u}(x, 0) = 0. \tag{16}$$

Пусть, как и прежде, функция $\bar{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda))$ есть преобразование Лапласа решения $\bar{u}(x, t)$ системы (15), $\lambda = \sigma + i\tau$, $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$.

Так же, как и для системы (1), можно показать, что каждая функция $y_p(x, \lambda)$, $p = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяет разностному (по x) уравнению с параметром λ

$$\det[\lambda P(\Delta) - Q(\Delta)]\, y_p(x, \lambda) = 0, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Теорема 3. *Если* $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv C \neq 0$, *то задача Коши* (15)—(16) *может иметь лишь тривиальное решение.*

Доказательство проводится так же, как в теореме 1.

Теорема 4. *Если* $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv 0$, *то в классе финитных функций (по x) существует нетривиальное решение задачи Коши* (15)—(16).

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ — *аналитические функции от* λ *при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$.

Тогда существует непрерывная финитная по x, аналитическая по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ *функция* $f(x, \lambda)$ *такая, что*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k, \lambda)\,[w_j(\lambda)]^{-(x+k)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Доказательство. Рассмотрим финитную непрерывную функцию $\varphi(x)$ такую, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x+k) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Построим функцию $\psi_j(x, \lambda) = \varphi(x)\,[w_j(\lambda)]^x$. Легко проверить, что функция

$$f(x, \lambda) = \psi_0 * \psi_1 * \cdots * \psi_{m-1}(x, \lambda)$$

является непрерывной финитной по x, аналитической по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, причем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k, \lambda)\,[w_j(\lambda)]^{-(x+k)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 2 с использованием леммы 2.

Автор приносит глубокую благодарность *В. М. Борок* и *Я. И. Житомирскому* за постоянное внимание и руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иохвидович Н. Ю. Классы единственности решения задачи Коши для общей системы дифференциальных уравнений в частных производных.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 25. Харьков, 1976, с. 66—77.
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969, 424 с.
3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1939. 718 с.

Поступила 19 января 1973 г.