УДК 517.432

Г. М. Губреев

О ФАКТОРИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

1. Характеристическая оператор-функция линейного ограниченного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, была определена М. С. Лившицем [1] при помощи формулы

$$W_A(\lambda) = I - 2iQ_A(A - \lambda I)^{-1} Q_A J,$$

$$Q_A = |A_J|^{\frac{1}{2}}, \quad J = \operatorname{sign} A_J, \quad A_J = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Если H_1 — инвариантное относительно оператора A подпространство пространства H, то операторы A и A^* могут быть записаны так:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 2i\Gamma \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ -2i\Gamma^* & A_2^* \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $A_1 = A|H_1$, $A_2 = (A^*|H_2)^*$, $H_2 = H \ominus H_1$, а Γ — ограниченный линейный оператор, отображающий H_2 в H_1.

Инвариантное подпространство H_1 будем называть подпространством Надя — Фояша (в дальнейшем NF-подпространством), если оператор Γ может быть представлен в виде

$$\Gamma = Q_1 L Q_2,$$

где L — некоторый ограниченный оператор, отображающий H_2 в H_1, $Q_i = |A_J^i|^{\frac{1}{2}} \qquad (i = 1, 2)$.

Как показано в [3], произвольное инвариантное относительно диссипативного оператора подпространство является NF-подпространством. Однако в общем случае отмеченное свойство не имеет места. Например, если в представлении (1) оператор A_2 самосопряжен и $\Gamma \neq 0$, то подпространство H_1 заведомо не является NF-подпространством.

В том случае, когда H_1 — NF-подпространство, не ограничивая общности можно сказать, что оператор L отображает $\overline{Q_2 H_2}$ в $\overline{Q_1 H_1}$.

2. Если H_1 — NF-подпространство оператора A, то мнимую часть этого оператора можно записать следующим образом:

$$A_J = Q_{12} X Q_{12},$$

где

$$Q_{12}=\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}J_1 & L\\ L^* & J_2\end{pmatrix},$$

$$J_i=\operatorname{sign}A_J^i\quad (i=1,2).$$

Положим

$$S_L=J_2-L^*J_1L. \tag{2}$$

После этого операторная матрица X запишется в виде

$$X=\gamma^*J_{1L}\gamma,$$

где

$$\gamma=\begin{pmatrix}I & J_1L\\ 0 & |S_L|^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\qquad J_{1L}=\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_L\end{pmatrix},\quad J_L=\operatorname{sign}S_L.$$

Окончательно получим

$$QJQ=Q_{12}\gamma^*J_{1L}\gamma Q_{12},\quad Q=|A_J|^{\frac{1}{2}},\quad J=\operatorname{sign}A_J. \tag{3}$$

Покажем, что определение линейного оператора σ, действующего из QH в $Q_{12}H$, соотношением

$$\sigma Qf=\gamma Q_{12}f,\quad f\in H$$

корректно. Действительно, если предположить, что $Qf=0$, то в силу (3) получим

$$(\gamma Q_{12}f,\quad J_{1L}\gamma Q_{12}g)=0,\qquad g\in H.$$

Учитывая вид операторной матрицы γ, находим, что при любом $g\in H_1$ имеет место

$$(Q_1f_1+J_1LQ_2f_2,\quad J_1Q_1g)=0,$$

откуда заключаем, что $\gamma Q_{12}f\in\overline{Q_2H_2}$. Но тогда для любого $g\in H$

$$(\gamma Q_{12}f,\ J_{1L}\gamma Q_{12}g)=(\gamma Q_{12}f,\quad J_L|S_L|^{\frac{1}{2}}\,Q_2g_2)=0.$$

Сдедовательно, $\gamma Q_{12}f=0$.

Таким образом, корректность оператора σ доказана. Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\sigma^*J_{1L}\sigma f=Jf,\quad f\in QH,$$
$$\sigma J\sigma^*g=J_{1L}g,\quad g\in Q_{12}H.$$

3. Наряду с оператором S_L рассмотрим линейный ограниченный оператор S_{L^*}, действующий из $\overline{Q_1H_1}$ в $\overline{Q_1H_1}$ согласно формуле

$$S_{L^*}=J_1-LJ_2L^*=|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_{L^*}|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Из (2) и (4) следует, что имеет место соотношение

$$S_{L^*}J_1L = LJ_2S_L. \tag{5}$$

Поэтому, из того что $|S_L|^{\frac{1}{2}}f = 0$, вытекает равенство $|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}} \times J_1Lf = 0$, $f \in \overline{Q_2H_2}$. Отмеченное обстоятельство позволяет ввести оператор R, действующий из Q_2H_2 в Q_1H_1, определяемый соотношением

$$R|S_L|^{\frac{1}{2}}f = |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_1Lf, \quad f \in \overline{Q_2H_2}.$$

Из равенства (5) следует

$$R^*|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_{L^*}g = |S_L|^{\frac{1}{2}}J_LJ_2L^*g, \quad g \in \overline{Q_1H_1}.$$

Для дальнейшего необходимы следующие соотношения:

$$RJ_LR^*\varphi = J_{L^*}\varphi - |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_{\,}|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad \varphi \in |S_{L^*}|\overline{Q_1H_1}, \tag{6}$$

$$R^*J_{L^*}R\psi = J_L\psi - J_L|S_L|^{\frac{1}{2}}J_2|S_L|^{\frac{1}{2}}J_L\psi, \quad \psi \in |S_L|\overline{Q_2H_2}. \tag{7}$$

Для проверки соотношения (6) положим $\varphi = |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_{L^*}g$, $g \in \overline{Q_1H_1}$. Тогда получим

$$RJ_LR^*\varphi = RJ_L|S_L|^{\frac{1}{2}}J_LJ_2L^*g = R|S_L|^{\frac{1}{2}}J_2L^*g =$$

$$= |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_1LJ_2L^*g = |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_1(J_1 - S_{L^*})g =$$

$$= J_{L^*}|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_{L^*}g - |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_1|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_{L^*}g =$$

$$= J_{L^*}\varphi - |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}J_L|S_{L^*}|^{\frac{1}{2}}\varphi.$$

Соотношение (7) обосновывается аналогично.

4. Резольвента оператора A может быть представлена в виде операторной матрицы

$$R_A(\lambda) = \begin{pmatrix} R_{A_1}\lambda - 2iR_{A_1}(\lambda)\,\Gamma R_{A_2}(\lambda) \\ 0 \qquad\qquad R_{A_2}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Учитывая соотношение, определяющее оператор σ, получим

$$W_A(\lambda)Qf = J\sigma^*J_{1L}[I - 2i\gamma Q_{12}(A - \lambda I)^{-1}Q_{12}\gamma^*J_{1L}]\,\sigma Qf.$$

Элементы операторной матрицы U, стоящей в квадратных скобках, равны

$$u_{11} = W_{A_1}(\lambda)J_1S_{L^*} + W_{A_1}(\lambda)J_1LW_{A_2}(\lambda)J_2L^*,$$

$$u_{12} = W_{A_1}(\lambda)J_1LW_{A_2}(\lambda)J_2|S_L|^{\frac{1}{2}}J_L - W_{A_1}(\lambda)J_1LJ_2|S_L|^{\frac{1}{2}}J_L,$$

$$u_{21} = |S_L|^{\frac{1}{2}}W_{A_2}(\lambda)J_2L^* - |S_L|^{\frac{1}{2}}J_2L^*,$$

$$u_{22} = |S_L|^{\frac{1}{2}}W_{A_2}(\lambda)J_2|S_L|^{\frac{1}{2}}J_L + I - |S_L|^{\frac{1}{2}}J_2|S_L|^{\frac{1}{2}}J_L.$$

Используя равенства (6) и (7), можно показать, что матрица U представима в виде

$$U = \begin{pmatrix} W_{A_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_{A_2}(\lambda) \end{pmatrix} \beta,$$

где

$$\omega = \begin{pmatrix} J_1 |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}} & J_1 L \\ -J_L R^* & |S_L|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} |S_{L^*}|^{\frac{1}{2}} J_{L^*} & -J_{L^*} R \\ J_2 L^* & J_2 |S_L|^{\frac{1}{2}} J_L \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} J_{L^*} & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \omega^* \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_L \end{pmatrix} = \beta. \tag{8}$$

Следовательно,

$$W(\lambda) \mid QH = J\sigma^* J_{1L} W_1(\lambda)\, \omega W_2(\lambda) J_{2L^*} \omega^* J_{1L} \sigma,$$

$$W_1(\lambda) = \begin{pmatrix} W_{A_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_2(\lambda) = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & W_{A_2}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$J_{2L^*} = \begin{pmatrix} J_{L^*} & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, из соотношения (8) заключаем, что

$$\omega J_{2L^*} \omega^* f = J_{1L} f, \qquad f \in Q_{12} H.$$

Пусть линейные операторы u и v удовлетворяют условиям

$$u^* J_1 u = J_{L^*}, \qquad v^* J_L v = J_2.$$

Положим

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} \sigma, \qquad \omega_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (9) может быть преобразовано следующим образом:

$$W(\lambda) \mid QH = J\sigma_0^* J_{12} W_1(\lambda)\, \omega_0 W_2(\lambda)\, J_{12} \omega_0^* J_{12} \sigma_0,$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что справедливы соотношения

$$\omega_0 J_{12} \omega_0^* \subseteq J_{12}, \quad \sigma_0 J \sigma_0^* \subseteq J_{12}, \quad \sigma_0^* J_2 \sigma_{10} \subseteq J.$$

Определение 1. *Будем говорить, что характеристическая оператор-функция $W_A(\lambda)$ линейного оператора A допускает факторизацию, если существуют операторы A_i, действующие* *в пространствах* H_i, $H = H_1 \oplus H_2$ $(i = 1, 2)$, *такие что:*

$$W_A(\lambda)\,|\,QH = J\sigma^* J_{12} W_1(\lambda)\,\omega W_2(\lambda)\, J_{12}\omega^* J_{12}\sigma\,,$$

$$W_1(\lambda) = \begin{pmatrix} W_{A_1}(\lambda) & \Theta \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_2(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_{A_2}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

где σ *и* ω — *постоянные линейные операторы, действующие из* QH *в* $Q_{12}H$ *и из* $Q_{12}H$ *в* $Q_{12}H$ *соответственно, причем* $\sigma J \sigma^* \subseteq J_{12}$.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Если инвариантное подпространство линейного ограниченного оператора является* NF*-подпространством, то его характеристическая оператор-функция допускает факторизацию.*

5. В настоящем пункте мы покажем, что условие NF-подпространства в теореме 1 ослабить нельзя.

Примем следующее

Определение 2. *Две голоморфные оператор-функции* $\Theta_1(\lambda)$ *и* $\Theta_2(\lambda)$ *называются совпадающими в некоторой области* G, *если существует постоянный изометрический оператор* V, *такой что*

$$\Theta_1(\lambda) = V\,\Theta_2(\lambda)\,V^* \quad (\lambda \in G).$$

Теорема 2. *Если характеристическая оператор-функция линейного ограниченного оператора допускает факторизацию, то она совпадает с характеристической оператор-функцией оператора*

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & 2i\Gamma \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = Q_1 J_1 \omega_{12} Q_2,$$

где ω_{12} — *элемент операторной матрицы* ω.

Доказательство. Учитывая вид оператор-функций $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$, получим, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеют место разложения в ряд Лорана:

$$W_1(\lambda) = I + 2i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} Q_1 A_1^{k-1} Q_1 J_1,$$

$$W_2(\lambda) = I + 2i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} Q_2 A_2^{k-1} Q_2 J_2,$$

в которых для простоты обозначений полагаем:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, коэффициент при $\frac{1}{\lambda^n}$ аналогичного разложения оператор-функции

$$F(\lambda) = W_1(\lambda)\,\omega W_2(\lambda)\,J_{12}\omega^* J_{12}$$

равен

$$F_n = 2i\,[\omega Q_2 A_2^{n-1} Q_2 J_2 J_{12}\omega^* J_{12} +$$

$$+ 2i \sum_{k=1}^{n-2} Q_1 A_1^k Q_1 J_1 \omega Q_2 A_2^{n-k-1}\omega^* J_{12} + Q_1 A_1^{n-1}\, Q_1 J_{12}] =$$

$$= (\omega Q_2 + Q_1)\,[A_2^{n-1} + 2i \sum_{k=1}^{n-2} A_1^k Q_1 J_1 \omega Q_2 A_2^{n-k-1} + A_1^{n-1}]\,(Q_2\omega^* + Q_1)\,J_{12}.$$

Операторную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \Gamma \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{n-1}$$

можно представить в виде

$$A = (A_1 + \Gamma + A_2)^{n-1},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $\Gamma^2 = 0$, $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$, $A_2 \Gamma A_1 = 0$. Поэтому в сумме $(A_1 + \Gamma + A_2)^{n-1}$ останутся только слагаемые вида

$$A_1^k \Gamma A_2^j \quad (k + j = n - 2), \quad A_1^{n-1},\ A_2^{n-1}.$$

Следовательно,

$$F_n = 2i\,(\omega Q_2 + Q_1) \begin{pmatrix} A_1 & 2iQ_1 J_1 \omega_{12} Q_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{n-1} (Q_2\omega^* + Q_1)\,J_{12}.$$

Так как

$$\omega Q_2 + Q_1 = \begin{pmatrix} I & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{22} \end{pmatrix} Q_{12},$$

то, полагая

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & 2iQ_1 J_1 \omega_{12} Q_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

получим

$$F_n = 2i \begin{pmatrix} I & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{21} \end{pmatrix} Q_{12} \begin{pmatrix} A_1 & 2iQ_1 J_1 \omega_{12} Q_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{n-1} Q_{12} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \overset{*}{\omega}_{12} & \overset{*}{\omega}_{22} \end{pmatrix} J_{12}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$W(\lambda) = I + 2i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}\, J\sigma^* J_{12} \begin{pmatrix} I & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{22} \end{pmatrix} Q_{12} A_0^{k-1} Q_{12} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \overset{*}{\omega}_{12} & \overset{*}{\omega}_{22} \end{pmatrix} J_{12}\sigma.$$

Значит,

$$Q^2 = RR^*, \quad R = J\sigma^* J_{12} \begin{pmatrix} I & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{22} \end{pmatrix} Q_{12}.$$

Используя соотношение $\sigma J \sigma^* \subseteq J_{12}$, получим

$$R^*JR = Q_{12} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \omega_{12}^* & \omega_{22}^* \end{pmatrix} J_{12} \begin{pmatrix} I & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{22} \end{pmatrix} Q_{12} =$$

$$= Q_{12} \begin{pmatrix} J_1 & J_1\omega_{12} \\ \omega_{12}^* J_1 & J_2 \end{pmatrix} Q_{12} = \frac{A_0 - A_0^*}{2i} = Q_0 J Q_0.$$

Итак, если V — изометрический оператор, удовлетворяющий условию $R = QV$, то

$$V^*QJQV = Q_0 J Q_0 = A_{0J}.$$

Следовательно,

$$|A_{0J}|^{\frac{1}{2}} = V^*QV = V^*R, \quad \operatorname{sign} A_{0J} = V^*JV.$$

Значит, $W(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки представима в виде

$$W(\lambda) \mid QH = I + 2i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} R A_0^{k-1} R^* J =$$

$$= I + 2iV \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} V^* R A_0^{k-1} R^* V V^* J V \right) V^* =$$

$$= V \left(I + 2i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} |A_{0J}|^{\frac{1}{2}} A_0^{k-1} |A_{0J}|^{\frac{1}{2}} (\operatorname{sign} A_{0J}) \right) V^*.$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю признательность проф. *А. В. Кужелю*, обратившему внимание автора на рассматриваемый круг вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов.— «Мат. сб.», 1954, т. 34 (76), с. 145—199.

2. Кужель А. В. Обобщение теоремы Надя — Фояша о факторизации характеристической оператор-функции. — „Acta scientiarum mathematicarum" 1969, Vol. 3—4, № 3, p. 225—234.

3. Кужель А. В. Аналог теоремы Надя — Фояша для диссипативных операторов.— ДАН СССР, 1974, т. 102, № 2, с. 253—254.

Поступила 25 февраля 1974 г.