УДК 517.54 + 573.88

До Конг Хань

О РЕАЛИЗАЦИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ-ДЖРБАШЯНА

Задача реализации различных классов мероморфных функций в рамках теории операторных узлов и линейных систем рассматривалась в [1—3, 7—10]. В работах [1, 7, 8] были построены реализации (в единичном круге) для функций классов D_k, N_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ М. М. Джрбашяна [4, 5, 6]. Недостатком этих построений является то, что реализующие операторы не всегда ограничены. В настоящей заметке дается реализация (в некоторой области единичного круга (см. **1**, **3**) бесконечных произведений типа Бляшке—Джрбашяна с ограниченными операторами.

Определение 1. *Пусть H, E — гильбертовы пространства. Тогда совокупность $L = (T, \Phi, \tilde{\Phi}, K)$ четырех непрерывных отображений $T: H \to H$, $\Phi: E \to H$, $\tilde{\Phi}: H \to E$, $K: E \to E$ называется линейным узлом, а оператор-функция*

$$S(z) = K + \tilde{\Phi}(zI - T)^{-1}\Phi$$

называется передаточной функцией линейного узла L.

Определение 2. *Линейный узел $L = (T, \Phi, \tilde{\Phi}, K)$ называется сцеплением $L = L_1 \vee L_2$ линейных узлов $L_j = (T_j, \Phi_j, \tilde{\Phi}_j, K_j)$ с одинаковыми внешними пространствами $E_1 = E_2 = E$, если выполнены следующие условия:*

$$T = T_1P_1 = T_2P_2 + \Phi_2\tilde{\Phi}_1P_1, \;\; H = H_1 \oplus H_2,$$
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2K_1, \quad \tilde{\Phi}_1 = K_2\tilde{\Phi}_1P_1 + \tilde{\Phi}_2P_2, \quad K = K_2K_1,$$

где P_1, P_2 — проекторы из H на H_1, H_2 соответственно.

Определение 3. *Пусть $f(z)$ — некоторая функция в единичном круге. Узел L называется ее реализацией (в некоторой области G единичного круга), если $f(z)$ совпадает на G с передаточной функцией узла L.*

1. Реализация элементарных множителей М. М. Джрбашяна

Известно [4], что элементарный множитель $A_n(z; \zeta)$ класса N_n при $|z| < |\zeta| < 1$ допускает следующее представление:

$$A_n(z;\, \zeta) = \exp\left\{ -\int\limits_{|\zeta|}^{1} \left[\left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{x}\right)^{-1-n} + \left(1 - \frac{xz}{\zeta}\right)^{-1-n} - 1\right] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(1-x)^n}{x}\, dx \right\}. \tag{1.1}$$

Эта функция, очевидно, допускает по формуле (1.1) аналитическое продолжение на всю плоскость с разрезом $[\zeta, |\zeta|/\bar{\zeta}]$. Это означает, в частности, что функция $A_n(z;\ \zeta)$ в единичном круге с разрезом $[\zeta,\ |\zeta|/\bar{\zeta}]$ совпадает с функцией в правой части (1.1). Наша задача заключается в построении реализации функции $A_n(z;\ \zeta)$ в этой области единичного круга.

В этом случае $\dim E = 1$, и можно написать $\Phi(a) = uq$, $\tilde{\Phi}x = (x,\ p)\,a$, $K(ua) = uka$ (a — орт в E; $q,\ p,\ x \in H$; $u,\ k \in E = C_1$). Передаточная функция имеет вид

$$S(z) = k + ((zI - T)^{-1} q,\ \ p).$$

Для построения реализации рассмотрим следующую модель. Пусть $L_F^2(t_1,\ t_2)$ — пространство вектор-функций $f(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ со значениями в заданном пространстве F, и со скалярным произведением

$$(f,\ g) = \int_{t_1}^{t_2} (f(t),\ g(t))_F\, dt.$$

Введем в рассмотрение семейство узлов $L(t_1,\ t_2)$, $t_1 < t_2$, полагая

$$T(t_1,\ t_2) f = \theta(x) B f(x) + \theta_1(x) \int_{t_1}^{x} (f(t),\ p_0)_F q_0 \theta_2(x) e^{\alpha(x-t)} dt, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} q(t_1,\ t_2) = q_0 \theta_1(x) \exp \alpha (x - t_1); \\ p(t_1,\ t_2) = p_0 \theta_2(x) \exp \alpha (t_2 - x); \\ k(t_1,\ t_2) = \exp \alpha (t_2 - t_1), \end{gathered} \tag{1.3}$$

где B — линейный оператор в F; $p_0,\ q_0 \in F$; $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ — функции со значениями в C_1

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых трех точек $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant l$ имеют место соотношения*

$$\begin{gathered} S(t_1,\ \ t_2;\ \ z) = \exp\Big\{ \alpha (t_2 - t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} ((zI - \theta(x) B)^{-1} q_0,\ p_0)\, \theta_1(x)\, \theta_2(x)\, dx \Big\}; \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$L(t_1,\ t_3) = L(t_1,\ t_2) \vee L(t_2,\ t_3).$$

Перепишем $A_n(z;\ \zeta)$ в виде

$$A_n(z;\ \zeta) = A_n'(z;\ \zeta)\, A_n''(z;\ \zeta), \tag{1.5}$$

где

$$A_n'(z;\ \zeta) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^n}{x}\, dx - \int_{|\zeta|}^{1} \frac{x^n (1-x)^n}{\bar{\zeta}^{n+1} \left(\frac{x}{\bar{\zeta}} - z \right)^{n+1}}\, dx \right\}, \tag{1.6}$$

$$A_n''(z;\ \zeta) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^n}{x}\, dx - \int_{|\zeta|}^{1} \frac{\zeta^{n+1} (1-x)^n}{x^{n+2} \left(\frac{\zeta}{x} - z \right)^{n+1}}\, dx \right\}. \tag{1.7}$$

Чтобы получить узел, реализующий множитель $A_n'(z, \zeta)$, можно в модели (1.2) — (1.3) положить:

$$t_1 = |\zeta|, \quad t_2 = 1, \quad F = R^{n+1}, \quad \theta(x) = x, \tag{1.8}$$

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) = (1-x)^{\frac{n}{2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2(1-|\zeta|)} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^n}{x}\, dx, \tag{1.9}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar\zeta} & 1 & & & & \\ & \frac{1}{\bar\zeta} & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \frac{1}{\bar\zeta} \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$p_0 = \frac{(-1)^n}{\zeta^{n+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Воспользуясь (1.4), нетрудно заметить, что узел (1.2), (1.3) с (1.8) — (1.10) является реализацией множителя $A_n'(z; \zeta)$. Этот узел обозначим через $L_n'(\zeta)$.

Аналогично, если полагаем в модели (1.2), (1.3):

$$t_1 = |\zeta|, \; t_2 = 1, \quad F = R^{n+1}, \; \theta(x) = \frac{1}{x}, \tag{1.11}$$

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{n}{2}}, \; \alpha = \frac{1}{2(1-|\zeta|)} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^n}{x}\, dx, \tag{1.12}$$

$$B = \begin{pmatrix} \zeta & 1 & & & & \\ & \zeta & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \zeta \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \frac{(-1)^n}{\bar\zeta^{n+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

получим узел $L''_n(\zeta)$, дающий реализацию множителя $A''_n(z;\ \zeta)$.

Таким образом, согласно теореме 1 в [1], узел $L_n(\zeta) = L'_n(\zeta) \vee L''_n(\zeta)$ будет реализацией элементарного множителя $A_n(z;\ \zeta)$ М. М. Джрбашяна.

Из правила сцепления (2)—(3) следует

$$q_n(\zeta) = \bar{q}_0 (1-x)^{\frac{n}{2}} e^{\alpha(x-|\zeta|)} \dotplus q_0 \frac{(1-x)^{\frac{n}{2}}}{x} e^{\alpha(x+1-2|\zeta|)}, \qquad (1.14)$$

$$p_n(\zeta) = \bar{p}_0 (1-x)^{\frac{n}{2}} e^{\alpha(2-x-|\zeta|)} \dotplus p_0 \frac{(1-x)^{\frac{n}{2}}}{x} e^{\alpha(1-x)}, \qquad (1.15)$$

$$k_n(\zeta) = \exp 2\alpha (1 - |\zeta|), \qquad (1.16)$$

где q_0, p_0, α из (1,12), (1.13).

Явную формулу для основного оператора $T_n(\zeta)$ узла $L_n(\zeta)$ также можно написать, но нам для дальнейшего понадобится только одно его простейшее свойство, которое непосредственно следует из этой формулы. А именно: пусть ζ пробегает открытый единичный круг, тогда существует число C, независящее от ζ, такое, что

$$\| T_n(\zeta) \| \leqslant C. \qquad (1.17)$$

(Здесь норма берется в соответствующих пространствах $L^2_{R^{n+1}} \times \times (|\zeta|,\ 1)$).

2. Оператор, реализующий произведение М. М. Джрбашяна

Произведение $B\ (z;\ \zeta_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_n(z;\ \zeta_k)$, согласно теореме 1 [1], реализуется бесконечным сцеплением узлов $L_n = \bigvee_{k=1}^{\infty} L_n(\zeta_k)$, где $L_n(\zeta_k)$ построены в **1**. Узел L_n, согласно определению 2, имеет следующий вид:

$$T_n x = \{ T_n(\zeta_k) x_k + q_n(\zeta_k) \sum_{i=1}^{k-1} (x_i,\ p_n(\zeta_i)) \prod_{j=i+1}^{k-1} k_n(\zeta_j) \}_{k=1}^{\infty}, \quad (2.1)$$

$$q_n = \{ q_n(\zeta_k) \prod_{j=1}^{k-1} k_n(\zeta_j) \}_{k=1}^{\infty}, \qquad (2.2)$$

$$p_n = \{ p_n(\zeta_k) \prod_{j=k+1}^{\infty} k_n(\zeta_j) \}_{k=1}^{\infty},$$

$$H_n = \bigoplus_{k=1}^{\infty} L^2_{R^{n+1}}(|\zeta_k|,\ 1), \quad k_n = \prod_{j=1}^{\infty} k_n(\zeta_j). \qquad (2.3)$$

Известно [4], что произведение $B_n(z;\ \zeta_k)$ М. М. Джрбашяна сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\zeta_j|)^{n+1}<\infty. \tag{2.4}$$

Мы покажем, что условие (2.4) также является необходимым и достаточным для ограниченности операторов узла L_n. Справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы*

1) *оператор* T_n, *задаваемый формулой* (2.1), *был ограниченным,*
2) *векторы* q_n, p_n *из* (2.2) *были элементами гильбертова пространства* H_n,
3) *произведение* (2.3) *сходилось, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (2.4).

Доказательство. *Достаточность.* Пусть имеет место соотношение (2.4), тогда сходится $B_n(z;\ \zeta_k)$ при $|z|<1$ (теорема 9.4 [4]). С другой стороны, $k_n=B_n^{-1}(0;\ \zeta_k)$, поэтому произведение (2.3) сходится.

Из (1.14) имеем

$$\|q_n(\zeta)\|^2=\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-x)^n e^{2\alpha(x-|\zeta|)}dx+\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^n}{x^n}e^{2\alpha(x+1-2|\zeta|)}dx=$$

$$\left\{e^{2\alpha(x'-|\zeta|)}+\frac{1}{x''}e^{2\alpha(x''+1-2|\zeta|)}\right\}\frac{(1-|\zeta|)^{n+1}}{n+1}=C_\zeta(1-|\zeta|)^{n+1}, \tag{2.5}$$

где C_ζ сходится к 2, когда $|\zeta|\to 1$.

Таким образом, учитывая сходимость произведения (2.3) и (2.5), согласно (2.2), имеем

$$\|q_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|q_n(\zeta_k)\|^2\prod_{j=1}^{k-1}k_n^2(\zeta_j)\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\zeta_k|)^{n+1},$$

т. е. $q_n\in H_n$; аналогично доказывается, что $p_n\in H_n$.

Оператор T_n, согласно (2.1) можно рассматривать как сумму двух операторов, первый из которых, в силу (1.17), ограничен. Ограниченность второго вытекает из неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}||q_n(\zeta_k)|\,|^2\,\Big|\sum_{i=1}^{k-1}(x_i,\ \ p_n(\zeta_i))\prod_{j=i+1}^{k-1}k_n(\zeta_j)\Big|^2\leqslant$$

$$\leqslant C\|x\|^2\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\zeta_k|)^{n+1}\Big\}^2.$$

Необходимость. Утверждение 3 очевидно, а утверждение 2 следует из неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|q_n(\zeta_k)\|^2\prod_{j=1}^{k-1}k_n^2(\zeta_j)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|q_n(\zeta_k)\|^2\geqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\zeta_k|)^{n+1}.$$

Здесь мы воспользовались сначала $k_n(\zeta_j) > 1$ и затем (2.5). Утверждение *1* следует из того, что элемент $y = (x_1, 0, \ldots)$, где $(x_1, p_n(\zeta_1)) = s \neq 0$, не принадлежит области определения оператора T_n

В самом деле, согласно (2.1), имеем

$$T_n y = \{ s q_n(\zeta_k) \prod_{i=2}^{k-1} k_n(\zeta_i) \}_{k=1}^{\infty},$$

откуда, в силу $k_n(\zeta_i) > 1$, получаем

$$\| T_n y \|^2 \geqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \| q_n(\zeta_k) \|^2 \geqslant C' \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\zeta_k|)^{n+1}.$$

Теорема доказана.

3. Спектр основного оператора

Оператор $(zI - T_n)^{-1}$, где T_n дается формулой (2.1), имеет следующий вид (см. [7]):

$$(zI - T_n)^{-1} x = \{ (zI - T_n(\zeta_k))^{-1} x_k + (zI - T_n(\zeta_k))^{-1} q_n(\zeta_k) \times \\ \times \sum_{i=1}^{k-1} ((zI - T_n(\zeta_i))^{-1} x_i,\ P_n(\zeta_i)) B(z;\ i+1,\ k) \}_{k=1}^{\infty}, \quad (3.1)$$

где

$$B(z;\ i+1,\ k) = \prod_{j=i+1}^{k-1} A_n(z;\ \zeta_j) = \\ = \prod_{j=i+1}^{k-1} \{ k_n(\zeta_j) + ((zI - T_n(\zeta_j))^{-1} q_n(\zeta_j)\ P_n(\zeta_j) \}. \quad (3.2)$$

Формула (3.1) справедлива только для тех точек z, которые не принадлежат объединению спектров операторов $T_n(\zeta_k)$. Так как спектр оператора $T_n(\zeta_k)$ составляет отрезок $[\zeta_k,\ 1/\overline{\zeta}_k]$, то (3.1) справедливо при

$$z \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} [\zeta_k,\ 1/\overline{\zeta}_k]} = \Lambda. \quad (3.3)$$

Пусть выполняются условия (2.4) и (3.3), тогда оператор $(zI - T_n)^{-1}$ ограничен. В самом деле, при выполнении условия (3.3) легко показать (исходя из явной конструкции операторов $T_n(\zeta_k)$ в 1), что существует такое, независящее от k число C, что

$$\| (zI - T_n(\zeta_k))^{-1} \| \leqslant C. \quad (3.4)$$

Оператор $(zI - T_n)^{-1}$, согласно (3.1), представляет сумму двух операторов, соответствующих двум слагаемым в (3.1). Ограниченность первого, в силу (3.4), очевидна. Ограниченность второго следует из неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| (zI - T_n(\zeta_k))^{-1} q_n(\zeta_k) \|^2 \left| \sum_{i=1}^{k-1} ((zI - T_n(\zeta_i))^{-1} x_i,\ p_n(\zeta_i)) \times \right.$$

$$\times B(z;\ i+1,\ k) |^2 \leqslant C \| x \|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \| q_n(\zeta_k) \|^2 \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \| P_n(\zeta_k) \|^2 \leqslant C' \{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - | \zeta_k |)^{n+1} \}^2 \| x \|^2.$$

Здесь мы воспользовались сходимостью произведения $B(z;\ i+1,\ k)$ при условии (3.3) и свойствами (3.4) и (2.5).

Таким образом, спектр $\sigma(T_n)$ оператора T_n содержится в Λ. Это, в частности, показывает, что множество регулярных точек, находящихся соответственно внутри и вне единичной окружности, связны (так как $| \zeta_k | \leqslant | \zeta_{k+1} | \to 1$).

Покажем теперь, что

$$\sigma(T_n) = \Lambda.$$

Для этого представим узел L_n в виде

$$L_n = L_n(\zeta_1) \vee L_n', \quad (L_n' = \bigvee_{k=2}^{\infty} L_n(\zeta_k))$$

и используем теорему о том, что если множество регулярных точек узла $A = A_1 \vee A_2$ связно (или имеет несколько связных компонент), то $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ (см. [9, теорему 2.5], эта теорема доказана для узлов иного вида, но нетрудно заметить, что она остается справедливой и для узлов рассматриваемого вида), мы можем заключить, что

$$\sigma(T_n(\zeta_1)) = [\zeta_1,\ 1/\overline{\zeta}_1] \subset \sigma(T_n).$$

Применяя эту же процедуру для $\bigvee_{k=2}^{\infty} L_n(\zeta_k)$ и затем $\bigvee_{k=3}^{\infty} L_n(\zeta_k)$

и т. д., мы получаем, что $[\zeta_2,\ 1/\overline{\zeta}_2] \subset \sigma(T_n)$, $[\zeta_3,\ 1/\overline{\zeta}_3] \subset \sigma(T_n)$ и т. д. Таким образом, нами доказана

Теорема 3. *Пусть сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - | \zeta_k |)^{n+1} < \infty,$$

тогда

$$\sigma(T_n) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} [\zeta_k,\ 1/\zeta_k]}.$$

Известно [4, теорема 9.9], что любая функция $F(z)$ класса N_n допускает следующее представление:

$$F(z)=Cz^{\lambda}\frac{B_n(z;\ a_\mu)}{B_n(z;\ b_\nu)}\exp\left\{\frac{r(1+n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2}{(1-e^{-i\nu}z)^{1+n}}-1\right]d\psi(\nu)\right\},\tag{3.5}$$

где $\psi(\nu)$ — вещественная функция на $[-\pi,\ \pi]$ с конечным полным изменением; λ — целое число.

Реализация для произведения $B_n(z;\ a_\mu)$ была построена и изучена в предыдущих параграфах. В силу представления (1.1) для элементарного множителя произведения М. М. Джрбашяна, мы видим, что произведение $B_n^{-1}(z;\ b_\nu)$ также может быть реализовано тем же методом. Экспоненциальный множитель в (3.5) был реализован ограниченным узлом в [8] со спектром, находящимся на единичной окружности.

Пусть $\lambda=-m$ (m — натуральное число), тогда $C\cdot z^{-m}$ может быть реализована следующим конечномерным узлом:

$$T=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\cdot&&\\&&\cdot&\cdot&\\&&&\cdot&1\\&&&&\cdot\\&&&&0\end{pmatrix},\quad H=R^m,\quad q=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdot\\\cdot\\0\\C\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}1\\0\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\0\end{pmatrix}$$

$$E=C_1\quad k=0.$$

Группируя сказанное и результаты предыдущих параграфов, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Любая функция $F(z)$ ($F(0)\neq 0$) класса N_n обладает ограниченной реализацией (т. е. операторы реализующего узла ограничены).*

Замечание. Предложенный метод реализации функций класса N_n применим также для функций класса D_n [5, 6], так как элементарный множитель $A_n(z:\ \zeta)$ класса D_n также допускает представление, аналогичное представлению (1.1) для класса N_n (см. [6, стр. 25]).

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. *М. С. Лившицу* за руководством работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лившиц М. С. Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 4, с. 793—796.
2. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966. 298 с.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков, 1971. 160 с.

4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966. 671 с.
5. Джрбашян М. М. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций.— ДАН Арм. ССР, 1945, т. 3, № 1, с 3—9.
6. Джрбашян М. М. К проблеме представимости аналитических функций. — «Сообщ. Ин-та. мат. и мех. АН Арм. ССР», вып. 2, Ереван, 1948, с. 3—40.
7. До Конг Хань. Исследование операторов, реализующих некоторые классы мероморфных функций.— «Изв. АН Арм. ССР», 1976, т. 11, № 1, с. 15—30.
8. Мегребян Л. X. Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем.— «Изв. Арм. ССР». 1976, т. 11, № 1, с. 30—41.
9. Бродский М. С. Треугольные и жордановые представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
10. Поляцкий В. Т. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов.—ДАН СССР, 1957, т. 113, № 4, с. 756—759.

Поступила 14 июня 1975 г.