УДК 517.948:513+519.4

Л. Л. ВАКСМАН

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

1. Встречающиеся гильбертовы пространства предполагаются комплексными и сепарабельными. Пусть G — сепарабельная локально компактная группа; S—ее замкнутая подполугруппа; $d\mu$—сужение правой меры Хаара на S. Предположим, что $\overline{\operatorname{Int} S} = S$, $e \in S$ и что единственной функцией f из $L_1(d\mu)$, для которой $\int f(xs)\,d\mu(x) \equiv 0$, является $f \equiv 0$. Множество функций на S вида $\int q(xs)\,d\mu(x)$, где $q \geqslant 0$, $q \in L_1(d\mu)$, обозначим $K[S]$, а представление $R(s) \oplus R(s) \oplus \ldots$ полугруппы S, кратное регулярному $R(s): f(x) \to f(xs)$ в $L_2(d\mu)$, обозначим — $\widetilde{R}(s)$.

Теорема 1. *Сильно непрерывное представление $T(s)$ полугруппы S в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно некоторому подпредставлению $\widetilde{R}(s)$ тогда и только тогда, когда для всех h функция $\| T(s)h \|^2$ принадлежит множеству $K[S]$.*

Необходимость условия $\| T(s)h \|^2 \in K[S]$ очевидна. При доказательстве достаточности используется

Лемма. *Пусть для всех $h \in H$ функция $\| T(s)h \|^2$ принадлежит $K[S]$ и пусть L — линейная оболочка векторов вида $\int T(s)h \times \times \varphi(s)\,d\mu(s)$, где $\varphi(s)$ — непрерывная функция на S с компактным носителем. Тогда для любого вектора $h' \in L$ существует и единственна такая непрерывная в $\operatorname{Int} S$ функция $q(h', x)$, что $q(h', x) \geqslant \geqslant 0$, $q(h', x) \in L_1(d\mu)$, $\| T(s)h' \|^2 = \int q(h', xs)\,d\mu$.*

Доказательство леммы. Для любой пары h_1, h_2 векторов пространства H существует и единственная такая функция $q(h_1, h_2, x) \in L_1(d\mu)$, что $(T(s)h_1, T(s)h_2) = \int q(h_1, h_2, xs)\,d\mu(x)$. В силу единственности этой функции построенное отображение $H \oplus H \to L_1(d\mu)$ линейно по первой переменной и антилинейно по второй. Отображение непрерывно: $\| q(h_1, h_2, x) \|_{L_1} \leqslant \| h_1 \| \| h_2 \|$, а следовательно, функция трех переменных $q(T(s_1)h_1, T(s_2)h_2, s)$ измерима по Лебегу и локально суммируема. Пусть $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ непрерывные функции на S с компактными носителями и $h_1' = \int \varphi_1(s) \times T(s)h_1\,d\mu(s)$, $h_2' = \int \varphi_2(s)\,T(s)\,h_2 d\mu(s)$.

Тогда почти для всех $s \times t \in S \times S q(h_1', h_2', ts) = \iint \varphi_1(s) \times \varphi_2(s)\,q(T(ss_1))\,h_1, T(ss_2)h_2, t),\ d\mu(s_1)d\mu(s_2)$. Следовательно, функция $q(h_1', h_2', t)$ отличается на множестве нулевой меры от функции, непрерывной в $\operatorname{Int} S$. Лемма доказана.

Пусть L_0 — линейная оболочка линейных многообразий вида $T(s)L$, где $s \in \operatorname{Int} S$. Нетрудно подобрать такое сепарабельное гильбертово пространство и такое линейное отображение $\Phi : L_0 \to E$, что $\| \Phi h \|_E^2 = \lim \int q(h, h, st)\,d\mu(t) = \lim \int q(T(t)h, T(t)h, s) \times d\mu(t)$. Тогда формула $i : h \to \Phi T(t)\,h$ определяет изометрическое вложение L_0 в гильбертово пространство $L_2(E, d\mu)$. Обозначим замыкание образа оператора i через H_1. Ограничения операторов сдвига $f(x) \to f(xs)$ в пространстве $L_2(E, d\mu)$ на их общее инвариантное подпространство H_1 образуют представление полугруппы S, унитарно эквивалентное $T(s)$ и унитарно эквивалентное подпредставлению представления, кратного регулярному. Теорема доказана.

Следствие 1. *Сильно непрерывное представление полугруппы R_+^n в гильбертовом пространстве H унитарно эквивалентно подпредставлению представления $R(t_1, \ldots, t_n) : f(x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n)$, в пространстве $L_2(R_+^n) \oplus L_2(R_+^n) \oplus \ldots$ тогда и только тогда, когда* 1) $(-1)^n \dfrac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}(\| T(t_1, \ldots t_n) \times h \|^2) \geqslant 0$ *при* $h \in H$, $t_1 > 0, \ldots, t_n > 0$; 2) $s - \lim\limits_{t \to \infty} T(t, 0, \ldots, 0) = s - \lim\limits_{t \to \infty} T(0, t, 0, \ldots, 0) = \ldots = s - \lim\limits_{t \to \infty} T(0, \ldots 0, t) = 0$.

Следствие 2. *Пусть G — группа афинных преобразований прямой $t \to at + b$, $a > 0$, $b \in R$ и пусть $G_+ = \{(a, b) \in G : a \geqslant 1, b \geqslant 0\}$. Сильно непрерывное представление $T((a, b))$ полугруппы G_+ в пространстве H унитарно эквивалентно подпредставлению представления $\tilde{R}((a, b))$, кратного регулярному, если и только если* 1) $D(\| T((a, b))\,h \|^2) \geqslant 0$ при $h \in H$, $a > 1$, $b > 0$. Здесь $D(u) = a \dfrac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + b \dfrac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \dfrac{\partial u}{\partial b}$; 2) $s - \lim\limits_{t \to \infty} T(t, 0) = s - \lim\limits_{t \to \infty} T(1, t) = 0$.

2. Дадим обобщение одной теоремы Л. Е. Исаева. Пусть $D \subset R_+^n$ — такой выпуклый компакт, что $R_+^n \setminus D + R_+^n \subset R_+^n \setminus D$ и пусть

$\widetilde{J}_m(D)$ — ортогональная сумма счетного числа операторов интегрирования по m-й переменной в пространстве $L_2(D)$:

$$f \to i \int_{x_m}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \ldots)\, dt.$$

Теорема 2. *Семейство ограниченных коммутирующих простых диссипативных операторов $A_1, \ldots, A_n$ в гильбертовом пространстве H унитарно эквивалентно ограничению семейства операторов $\widetilde{J}_1(D), \ldots \widetilde{J}_n(D)$ на одно из их общих инвариантных подпространств тогда и только тогда, когда* 1) *операторная функция $A_1 \ldots A_n (I - z_1A_1)^{-1} \ldots (I - z_nA_n)^{-1}$ является целой функцией экспоненциального типа и ее P-индикатор* (см. [2]) *не превосходит опорной функции области D;* 2) $(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} (\| \exp i (\Sigma A_j t_j) \times$ $\times h \|^2)_{t_1 = \ldots = t_n 0} \geqslant 0$ *при всех $h \in H$.*

Замечание. В случае $n = 1$ второе условие имеет вид $\frac{1}{2i}(A_1 - A_1^* \geqslant 0$, а при $n = 2$: $A_1^*A_2^* - A_1^*A_2 - A_2^*A_1 + A_1A_2 \geqslant 0$.

Наметим доказательство теоремы 2. Введем представление полугруппы R_+^n сжатиями: $T(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{j=1}^{n} \exp \frac{1}{i} (A_j^{-1} t_j)$ (см. [1, с. 433]). Тогда $s - \lim T(t_1, \ldots, t_n) = 0$ при условии, что хотя бы одна из координат стремится к бесконечности (см. [3, с. 102]). В силу следствия 1 теоремы 1 условие *2* означает, что представление $T(t_1, \ldots, t_n)$ можно считать подпредставлением представления, кратного регулярному. Условие *1* эквивалентно равенству $T(t_1, \ldots, t_n) = 0$ при всех $(t_1, \ldots, t_n) \in R_+^n \setminus D$ (ср. [1, с. 433]). Таким образом, система условий *1, 2* эквивалентна тому, что $(A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1})$ — сужения операторов дифференцирования в $L_2(D) \oplus \ldots \oplus L_2(D)$, а $(A_1, \ldots, A_n)$ — сужения операторов интегрирования. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1967. 508 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
3. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970, 431 с.

Поступила 24 октября 1974 г.