

Л. Л. ВАКСМАН

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ
ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

1. Встречающиеся гильбертовы пространства предполагаются комплексными и сепарабельными. Пусть G — сепарабельная локально компактная группа; S — ее замкнутая подполугруппа; $d\mu$ — сужение правой меры Хаара на S . Предположим, что $\text{Int } S = S$, $e \in S$ и что единственной функцией f из $L_1(d\mu)$, для которой $\int f(xs) d\mu(x) \equiv 0$, является $f \equiv 0$. Множество функций на S вида $\int q(xs) d\mu(x)$, где $q \geq 0$, $q \in L_1(d\mu)$, обозначим $K[S]$, а представление $R(s) \oplus R(s) \oplus \dots$ полугруппы S , кратное регулярному $R(s) : f(x) \rightarrow f(xs)$ в $L_2(d\mu)$, обозначим — $\tilde{R}(s)$.

Теорема 1. *Сильно непрерывное представление $T(s)$ полугруппы S в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно некоторому подпредставлению $\tilde{R}(s)$ тогда и только тогда, когда для всех h функция $\|T(s)h\|^2$ принадлежит множеству $K[S]$.*

Необходимость условия $\|T(s)h\|^2 \in K[S]$ очевидна. При доказательстве достаточности используется

Лемма. *Пусть для всех $h \in H$ функция $\|T(s)h\|^2$ принадлежит $K[S]$ и пусть L — линейная оболочка векторов вида $\int T(s)h \times \times \varphi(s) d\mu(s)$, где $\varphi(s)$ — непрерывная функция на S с компактным носителем. Тогда для любого вектора $h' \in L$ существует и единственна такая непрерывная в $\text{Int } S$ функция $q(h', x)$, что $q(h', x) \geq 0$, $q(h', x) \in L_1(d\mu)$, $\|T(s)h'\|^2 = \int q(h', xs) d\mu$.*

Доказательство леммы. Для любой пары h_1, h_2 векторов пространства H существует и единственная такая функция $q(h_1, h_2, x) \in L_1(d\mu)$, что $(T(s)h_1, T(s)h_2) = \int q(h_1, h_2, xs) d\mu(x)$. В силу единственности этой функции построенное отображение $H \oplus H \rightarrow L_1(d\mu)$ линейно по первой переменной и антилинейно по второй. Отображение непрерывно: $\|q(h_1, h_2, x)\|_{L_1} \leq \|h_1\| \|h_2\|$, а следовательно, функция трех переменных $q(T(s_1)h_1, T(s_2)h_2, s)$ измерима по Лебегу и локально суммируема. Пусть $\varphi_1(s), \varphi_2(s)$ непрерывные функции на S с компактными носителями и $h_1 = \int \varphi_1(s) \times T(s)h_1 d\mu(s)$, $h_2 = \int \varphi_2(s) T(s)h_2 d\mu(s)$.

Тогда почти для всех $s \times t \in S \times S$ $q(h'_1, h'_2, ts) = \iint \varphi_1(s) \times \varphi_2(s) q(T(ss_1)h_1, T(ss_2)h_2, t), d\mu(s_1)d\mu(s_2)$. Следовательно, функция $q(h'_1, h'_2, t)$ отличается на множестве нулевой меры от функции, непрерывной в $\text{Int } S$. Лемма доказана.

Пусть L_0 — линейная оболочка линейных многообразий вида $T(s)L$, где $s \in \text{Int } S$. Нетрудно подобрать такое сепарабельное гильбертово пространство и такое линейное отображение $\Phi: L_0 \rightarrow E$, что $\|\Phi h\|_E^2 = \lim \int q(h, h, st) d\mu(t) = \lim \int q(T(t)h, T(t)h, s) \times d\mu(t)$. Тогда формула $i: h \rightarrow \Phi T(t)h$ определяет изометрическое вложение L_0 в гильбертово пространство $L_2(E, d\mu)$. Обозначим замыкание образа оператора i через H_1 . Ограничения операторов сдвига $f(x) \rightarrow f(xs)$ в пространстве $L_2(E, d\mu)$ на их общее инвариантное подпространство H_1 образуют представление полугруппы S , унитарно эквивалентное $T(s)$ и унитарно эквивалентное подпредставлению представления, кратного регулярному. Теорема доказана.

Следствие 1. *Сильно непрерывное представление полугруппы R_+^n в гильбертовом пространстве H унитарно эквивалентно подпредставлению представления $R(t_1, \dots, t_n): f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1 + t_1, \dots, x_n + t_n)$, в пространстве $L_2(R_+^n) \oplus L_2(R_+^n) \oplus \dots$ тогда и только тогда, когда 1) $(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} (\|T(t_1, \dots, t_n) \times h\|^2) \geq 0$ при $h \in H, t_1 > 0, \dots, t_n > 0$; 2) $s - \lim_{t \rightarrow \infty} T(t, 0, \dots, 0) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} T(0, t, 0, \dots, 0) = \dots = s - \lim_{t \rightarrow \infty} T(0, \dots, 0, t) = 0$.*

Следствие 2. *Пусть G — группа аффинных преобразований прямой $t \rightarrow at + b, a > 0, b \in R$ и пусть $G_+ = \{(a, b) \in G: a \geq 1, b \geq 0\}$. Сильно непрерывное представление $T((a, b))$ полугруппы G_+ в пространстве H унитарно эквивалентно подпредставлению представления $\tilde{R}((a, b))$, кратного регулярному, если и только если 1) $D(\|T((a, b))h\|^2) \geq 0$ при $h \in H, a > 1, b > 0$. Здесь $D(u) = a \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + b \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial u}{\partial b}$; 2) $s - \lim_{t \rightarrow \infty} T(t, 0) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} T(1, t) = 0$.*

2. Дадим обобщение одной теоремы Л. Е. Исаева. Пусть $D \subset R_+^n$ — такой выпуклый компакт, что $R_+^n \setminus D + R_+^n \subset R_+^n \setminus D$ и пусть

