УДК 513.881

В. Н. АЗАРОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ПРОБЛЕМЫ БАНАХА — КУРАТОВСКОГО

В 1929 г. С. Банах и К. Куратовский [1] высказали предположение, что для любого непустого множества A не существует определенной на всех его подмножествах действительной функции μ такой, что 1) если $x \in A$, то $\mu(\{x\}) = 0$; 2) μ — счетно-аддитивна; 3) $\mu(A) = 1$.

В дальнейшем меру, определенную на σ-алгебре всех подмножеств множества A и удовлетворяющую условиям *1—3*, будем называть мерой Банаха — Куратовского на множестве A.

Предполагая справедливость континуум-гипотезы, С. Банах и К. Куратовский [1] доказали свое предположение для множества $[0, 1]$. Затем С. Банах [2], используя справедливость обобщенной континуум-гипотезы, доказал его для произвольного множества. Наконец, С. Улам [3] показал, что если среди мощностей, не превосходящих C, нет недостижимых, то на множествах мощности C нельзя определить меру Банаха — Куратовского. (Мощность C называется недостижимой, если она не представима в виде $\sum\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$, где мощности B_α для любого α и мощность A строго меньше C).

В связи с проблемой Банаха — Куратовского Улам рассматривал меры Банаха — Куратовского, принимающие лишь значения 0 и 1. Предположение о несуществовании таких мер слабее гипотезы Банаха — Куратовского, в частности, на множестве $[0, 1]$ невозможно определить меру Улама. Известны аналоги проблемы Улама в теории множеств и в теории топологических векторных пространств. Макки [4] принадлежит следующая теорема.

Пусть дано бесконечное множество A, тогда вещественное векторное пространство $R^{(A)}$, с топологией произведения $\sigma(R^{(A)}, R^{(A)})$, является борнологическим (т. е. $\sigma(R^A, R^A)$ — сильнейшая из локально выпуклых топологий, содержащих тот же набор огра-

ниченных множеств, что и $\sigma(R^A, R^{(A)})$) тогда и только тогда, когда на множестве A невозможно определить меру Улама.

Оказывается, что топологический аналог можно найти и для проблемы Банаха — Куратовского. Рассмотрим определение пространства $(\overline{L}_c)$, введенное Ж. Себаштьяном-и-Силвой [5].

Пусть E — отделимое локально-выпуклое пространство. E называется пространством $(\overline{L}_c)$, если каждое выпуклое множество $U \subset E$, не содержащее предела никакой сходящейся последовательности точек $\{x_n\}_1^\infty$ его дополнения, открыто. Топология пространства $(\overline{L}_c)$ называется $\overline{L}_c$-топологией. Каждая $\overline{L}_c$-топология β определяется набором последовательностей, сходящихся в данной топологии, — это сильнейшая из локально выпуклых топологий, содержащих тот же набор сходящихся последовательностей, что и топология β [5]. Например, все метризуемые пространства — пространства $(\overline{L}_c)$. Произвольное локально-выпуклое пространство данным свойством не обладает.

Лемма 1. *Пусть E и F — векторные пространства в двойственности. Тогда для того чтобы топология Макки $\tau(E, F)$ была $(\overline{L}_c)$-топологией, необходимо и достаточно, чтобы не существовало линейного функционала $f \in E^* \setminus F$, последовательностно непрерывного в топологии $\tau(E, F)$.*

Доказательство. Необходимость вытекает непосредственно из предложения 10 работы [5]. Пусть S — пространство $(\overline{L}_c)$ и f — линейное отображение S в локально выпуклое пространство H, переводящее каждую сходящуюся последовательность из S в сходящуюся последовательность в H. Тогда f — непрерывно.

Докажем достаточность. Пусть $\tau(E, F)$ не является $\overline{L}_c$-топологией. Пусть β — сильнейшая из локально выпуклых топологий, содержащих тот же набор сходящихся последовательностей, что и $\tau(E, F)$. Так как β строго сильнее топологии Макки $\tau(E, F)$, сильнейшей из локально выпуклых топологий, согласующихся с двойственностью пространств E и F, то существует $f \in E'_\beta \setminus F$. Поскольку f непрерывен в топологии β, то он непрерывен на всех сходящихся в этой топологии последовательностях. А так как наборы сходящихся последовательностей в топологиях β и $\tau(E, F)$ совпадают, то f последовательностно непрерывен и в топологии $\tau(E, F)$. Лемма доказана.

Пусть A — непустое множество, $m(A)$ и $l(A)$ — соответственно пространства всех ограниченных и всех безусловно суммируемых функций на множестве A [6, с. 52]. Эти пространства находятся в двойственности относительно билинейной формы: $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} x(\alpha)\, y(\alpha)$, где $x \in m(A)$, $y \in l(A)$.

Кроме того, их можно рассматривать как банаховы пространства [6, с. 53], и в этом случае $m(A)$ отождествимо с нормированным сопряженным к $l(A)$ пространством [6, с. 54].

Лемма 2. *Для того чтобы последовательность из $m(A)$ $\{x_n\}_1^\infty$ сходилась в топологии $\sigma(m(A), l(A))$, необходимо и достаточно, чтобы $\{x_n\}_1^\infty$ была равномерно ограничена и сходилась в топологии простой сходимости.*

Доказательство. Необходимость следует сразу же из теоремы Банаха — Штейнгауза [7, с. 108]. Докажем достаточность. Пусть существует C такое, что для любых n и α справедливо $|x_n(\alpha)| < C$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha) = x_0(\alpha)$.

Рассмотрим произвольный $y \in l(A)$ и покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{\alpha\in A} (x_n(\alpha) - x_0(\alpha))\, y(\alpha) \right| = 0.$$

Так как $y \in l(A)$, то существует лишь счетное число α_j таких, что $y(\alpha_j) \neq 0$, причем $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |y(\alpha_j)| < \rho$ [8, с. 38, 40]. Отсюда, существует p такое, что

$$\sum_{j=p}^{\infty} |y(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha_j) = x_0(\alpha_j)$, то существует N такое, что для любых $n \geqslant N$

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant p-1} |x_n(\alpha_j) - x_0(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2M(p-1)}, \text{ где } M = \sup_{\alpha\in A} |y(\alpha)|.$$

Кроме того,

$$\left| \sum_{\alpha\in A} (x_n(\alpha) - x_0(\alpha))\, y(\alpha) \right| \leqslant \sum_{\alpha\in A} |(x_n(\alpha) - x_0(\alpha)|\, |y(\alpha)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p-1} M \frac{\varepsilon}{2M(p-1)} + \sum_{j=p}^{\infty} |x_n(\alpha_j) - x_0(\alpha_j)|\, |y(\alpha_j)| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Каждая последовательность из $m(A)$, сходящаяся в топологии $\sigma(m(A), l(A))$, сходится и в топологии $\tau(m(A), l(A))$.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму для последовательностей, сходящихся к нулю. Пусть $\{x_n\}_1^\infty$ сходится к 0 в топологии $\sigma(m(A), l(A))$, но не сходится к нулю в топологии $\tau(m(A), l(A))$. Тогда из свойств топологии Макки [6, с. 166] существует выпуклое уравновешенное компактное в $\sigma(l(A), m(A))$ множество $K \subset l(A)$ и последовательность из $m(A)$ $\{x_{n_p}\}_{p=1}^\infty$ такая, что для любого p $x_{n_p} \notin K^0$, где K^0 — поляра множества K. Так как $x_{n_p} \in K^0$, то существует $y_p \in K$ такой, что

$$\left| \sum_{\alpha\in A} x_{n_p}(\alpha)\, y_p(\alpha) \right| > 1$$

для любого p. Получили последовательность $\{y_p\}_1^\infty \subset K$.

Множество K в топологическом векторном пространстве называется секвенциально компактным, если из любой его последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из K [7, с. 236]. По теореме Шмульяна — Эберлейна [6, с. 90], в банаховом пространстве слабая компактность влечет секвенциальную компактность в слабой топологии; $\sigma(l(A), m(A))$ — слабая топология банахова пространства $l(A)$, поэтому K — слабо секвенциально компактно, и из $\{y_p\}_1^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{y_k\}_1^\infty$, сходящуюся в топологии $\sigma(l(A), m(A))$ к некоторому $y_0 \in K$. Но в $l(A)$ каждая сходящаяся в топологии $\sigma(l(A), m(A))$ последовательность сходится и в нормированной топологии [6, с. 59], т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in A} |y_k(\alpha) - y_0(\alpha)| = 0.$$

Возьмем подпоследовательность $\{x_k\}_1^\infty$ из $\{x_{n_p}\}_{p=1}^\infty$, соответствующую последовательности $\{y_k\}_1^\infty$. Имеем

$$\left|\sum_{\alpha\in A} x_k(\alpha) y_0(\alpha)\right| \geqslant \left|\sum_{\alpha\in A} x_k(\alpha) y_k(\alpha)\right| - \left|\sum_{\alpha\in A} (y_k(\alpha) -\right.$$

$$\left. - y_0(\alpha)) x_k(\alpha)\right| \geqslant 1 - \sup|x_k(\alpha)| \, \|y_k - y_0\| \geqslant 1 - C\varepsilon,$$

$\{x_k\}_1^\infty$, а следовательно, и $\{x_n\}_1^\infty$ не сходится к нулю в топологии $\sigma(m(A), l(A))$. Лемма доказана.

Теорема. *На множестве A невозможно определить меру Банаха — Куратовского тогда и только тогда, когда $\tau(m(A), l(A))$ — $(\overline{L}_c)$-топология.*

Доказательство. Пусть на множестве A определена мера Банаха — Куратовского μ. Ее можно предполагать неотрицательной [9, с. 159]. Так как для любого вещественного C и $x \in m(A)$ множества $E(x, C) = \{\alpha \in A : x(\alpha) > C\}$ μ-измеримы, то x — μ-измеримая функция. Поскольку на множествах конечной меры ограниченные измеримые функции суммируемы, то на $m(A)$ определен интеграл Лебега J по мере μ. J как линейный функционал над $m(A)$ не отождествим ни с каким $y \in l(A)$, ибо для любого $y \in l(A)$ существует

$$x(\alpha) = \begin{cases} 0, & y(\alpha) \neq 0 \\ 1, & y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

и $\langle x, y\rangle = 0$, а $J(x) = 1$. Покажем, что J — последовательностно непрерывный функционал на $m(A)$ в топологии $\sigma(m(A), l(A))$.

Пусть существует последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, сходящаяся к 0 в топологии $\sigma(m(A), l(A))$, но $|J(x)| > \varepsilon$ для всех n. Но $x_n = x_n^+ - x_n^-$, где

$$x_n^+(\alpha) = \frac{|x_n(\alpha)| + x_n(\alpha)}{2},$$

$$x_n^-(\alpha) = \frac{|x_n(\alpha)| - x_n(\alpha)}{2}.$$

Так как

$$|J(x_n^+)| + |J(x_n^-)| \geqslant |J(x_n)| > \varepsilon,$$

то для каждого n либо $\left|J(x_n^+)\right| > \frac{\varepsilon}{2}$, либо $\left|J(x_n^-) > \frac{\varepsilon}{2}\right.$. Существует подпоследовательность $\{x_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ такая, что $J(x_p^+) > \frac{\varepsilon}{2}$ (для определенности взяли «плюс»). Пусть для каждого p

$$x_{n_p}(\alpha) = x_p(\alpha) \text{ и } A_p = \left\{\alpha \in A : x_p^+(\alpha) > \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

По лемме 2 существует C такое, что $|x_p(\alpha)| < C$ для любого p. Тогда для любого p

$$\mu(A_p)\, C \geqslant \mu(A_p) \sup_{\alpha \in A} x_p^+(\alpha) \geqslant \int_{A_p} x_p^+(\alpha)\, d\mu = \int_A x_p^+(\alpha)\, d\mu -$$

$$- \int_{A \setminus A_p} x_p^+(\alpha)\, d\mu \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \mu(A \setminus A_p) \sup_{\alpha \in A \setminus A_p} x_p^+(\alpha) >$$

$$> \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4},$$

т. е.

$$\mu(A_p) > \delta, \text{ где } \delta = \frac{\varepsilon}{4C} > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$T(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} \chi_{A_p}(\alpha).$$

Эта функция принимает лишь конечные значения, в противном случае существует некоторое $\alpha_0 \in A$, принадлежащее бесконечному числу A_p. Значит, для бесконечного числа индексов будет выполняться неравенство

$$|x_n(\alpha_0)| > \frac{\varepsilon}{4},$$

т. е. $\{x_n(\alpha)\}_1^{\infty}$ не сходится к нулю даже в топологии простой сходимости.

Рассмотрим множества

$$B_n = \{\alpha \in A : n \leqslant T(\alpha) < n+1\},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ B_m \cap B_n = \varnothing,$$

если $m \neq n$, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n = A$. Отсюда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = 1$, т. е. существует N такое, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) < \frac{\delta}{2}.$$

На множестве $D = A \setminus \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_n$ функция $T(\alpha)$ принимает значения, не превосходящие N, т. е.

$$\int\limits_D T(\alpha)\, d\mu \leqslant N\mu(D) \leqslant N.$$

С другой стороны,

$$\mu(A_p \cap D) = \mu(A_p) - \mu\left(A_p \cap \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n\right)\right) > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2};$$

$$\int\limits_D T(\alpha)\, d\mu = \int\limits_D \sum_{p=1}^{\infty} \chi_{A_p \cap D}(\alpha)\, d\mu = \sum_{p=1}^{\infty} \mu(A_p \cap D) > \frac{\delta}{2} \sum_{1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Противоречие. По лемме 3 J последовательно непрерывен и в топологии $\tau(m(A), l(A))$. Так как $J \notin l(A)$, то по лемме 1 $m(A)$ с топологией $\tau(m(A), l(A))$ не является пространством $(\overline{L}_c)$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\tau(m(A), l(A))$ не является $\overline{L}_c$-топологией. По лемме 1 существует последовательно непрерывный в $\tau(m(A), l(A))$ линейный функционал f, не принадлежащий $l(A)$. Пусть $X \subset A$. Положим

$$\tilde{\mu}(X) = f(\chi_X),$$

$\tilde{\mu}$ — счетно-аддитивная мера. Действительно, пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \subset X_{n+1}$. Тогда для любых n и α $|\chi_{X_n}(\alpha)| \leqslant 1$ и последовательность $\{\chi_{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в топологии простой сходимости к χ_X. По лемме 2 $\{\chi_{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к χ_X и в топологии $\sigma(m(A), l(A))$. А так как f — последовательно непрерывен в топологии $\sigma(m(A), l(A))$, то имеем

$$\tilde{\mu}(X) = f(\chi_X) = f\left(\lim_{n\to\infty} \chi_{X_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(\chi_{X_n}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(X_n).$$

Пусть множество H определено так:

$$H = \left\{\alpha \in A : \tilde{\mu}(\alpha) \neq 0\right\}.$$

Из счетно-аддитивности $\tilde{\mu}$ следует, что H не более чем счетно и $\sum\limits_{\alpha\in H} \left|\tilde{\mu}(\alpha)\right| < \infty$. Рассмотрим меру, определенную для всех $X \subset A$:

$$\mu_1(X) = \tilde{\mu}(X) - \sum_{\alpha \in X \cap H} \tilde{\mu}(\alpha).$$

Эта мера также счетно-аддитивна и, кроме того, для любого $\alpha \in A$ $\mu_1(\{\alpha\}) = 0$. Так как $f \notin l(A)$, то μ_1 — ненулевая мера. Следовательно, существует множество $B \subset A$ такое, что $\mu_1(B) \neq 0$.

Для любого $X \subset A$ положим

$$\mu(X) = \frac{\mu_1(X \cap B)}{\mu(B)}.$$

Очевидно, что мера μ — счетно-аддитивна и $\mu(\{\alpha\}) = 0$ для любого $\alpha \in A$. Наконец,

$$\mu(A) = \frac{\mu_1(A \cap B)}{\mu_1(B)} = 1.$$

Следовательно, μ — мера Банаха — Куратовского.
Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Д. Головину за постановку задачи и руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banach S., Kuratowski C. Surune generalisation du probleme dela mesure.— «Fund. math.», 1929, t. XIV, p. 127—131.
2. Banach S. Uber additive Massfunktionen in abstrakten Mengen.—«Fund. math.», 1930, t. XV, 1417—150.
3. Ulam St. Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre.— «Fund. Math.», 1930, t. XVI, p. 141—150.
4. Mackey G. W. Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices. — «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, vol. 50, p. 719—722.
5. Себаштьян-и-Силва Ж. О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях.— В сб.: Математика, 1957, вып. 1, с. 60—77.
6. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 232 с.
7. Шеффер Х. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 359 с.
8. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М., «Мир», 1967. 266 с.
9. Шилов Г. Е., Гуревич В. Л. Интеграл, мера, производная. М., «Наука», 1967. 219 с.

Поступила 4 июля 1973 г.