УДК 513.881

И. И. ЗУСМАНОВСКИЙ, В. Э. КАНЦЕЛЬСОН,
В. В. МЕНЬШИКОВ

ОБ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе предлагается альтернирующий метод построения решения краевой задачи для эллиптико-параболического уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + P(x) \quad (x \in G), \qquad (1)$$

G — область в R^n, причем[1] $\overline{G} = \overline{G}_1 \cup \overline{G}_2$, где $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, G_1 и G_2 — открытые множества с кусочно-гладкими границами. Относительно коэффициентов λ, ρ, k предполагаем следующее: $\lambda_{\min} \leqslant \lambda(x) \leqslant \lambda_{\max}$, $\lambda_{\min} > 0$, $\lambda_{\max} < \infty$ — константы; $k(x) = \lambda(x)$ $(x \in G_1)$ $k(x) = 0$ $(x \in G_2)$ $\rho(x) = 0$ $(x \in G_1)$, $\rho(x) \geqslant 0$, $\rho(x) \not\equiv 0$ — ограниченная функция $(x \in G_2)$.

Для уравнения (1) ставятся краевые условия третьего рода

$$\beta \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \chi \quad (x \in \partial G), \tag{2}$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, χ — некоторые функции на ∂G. Отметим, что мы не требуем, чтобы всюду на ∂G выполнялось условие $\alpha + \beta > 0$: так как уравнение (1) является эллиптико-параболическим, то краевое условие ставится не на всей границе ∂G, а лишь на ее части (там, где краевое условие не ставится, полагаем $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\chi = 0$).

Ниже используются обозначения

$$u_j(x) = u(x), \quad \lambda_j(x) = \lambda(x) \quad (x \in G_j), \quad j = 1, 2;$$

$\dfrac{\partial}{\partial n_j}$ — производная по внешней относительно G_j нормали к ∂G_j; через Γ обозначаем поверхность раздела G_1 и G_2: $\Gamma = \partial G_1 \cap \partial G_2$. Если $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ — точка R^n, то $x = (x^*, x_n)$, где $x^* = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ — точка R^{n-1}. Если $h(x)$ — функция от x, то

$\operatorname{div} h = \sum\limits_{l=1}^{n} \dfrac{\partial n}{\partial x_l}$, а

$$\operatorname{div}^* h = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x_l}, \quad \operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial h}{\partial x_n}\right),$$

$$\operatorname{grad}^* h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}\right).$$

Условия на λ, ρ, k означают, что функция $u(x)$ является в G_1 решением дивергентного эллиптического уравнения

$$\operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{grad} u_1) + P = 0 \quad (x \in G_1)^2, \tag{3}$$

в G_2 — решением параболического уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = \operatorname{div}^* (\lambda_2 \operatorname{grad}^* u_2) \quad (x \in G_2), \tag{4}$$

[1] Если 0 — множество в R^p, то здесь и далее мы обозначаем через $\overline{0}$ его замыкание, а через $\partial 0$ — его границу относительно R^p. Черта над буквой, обозначающей функцию-значок комплексного сопряжения.

[2] $P(x)$ — достаточно гладкая функция, без ограничения общности полагаем $P(x) = 0$ $(x \in G_2)$.

а на Γ выполняются условия стыковки:

$$u_1 = u_2; \ \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \ (x \in \Gamma). \tag{5}$$

Мы рассматриваем случай, когда область G имеет несколько специальный вид.

Предложения и обозначения, относящиеся к областям. Пусть $D \subset R^{n-1}$ — некоторое открытое множество с кусочно-гладкой границей, состоящее из конечного числа связных компонент; L_{in}, L_{out}, $L_{\text{in}} < L_{\text{out}}$ — некоторые числа. Предполагаем, что G_2 является цилиндром с образующими, параллельными оси x_n, и поперечным сечением D: $G_2 = D \times [L_{\text{in}}, \ L_{\text{out}}]$. Через B_{in}, B_{out} обозначаем основания цилиндра G_2:

$$B_{\text{in}} = D \times \{L_{\text{in}}\}, \ B_{\text{out}} = D \times \{L_{\text{out}}\},$$

а через S — его боковую поверхность: $S = \partial D \times [L_{\text{in}}, \ L_{\text{out}}]$.

Предполагаем, что функция ρ не зависит от x_n: $\rho = \rho(x^*)$. Область G_1 может иметь достаточно произвольную форму. Обозначим $\Gamma_1 = \partial G_1/\Gamma$, $\Gamma_2 = \partial G_2/(\Gamma \cup B_{\text{out}})$. Предполагаем, что поверхности Γ_1 и Γ пересекаются, нигде не касаясь друг друга, а G_1 и G_2 примыкают друг к другу так, что $\Gamma \subset S$. Кроме того, выполняется следующее условие, которое мы называем «условие δ». Пусть $\Gamma(x_n) = \{x^* \in R^{n-1} : x = (x^*, x_n) \in \Gamma\}$, здесь $x_n \in [L_{\text{in}}, \ L_{\text{out}}]$. Таким образом, $\Gamma(x_n) \subset \partial D$. Условие δ заключается в том, что существует $\delta > 0$, такое, что для любой связной компоненты D_l множества D и для любого $x_n \in [L_{\text{in}}, \ L_{\text{out}}]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Gamma(x_n) \cap \partial D_l} dV_{n-2}(x^*) \geqslant \delta. \tag{δ}$$

Предположения относительно граничных условий. Через l обозначается граничное дифференциальное выражение

$$lu = \beta \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \ (x \in \partial G).$$

Предполагаем, что

$$\alpha(x) \geqslant 0, \ \alpha(x) \not\equiv 0 \ (x \in \Gamma_1). \tag{6}$$

В каждой точке $x \in \Gamma_1$ функция $\beta(x)$ может принимать только одно из двух значений:

$$\beta(x) = \lambda_1(x) \text{ или } \beta(x) = 0 \ (x \in \Gamma_1), \tag{7}$$

$$\alpha(x) = 1, \ \beta(x) = 0 \ (x \in B_{\text{in}}), \tag{8}$$

$$\alpha(x) = 0, \ \beta(x) = 1 \ (x \in S \setminus \Gamma). \tag{9}$$

Мы нигде в этой работе не делаем явных предположений о гладкости коэффициентов уравнения (1) и краевых условий (2) и о гладкости границ ∂G_1 и ∂G_2. Предполагаем, что эти коэффициенты и границы таковы, что существует решение $u(x)$ задачи (2)—(5), удовлетворяющее условиям

$$\int_{G_1} \lambda(x)\,|\operatorname{grad} u_1(x)|^2\, dV_n(x) < \infty;$$

$$\int_{G_2} \lambda(x)\,|\operatorname{grad}^* u_2(x)|^2\, dV_n(x) + \int_{B_{\text{out}}} \rho(x^*)\,|u_2(x)|^2\, dV_{n-1} < \infty.$$

В данной работе доказывается сходимость к решению задачи (1)—(2) альтернирующего итерационного процесса в предположении, что такое решение существует. Интерес к задаче (1)—(2) возник в связи с одной теплофизической задачей [2, гл. XII, § 3]. Функция $u(x)$ описывает стационарное распределение температуры в системе G_1, G_2, где G_1 — тело, охлаждаемое стационарным ламинарным потоком вязкой жидкости, текущей по каналу (или по системе каналов) в положительном направлении оси x_n. При этом λ_1 — коэффициент теплопроводности тела; $\lambda_2 = \text{const}$ —коэффициент теплопроводности жидкости; P — мощность, рассеиваемая в теле; $\rho(x^*) = c\gamma v(x^*)$, где c, γ, v — удельная теплоемкость, плотность и профиль скорости жидкости. На B_{in} задается входная температура $\chi(x^*)$ потока.

Предлагаемый нами метод построения решения краевой задачи (2)—(5) в области G заключается в осуществлении итерационного процесса, при котором поочередно решаются краевые задачи то в области G_1, то в области G_2 при специально подобранных граничных условиях на Γ.

Последовательности $\{u_1^{(k)}\}$, $\{u_2^{(k)}\}$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$ приближений к решению u_1, u_2 задач (2)—(5) строятся рекуррентно посредством последовательного построения решений краевых задач:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\lambda(x)\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_l}\right) + P(x) = 0 & (x \in G_1); \\ l u_1^{(k)} = \chi & (x \in \Gamma_1); \\ \lambda_1 \dfrac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n_1} + \sigma u_1^{(k)} = \varphi^{(k)} & (x \in \Gamma), \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \rho(x^*)\dfrac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_n} = \operatorname{div}^*(\lambda_2 \operatorname{grad}^* u_2^{(k)}(x)); \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x \in G_2) \\ l u_2^{(k)} = \chi \qquad\qquad\quad (x \in \Gamma_2); \\ u_2^{(k)} = u_1^{(k)} \qquad\quad\;\, (x \in \Gamma). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\varphi^{(1)}$ — произвольная достаточно гладкая функция,

$$\varphi^{(k)} = (1-t)\left[-\lambda_2 \frac{\partial u_2^{(k-1)}}{\partial n_2} + \sigma u_2^{(k-1)}\right] + \\ + t\varphi^{(k-1)} \quad (x \in \Gamma),\ k = 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

t — некоторый вещественный параметр, обеспечивающий и регулирующий сходимость итерационного процесса; $\sigma \geqslant 0$ — некоторая ограниченная функция.

С вычислительной точки зрения предлагаемый процесс целесообразно использовать в ситуации, когда геометрия области G_1, функция λ_1 и граничные условия на Γ_1 таковы, что позволяют эффективно решать (например, в рядах Фурье) возникающие в G_1 краевые задачи. Это имеет место в частном, но распространенном случае, когда область G_1 ограничена координатными поверхностями, фунция λ зависит только от одной координаты, а коэффициенты граничных условий постоянны на каждой из координатных граничных поверхностей. Функция $\rho(x^*)$ обычно не является константной, и строить решение краевых задач (11) в G_2 в рядах Фурье не представляется возможным. Для решения задач (11) целесообразно использовать экономичные сеточные методы. Акцентируем внимание на том, что размерность эллиптического оператора правой части уравнения (4) в G_2 на единицу меньше, чем размерность эллиптического оператора уравнения (3) в G_1 (последняя равна $\dim R^n$), и что сеточным методом приходится пользоваться лишь в области G_2. Это позволяет эффективно решать трехмерные задачи.

Оказывается, что существует интервал значений параметра t, при которых последовательности $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ при $k \to \infty$ сходятся к решениям u_1, u_2 задачи (1)—(2). Этот интервал зависит от геометрии областей G_1, G_2, граничных условий и функций ρ, λ.

Исследуем сходимость итерационного процесса. Пусть $v_i^{(k)}(x) = u_i(x) - u_i^{(k)}(x)$ $(x \in G_i)$ $i = 1,2$. Сходимость последовательностей $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ к u_1, u_2 эквивалентна сходимости последовательностей $v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$ к нулю. Заметим, что если в качестве функции φ_1, определяющей первое приближение, взять $\varphi^{(1)} = \left[\lambda_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} + \sigma u_1\right]/\Gamma$, то при всех k будут выполняться равенства $u_1^{(k)} \equiv u_1$, $u_2^{(k)} \equiv u_2$. Вследствие этого обстоятельства функции $v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$ связаны следующими рекуррентными соотношениями:

$$\operatorname{div}\left(\lambda_1 \operatorname{qrad} v_1^{(k)}\right) = 0 \ \ (x \in G_1); \ \ l v_1^{(k)} = 0 \ \ (x \in \Gamma_1);$$

$$\lambda_1 \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial n_1} + \sigma v_1^{(k)} = f^{(k)} \ \ (x \in \Gamma), \tag{13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho(x^*)\, \partial v_2^{(k)}}{\partial x_n} = \operatorname{div}^* \left(\lambda_2 \operatorname{qrad}^* v_2^{(k)}\right) \ \ (x \in G_2); \\ l v_2^{(k)} = 0, \ \ (x \in \Gamma_2); \\ v_2^{(k)} = v_1^{(k)} (x \in \Gamma). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь функция $f^{(1)}$ связана с фигурировавшей ранее функцией $\varphi^{(1)}$ соотношением $f^{(1)} = \left[\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \sigma u_1\right] / \Gamma - \varphi^{(1)}$, а функция $f^{(k)} = (k = 2, 3, \ldots)$ выражается формулой

$$f^{(k)} = (1 - t)\left[-\lambda_2 \frac{\partial v_2^{(k-1)}}{\partial n_2} + \sigma v_2{}^{(k-1)}\right] + t f^{(k-1)} \ (x \in \Gamma). \tag{15}$$

Опишем оператор A_t перехода от $f^{(k-1)}$ к $f^{(k)} : f^{(k)} = A_t f^{(k-1)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. С этой целью введем в рассмотрение оператор A, действующий в пространстве функций, заданных на Γ. Пусть $f(x)$ — заданная на Γ функция. Решим сначала в G_1 краевую задачу:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_l} v_{1,f}\right) = 0 \ (x \in G_1), \tag{16}$$

$$l v_1, \ f = 0 \ (x \in \Gamma_1), \tag{17}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial v_{1,f}}{\partial n_1} + \sigma v_{1,f} = f\,(x \in \Gamma), \tag{18}$$

а затем в G_2 — краевую задачу

$$\rho\,(x^*) \frac{\partial v_{2,f}}{\partial x_n} = \operatorname{div}^* (\lambda_2 \operatorname{qrad}^* v_{2,f}) \ (x \in G_2), \tag{19}$$

$$l v_{2,f} = 0 \ (x \in \Gamma_2), \tag{20}$$

$$v_{2,f} = v_{1,f} \ (x \in \Gamma). \tag{21}$$

Положим по определению

$$(Af)(x) = \left[-\lambda_2 \frac{\partial v_{2,f}}{\partial n_2} + \sigma v_{2,f}\right](x) \ (x \in \Gamma). \tag{22}$$

Из (13)—(15) и определения оператора A следует, что оператор A_t перехода от $f^{(k-1)}$ к $f^{(k)}$ весьма просто выражается через оператор A:

$$A_t = (1 - t)A + tI. \tag{23}$$

Здесь I — тождественный оператор в пространстве функций на Γ.

Докажем сходимость последовательности $f^{(k)}$ к нулю в норме, порождаемой описываемым ниже скалярным произведением. Пусть f_1 и f_2 — функции, заданные на Γ (достаточно гладкие). Решим краевые задачи

$$\operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{qrad} v_{1,f_j}) = 0 \ (x \in G_1); \ l v_{1,f_j} = 0 \ (x \in \Gamma_1), \ (j = 1, 2);$$

$$\lambda_1 \frac{\partial v_{1,f_j}}{\partial n_1} + \sigma v_{1,f_j} = f_j \ (x \in \Gamma). \tag{24}$$

Положим теперь по определению скалярное произведение f_1 и f_2 равным

$$<f_1, f_2> = \int_{\Gamma} v_{1, f_1}(x)\overline{f_2(x)}dV_{n-1}. \tag{25}$$

Аналогично (1) нетрудно показать, что формулы (24) и (25) действительно задают скалярное произведение, и преобразовать (25) к виду

$$<f_1, f_2> = \int_{G_1} \lambda_1(x) \operatorname{grad} v_{1, f_1}(x) \operatorname{qrad} \bar{v}_{1, f_2}(x)\, dV_n +$$
$$+ \int_{\Gamma_1^1} \alpha(x)\, v_{1, f_1} \overline{v_{1, f_2}} dV_{n-1} + \int_{\Gamma} \sigma v_{1, f_1} \bar{v}_{1, f_2} dV_{n-1}. \tag{26}$$

Для нормы, порождаемой скалярным произведением (24), (25), имеет место формула

$$\|f\|^2 = \int_{G_1} \lambda_1 |\operatorname{grad} v_{1, f}|^2 dV_n + \int_{\Gamma_1'} \alpha |v_{1, f}|^2 dV_{n-1} + \int_{\Gamma} \sigma |v_{1, f}|^2 dV_{n-1}. \tag{27}$$

Здесь и далее через dV_r обозначается элемент r-мерного евклидова объема; через Γ_1' обозначается то подмножество множества Γ_1, на котором $\beta(x) = \lambda(x)$ (см. [1]).

Теорема 1. *При сделанных предположениях относительно краевой задачи* (2)—(5) *существует такой интервал* (t_0, 1) *значений t, что при каждом t из этого интервала последовательности функций* $\{u_1^{(k)}\}$, $\{u_2^{(k)}\}$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, *строящиеся посредством итерационного процесса* (10)—(12), *сходятся к решению* u_1, u_2 *задачи* (2)—(5) *по норме* (27).

Теорема 1 непосредственно вытекает из определения (13)—(15) функций $v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$, определения оператора A_t и следующей ниже теоремы 2. Подобно [1] показывается, что из сходимости $f^{(k)} \to 0$ в указанной норме следует сходимость $V_1^{(k)} \to 0$ в норме $W_2^1(G_1)$ и $V_2^{(k)} \to 0$ — в норме $L_2(G_2)$.

Теорема 2. *Существует такой интервал* (t_0, 1) *значений параметра t, что при всех t из этого интервала будет выполняться неравенство*

$$\lim_{k\to\infty} \| A_t^k \|^{1/k} < 1.$$

При доказательстве теоремы 2 мы существенно используем следующие две леммы.

Лемма 1. *Существует константа $C < 1$ такая, что для вещественной части квадратичной формы оператора A выполняется неравенство* $\operatorname{Re} < Af, f > \leqslant C \|f\|^2$.

Лемма 2. *Оператор A ограничен по норме* (27).

Мы докажем сначала теорему 2, считая леммы 1 и 2 справедливыми, а затем приведем доказательство этих лемм.

Доказательство теоремы 2. Согласно (23), спектр σ_{A_t} оператора A_t связан со спектром σ_A оператора A соотношением

$$\sigma_{A_t} = (1-t)\,\sigma_A + t\,\{1\}. \tag{28}$$

Преобразование $\xi \to (1-t)\xi + t$ комплексной плоскости является гомотетией с центром гомотетии — точкой $\xi = 1$ и коэффициентом гомотетии, равным $(1-t)$. Из лемм 1 и 2 следует, что спектр σ_A является ограниченным множеством, лежащим строго внутри полуплоскости $\operatorname{Re}\xi < 1$. Окружность $|\xi| = 1$ касается границы этой полуплоскости — прямой $\operatorname{Re}\xi = 1$ в точке $\xi = 1$ — центре гомотетии. Из (28) и элементарных геометрических соображений теперь следует, что существует $t_0 < 1$ такое, что при всех $t \in (t_0,\ 1)$ множество σ_{A_t} будет содержаться строго внутри круга $|\xi| < 1$. Обозначим $r_t = \sup\limits_{\xi \in \sigma_{A_t}} |\xi|$ — спектральный радиус оператора A.

Как мы установили, существует $t_0 > 1$ такое, что выполняется неравенство $r_t < 1$ для всех $t \in (t_0,\ 1)$. Утверждение теоремы 2 следует из этого неравенства и формулы Гельфанда $r_t = \lim\limits_{k\to\infty} \| A_t^{(k)} \|^{1/k}$

Доказательство леммы 1. Пусть $f(x)$ — заданная на Γ комплекснозначная функция. Согласно (21), (22), (24), (25), имеем

$$<f,\ Af> = -\int\limits_{\Gamma} \lambda_2 v_{2,f} \overline{\frac{\partial v_{2,f}}{\partial n_2}}\, dV_{n-1} + \int\limits_{\Gamma} \sigma\, |v_{2,f}|^2 dV_{n-1}. \tag{29}$$

Используя теорему Фубини, первую формулу Грина (в области D по переменным x^*)и уравнение (19), получаем

$$+\int\limits_{S} v_{2,f}(x)\, \lambda_2(x)\, \overline{\frac{\partial v_{2,f}}{\partial n_2}}(x)\, dV_{n-1}^{(x)} = \int\limits_{G_2} \lambda_2(x)\, |\operatorname{grad}^* v_2(x)|^2 dV_n +$$
$$+\int\limits_{D} \rho(x^*) \left\{ \int\limits_{L_{\text{in}}}^{L_{\text{out}}} v_{2,f}(x^*,\ x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} v_{2,f}(x^*,\ x_n)\, dx_n \right\} dV_{n-1}(x^*). \tag{30}$$

Используя граничные условия (20), (8), нетрудно получить

$$\operatorname{Re} \int\limits_{L_{\text{in}}}^{L_{\text{out}}} v_{2,f}(x^*,\ x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{v_{2,f}(x^*,\ \ x_n)}\ \ dx_n = \frac{1}{2} |v_{2,f}(x^*,\ L_{\text{out}})|^2. \tag{31}$$

Вследствие граничных условий (20), (9) интеграл в левой части (30) фактически берется не по S, а по Γ. Из (29), (30), (31), (21) теперь следует, что

$$\operatorname{Re}(Af,\ f) = -\int\limits_{G_2} \lambda_2 |\operatorname{grad}^* v_2|^2\, dV_n - 1/2 \int\limits_{B_{\text{out}}} \rho(x^*)\, |v_{2,f}|^2 dV_{n-1} +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} \sigma\, |v_{1,f}|^2 dV_{n-1}. \tag{32}$$

Вследствие условия (6) и условий, наложенных на область G_1, выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma}\sigma\,|v_{1,f}|^2 dV_{n-1} \leqslant C_1 \left\{\int_{G_1}\lambda_1\,|\operatorname{qrad} v_{1,f}|^2 dV_n + \int_{\Gamma_1}\alpha\,|v_{1,f}|^2 dV_{n-1}\right\}, \quad (33)$$

где $C_1 < \infty$ — константа, зависящая от геометрии области G_1, функций λ_1, α, β, σ. Из (33) и (26) следует, что выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma}\sigma\,|V_{1,f}|^2 dV_{n-1} \leqslant C < f, f >, C = \frac{C_1}{C_1+1} < 1. \quad (34)$$

Утверждение леммы 1 следует теперь из (32), (34).

Доказательство леммы 2. Для доказательства ограниченности оператора A достаточно показать, что для всех достаточно гладких f с $\|f\| = 1$ выполняется неравенство

$$\|Af\| \leqslant M, \quad (35)$$

где $M < \infty$ — константа, не зависящая от f.

Пусть f и g — произвольные (но фиксированные) достаточно гладкие функции на Г. Используя определение (24), (25) скалярного произведения и определения (16)—(22) оператора A, имеем

$$<g,\ Af> = -\int_{\Gamma} v_{1,g}\lambda_2 \overline{\frac{\partial v_{2,f}}{\partial n_2}}\, dV_{n-1} + \int_{\Gamma}\sigma v_{1,g}\bar{v}_{1,f} dV_{n-1}. \quad (36)$$

Согласно известным результатам о продолжении дифференцируемых функций, при наших предположениях относительно G_1 и G_2 для любой функции $w_1(x)$, принадлежащей пространству Соболева $W_2^1(G_1)$, найдется функция $w_2(x) \in W_2^1(G_2)$, удовлетворяющая условию $w_1(x) = w_2(x)\ (x \in \Gamma)$ и неравенству $\int_{G_2} |\operatorname{grad} \times$ $\times\, w_2|^2 dV_n \leqslant C \int_{G_1} \operatorname{grad} w dV_n$, где $C < \infty$ — константа, не зависящая от $w_1(x)$, а зависящая только от G_1 и G_2. Полагая $w_1 = v_{1,g}$, получим, что существует функция $w_g(x)$ в G_2, удовлетворяющая условию

$$w_g(x) = v_{1,g}(x)\ \ (x \in \Gamma) \quad (37)$$

и неравенству

$$\int_{G_2} |\operatorname{grad} w_g|^2 dV_n < C_2 \int_{G_1} |\operatorname{grad} v_{1,g}|^2\, dV_n, \quad (38)$$

где $C_2 < \infty$ — константа, не зависящая от g. На (36), (37), (20) и (9) следует, что

$$<Af,\ g> = -\int_{S}\lambda_2 \frac{\partial v_{2,f}}{\partial n_2}\bar{w}_g dV_{n-1} + \int_{\Gamma}\sigma v_{1,f}\bar{v}_{1,g} dV_{n-1} \quad (39)$$

Используя теорему Фубини, первую формулу Грина (в области D по переменным x^*) и уравнение (19), получим

$$\int\limits_S \lambda_2 \frac{\partial v_{2,f}}{\partial n_2} \overline{w}_g dV_{n-1} = \int\limits_{G_2} \lambda_2 \operatorname{grad}^* v_{2,f} \operatorname{grad}^* \overline{w}_g dV_n +$$

$$+ \int\limits_D \rho(x^*) \left\{ \int\limits_{L_{\text{in}}}^{L_{\text{out}}} \frac{\partial v_{2,f}}{\partial x_n} \overline{w}_g dx_n \right\} dV_{n-1}(x^*). \qquad (40)$$

Интегрируя по частям интеграл в фигурных скобках с учетом граничного условия для $V_{2,f}$ на B_{in} и используя (40), преобразуем (39) к виду

$$<Af,\ g> = -\int\limits_{G_2} \lambda_2 \operatorname{grad}^* v_{2,f} \operatorname{grad}^* \overline{w}_g dV_n +$$

$$+ \int\limits_{G_2} \rho(x^*) v_{2,f}(x^*,\ x_n) \frac{\overline{\partial w_g}}{\partial x_n}(x^*,\ x_n)\, dV_n - \int\limits_{B_{\text{out}}} \rho(x^*) v_{2,f} \overline{w}_g dV_{n-1} +$$

$$+ \int\limits_\Gamma \sigma v_{1,f} \overline{V}_{1,g} dV_{n-1}. \qquad (41)$$

Пусть ε — положительное, а в остальном произвольное пока число. Из (41) и неравенства Коши — Буняковского следует неравенство

$$|<Af,\ g>| \leqslant \varepsilon \Phi_1(f) + \frac{1}{\varepsilon} \Phi_2(g), \qquad (42)$$

где

$$\Phi_1(f) = \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_{G_2} \lambda_2 |\operatorname{grad}^* v_{2,f}|^2 dV_n + \int \rho |V_{2,f}|^2 dV_n + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{B_{\text{out}}} \rho |v_{2,f}|^2 dV_{n-1} + \int\limits_\Gamma \sigma |v_{1,f}|^2 dV_{n-1} \right\}, \qquad (43)$$

а

$$\Phi_2(g) = \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_{G_2} \lambda_2 |\operatorname{grad}^* w_g|^2 dV_n + \int\limits_{G_2} \rho \left| \frac{\partial w_g}{\partial x_n} \right|^2 dV_n + \int\limits_{B_{\text{out}}} \rho |w_g|^2 dV_{n-1} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Gamma \sigma |v_{1,g}|^2 dV_{n-1} \right\}. \qquad (44)$$

Оценим сверху $\Phi_1(f)$. После несложных преобразований с учетом условия (δ) имеем

$$\int\limits_{G_2} \rho |v_{2,f}|^2 dV_n \leqslant C_3 \left\{ \int\limits_\Gamma |v_{2,f}|^2 dV_{n-1} + \int\limits_{G_2} \lambda_2 |\operatorname{grad}^* v_{2,f}|^2 dV_n \right\}, \quad (45)$$

где $C_3 < \infty$ — константа, не зависящая от f, а зависящая лишь от геометрии области D, числа δ и функций ρ, λ. Из (32), (27) следует неравенство (46), и из (17), (6), (27) неравенство (47)

$$\int_{G_2} \lambda_2 |\operatorname{grad}^* v_{2f}|^2 dV_n + \frac{1}{2}\int_{B_{\text{out}}} \rho |v_{2,f}|^2 dV_{n-1} \leqslant |< Af, f >| + ||f||^2, \tag{46}$$

$$\int_{\Gamma} |v_{1,f}|^2 dV_{n-1} \leqslant C_4 ||f||^2, \tag{47}$$

где C_4 — константа, не зависящая от f, а зависящая только от геометрии области G, множества Γ и функций λ_1, α.

Из (43), (45)—(47), (21) следует неравенство

$$\Phi_1(f) \leqslant C\{|< Af, f >| + ||f||^2\}, \tag{48}$$

где $C < \infty$ — константа, не зависящая от f.

Оценим сверху $\Phi_2(g)$. Используя неравенство

$$\int_{B_{\text{out}}} |w_g|^2 dV_{n-1} \leqslant C_5 \left\{\int_{\Gamma} |w_g|^2 dV_{n-1} + \int_{G_2} |\operatorname{grad} w_g|^2 dV_n\right\},$$

условие (37), неравенство (38), определение нормы (27) и условие (6) из определения (44) функционала $\Phi_2(g)$, нетрудно получить

$$\Phi_2(g) \leqslant C||g||^2, \tag{49}$$

где $C < \infty$ — константа, не зависящая от g, причем можно считать, что константы C в (48) и (49) одинаковы. Из (42), (48), (49) следует неравенство

$$|< Af, g >| \leqslant \varepsilon C(||Af|| \cdot ||f|| + ||f||^2) + \frac{C}{\varepsilon}||g||^2, \tag{50}$$

где $C < \infty$ — константа, не зависящая от f и g, а $\varepsilon > 0$ — пока произвольная константа. Положим теперь

$$\varepsilon = \frac{1}{2C}$$

и воспользуемся тем, что $||Af|| = \sup |< Af, g >|$, где sup берется по любому плотному на сфере $||g|| = 1$ множеству (таким множеством у нас будет множество нормированных на единицу гладких функций g). Из неравенства (50) получим, что при всех гладких $fC||f|| = 1$ выполняется неравенство

$$||Af|| \leqslant \frac{1}{2}||Af|| + \left(\frac{1}{2} + 2C^2\right).$$

Так как $||Af|| < \infty$ при всех гладких f, то из последнего неравенства следует, что при всех гладких f с $||f|| = 1$ выполняется неравенство (35), где $M = (1 + 4C^2)$. Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кацнельсон В. Э., Меньшиков В. А. Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 17, Харьков, 1973, с. 206—215.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969. 114 с.

Поступила 7 июня 1974 г.