УДК 519.4

*ВУ КУОК ФОНГ*

# О КОНТИНУАЛЬНЫХ ЦЕПОЧКАХ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ

В задаче реализации различных классов мероморфных функций в рамках теории операторных узлов и линейных систем [1—3] важную роль играют семейства операторных узлов, обладающие специальным условием цепочки. Один пример такой цепочки был построен М. С. Лившицем в [3] и использован для реализации функций класса $N_\alpha$ М. М. Джрбашяна [4]. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении наиболее общего вида таких цепочек.

1. Рассмотрим пару гильбертовых пространств $H$, $E$ и четыре линейных ограниченных оператора: $T: H \to H$, $\Phi: E \to H$, $\widetilde{\Phi}: H \to E$, $K: E \to E$. Символ $A = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \widetilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$ называется линейным операторным узлом. Линейный операторный узел $A = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \widetilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$ называется сцеплением $A = A_1 \vee A_2$ узлов $A_i = \begin{pmatrix} T_i, & \Phi_i \\ \widetilde{\Phi}^i, & K_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2)$ с одинаковыми внешними пространствами $E_1 = E_2 = E$ и произвольными внутренними пространствами $H_1$, $H_2$, если выполнены условия:

$$T = T_1P_1 + T_2P_2 + \Phi_2\widetilde{\Phi}_1P_1;\ H = H_1 \oplus H_2,\ \Phi = \Phi_1 + \Phi_2K_1; \tag{1}$$

$$\widetilde{\Phi} = K_2\widetilde{\Phi}_1P_1 + \Phi_2P_2,\ K = K_2K_1,$$

где $P_1$, $P_2$ — ортопроекторы из $H$ на $H_1$, $H_2$ соответственно. Двупараметрическое семейство операторных узлов $A(t_1, t_2)$ $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ называется континуальной цепочкой, если для любых трех точек $t_1, t_2, t_3$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant l$

$$A(t_1, t_3) = A(t_1, t_2) \vee A(t_2, t_3). \tag{2}$$

Две континуальные цепочки $A_1(t_1, t_2)$ и $A_2(t_1, t_2)$ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор $U$ такой, что $T_2(t_1, t_2) = UT_1(t_1, t_2)U^{-1}$, $\Phi_2(t_1, t_2) = U\Phi_1(t_1, t_2)$, $\Phi_2(t_1, t_2) = \widetilde{\Phi}_1(t_1, t_2)U^{-1}$, $K_2(t_1, t_2) = K_1(t_1, t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$.

Если $\dim E = 1$ и $a$ — орт в $E$, то, очевидно, можно написать: $\Phi(ua) = uq$, $\widetilde{\Phi}x = (x, p)a$, $K(ua) = uka$ $(p, q, x \in H;\ u, k \in C^1)$.

2. Введем семейство линейных операторных узлов $L(t_1, t_2)$ с одномерным внешним пространством и с внутренним простран-

ством $L_S^2(t_1, t_2)$, где $S(t) = (\sigma_{ik}(t))_{i,k=1}^m$ —матричная функция распределения, полагая а) $T(t_1, t_2)f(x) = \chi(t_1, t_2)(x)B(x)f(x) + (\chi(t_1, x)f, q)\chi(t_1, t_2)(x)p(x)$; б) $p(t_1, t_2)(x) = \frac{1}{\varphi(t_1)}\chi(t_1, t_2)(x) \times p(x)$; в) $q(t_1, t_2)(x) = \varphi(t_2)\chi(t_1, t_2)(x)q(x)$; г) $k(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_2)}{\varphi(t_1)}$, где $B(x)$ — матрица-функция; $q(x), p(x) \in L_S^2(0, l)$. $\varphi(t)$— функция со значениями в $C^1$; $\varphi(t) \neq 0$ и $\chi(t_1, t_2)(x)$ — характеристическая функция интервала $(t_1, t_2)$. В дальнейшем это семейство будем называть модельным.

**Теорема.** *Модельное семейство операторных узлов образует континуальную цепочку. Обратно, если задана континуальная цепочка операторных узлов* $A(t_1, t_2)$ $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ *с одномерным внешним пространством* $E$ *и произвольными внутренними пространствами* $H(t_1, t_2)$, *то для того чтобы эта цепочка была унитарно эквивалентна модельной цепочке* $L(t_1, t_2)$, *достаточно, чтобы существовало подпространство* $G \subset H(0, l)$ *такое, что*

$$\dim G < +\infty; \quad \overline{Lin\{P(t_1, t_2)G, \ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l\}} = H(0, l), \tag{3}$$

*где* $P(t_1, t_2)$ — *ортопроектор из* $H(0, l)$ *на* $H(t_1, t_2)$.

Доказательство. Выполнение соотношений (2) для семейства узлов $L(t_1, t_2)$ непосредственно проверяется. Для того чтобы доказать вторую часть теоремы, предположим сначала, что $H(t_1, t_2) = L_S^2(t_1, t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ и покажем, что $A(t_1, t_2)$ имеют в точности вид *а—г*. Пункты *б*, *в* и *г* легко установить, положив $\varphi(t) = K(0, t)$, $q(x) = \frac{1}{\varphi(l)} q(0, l)(x)$, $p(x) = \varphi(0)p(0, l)(x)$. Наконец, проверим выполнения *а*. Положим $\tilde{T}(t_1, t_2)f(x) = T(t_1, t_2)f(x) - (\chi(t_1, x)f, q)\chi(t_1, t_2)(x)p(x)$. В силу соотношений (2) и условия (1) имеем

$$\tilde{T}(t_1, t_3)f(x) = \tilde{T}(t_1, t_2)\chi(t_1, t_2)(x)f(x) + \tilde{T}(t_2, t_3) \times \chi(t_2, t_3)(x)f(x). \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что все пространства $L_S^2(t_1, t_2)$ $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ инвариантны относительно $\tilde{T}(0, l)$ и, следовательно, все они приводят оператор $\tilde{T}(0, l)$. Пусть $f(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_m(x))$, где $\chi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ — характеристические функции интервала $\Delta_i$; поскольку $\tilde{T}(0, l)$ коммутирует с каждым $\chi_i(x)$, то:

$$\tilde{T}(0, l)f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2m}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mm}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \\ \\ \chi_m(x) \end{pmatrix},$$

где $a_{ik}(x)$ — $i$-я координатная функция вектор-функции $\tilde{T}(0, l) \times (0 \ldots . \ 010 \ldots . \ 0)$ (единица в строке на $k$-м месте).

По свойству однозначности непрерывного продолжения получим, что вообще $\widetilde{T}(0, l)$ —оператор умножения на матрицу-функцию

$$B(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2m}(x) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mm}(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $H(t_1, t_2)$ — произвольные гильбертовы пространства. Условие (3) обеспечивает существование в $H(0, l)$ самосопряженного оператора с конечно-кратным спектром (оператор с разложением единицы $H(t_1, t_2)$). Согласно теореме о канонической форме самосопряженного оператора (см. [5, § 86]), существует унитарный оператор $U$, переводящий $H(t_1, t_2)$ в $L_S^2(t_1, t_2)$ для всех $t_1$, $t_2$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$. Очевидно, что этот оператор переводит нашу цепочку в цепочку в $L_S^2(0, l)$. Попутно заметим, что $\dim G$ совпадает с порядком матрицы $S(t)$. Теорема доказана.

*Замечание*. Легко видеть, что для цепочек, унитарно эквивалентных модельной, условие (3) выполняется.

Приношу благодарность М. С. Лившицу за руководство.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966. 298 с.
2. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М., «Наука», 1970. 703 с.
3. Лившиц М. С. Линейно дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 4, с. 793—796.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области М., «Наука», 1966. 671 с.
5. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. 543 с.

*Поступила 14 июля 1975 г.*