УДК 519.4

ВУ КУОК ФОНГ

О КОНТИНУАЛЬНЫХ ЦЕПОЧКАХ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ

В задаче реализации различных классов мероморфных функций в рамках теории операторных узлов и линейных систем [1—3] важную роль играют семейства операторных узлов, обладающие специальным условием цепочки. Один пример такой цепочки был построен М. С. Лившицем в [3] и использован для реализации функций класса N_α М. М. Джрбашяна [4]. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении наиболее общего вида таких цепочек.

1. Рассмотрим пару гильбертовых пространств H, E и четыре линейных ограниченных оператора: $T: H \to H$, $\Phi: E \to H$, $\widetilde{\Phi}: H \to \to E$, $K: E \to E$. Символ $A = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \widetilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$ называется линейным операторным узлом. Линейный операторный узел $A = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \widetilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$ называется сцеплением $A = A_1 \vee A_2$ узлов $A_i = \begin{pmatrix} T_i, & \Phi_i \\ \widetilde{\Phi}^i, & K_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2)$ с одинаковыми внешними пространствами $E_1 = E_2 = E$ и произвольными внутренними пространствами H_1, H_2, если выполнены условия:

$$T = T_1P_1 + T_2P_2 + \Phi_2\widetilde{\Phi}_1P_1;\ H = H_1 \oplus H_2,\ \Phi = \Phi_1 + \Phi_2K_1; \tag{1}$$

$$\widetilde{\Phi} = K_2\widetilde{\Phi}_1P_1 + \Phi_2P_2,\ K = K_2K_1,$$

где P_1, P_2 — ортопроекторы из H на H_1, H_2 соответственно. Двупараметрическое семейство операторных узлов $A(t_1, t_2)$ $0 \leqslant t_1 < < t_2 \leqslant l$ называется континуальной цепочкой, если для любых трех точек t_1, t_2, t_3, $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant l$

$$A(t_1, t_3) = A(t_1, t_2) \vee A(t_2, t_3). \tag{2}$$

Две континуальные цепочки $A_1(t_1, t_2)$ и $A_2(t_1, t_2)$ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор U такой, что $T_2(t_1, t_2) = UT_1(t_1, t_2)U^{-1}$, $\Phi_2(t_1, t_2) = U\Phi_1(t_1, t_2)$, $\Phi_2(t_1, t_2) = \widetilde{\Phi}_1(t_1, t_2)U^{-1}$, $K_2(t_1, t_2) = K_1(t_1, t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$.

Если $\dim E = 1$ и a — орт в E, то, очевидно, можно написать: $\Phi(ua) = uq$, $\widetilde{\Phi}x = (x, p)a$, $K(ua) = uka$ $(p, q, x \in H;\ u, k \in C^1)$.

2. Введем семейство линейных операторных узлов $L(t_1, t_2)$ с одномерным внешним пространством и с внутренним простран-

ством $L_S^2(t_1, t_2)$, где $S(t) = (\sigma_{ik}(t))_{i,k=1}^m$ —матричная функция распределения, полагая а) $T(t_1, t_2) f(x) = \chi(t_1, t_2)(x) B(x) f(x) + (\chi(t_1, x) f, q) \chi(t_1, t_2)(x) p(x)$; б) $p(t_1, t_2)(x) = \frac{1}{\varphi(t_1)} \chi(t_1, t_2)(x) \times p(x)$; в) $q(t_1, t_2)(x) = \varphi(t_2) \chi(t_1, t_2)(x) q(x)$; г) $k(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_2)}{\varphi(t_1)}$, где $B(x)$ — матрица-функция; $q(x), p(x) \in L_S^2(0, l)$. $\varphi(t)$— функция со значениями в C^1; $\varphi(t) \neq 0$ и $\chi(t_1, t_2)(x)$ — характеристическая функция интервала (t_1, t_2). В дальнейшем это семейство будем называть модельным.

Теорема. *Модельное семейство операторных узлов образует континуальную цепочку. Обратно, если задана континуальная цепочка операторных узлов $A(t_1, t_2)$ $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ с одномерным внешним пространством E и произвольными внутренними пространствами $H(t_1, t_2)$, то для того чтобы эта цепочка была унитарно эквивалентна модельной цепочке $L(t_1, t_2)$, достаточно, чтобы существовало подпространство $G \subset H(0, l)$ такое, что*

$$\dim G < +\infty; \quad \overline{Lin\{P(t_1, t_2) G, \ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l\}} = H(0, l), \tag{3}$$

где $P(t_1, t_2)$ — ортопроектор из $H(0, l)$ на $H(t_1, t_2)$.

Доказательство. Выполнение соотношений (2) для семейства узлов $L(t_1, t_2)$ непосредственно проверяется. Для того чтобы доказать вторую часть теоремы, предположим сначала, что $H(t_1, t_2) = L_S^2(t_1, t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ и покажем, что $A(t_1, t_2)$ имеют в точности вид *а—г*. Пункты *б*, *в* и *г* легко установить, положив $\varphi(t) = K(0, t)$, $q(x) = \frac{1}{\varphi(l)} q(0, l)(x)$, $p(x) = \varphi(0) p(0, l)(x)$. Наконец, проверим выполнения *а*. Положим $\tilde{T}(t_1, t_2) f(x) = T(t_1, t_2) f(x) - (\chi(t_1, x) f, q) \chi(t_1, t_2)(x) p(x)$. В силу соотношений (2) и условия (1) имеем

$$\tilde{T}(t_1, t_3) f(x) = \tilde{T}(t_1, t_2) \chi(t_1, t_2)(x) f(x) + \tilde{T}(t_2, t_3) \times \chi(t_2, t_3)(x) f(x). \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что все пространства $L_S^2(t_1, t_2)$ $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant l$ инвариантны относительно $\tilde{T}(0, l)$ и, следовательно, все они приводят оператор $\tilde{T}(0, l)$. Пусть $f(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_m(x))$, где $\chi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ — характеристические функции интервала Δ_i; поскольку $\tilde{T}(0, l)$ коммутирует с каждым $\chi_i(x)$, то:

$$\tilde{T}(0, l) f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2m}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mm}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \\ \\ \chi_m(x) \end{pmatrix},$$

где $a_{ik}(x)$ — i-я координатная функция вектор-функции $\tilde{T}(0, l) \times (0 \ldots 010 \ldots 0)$ (единица в строке на k-м месте).