УДК 517.43

*П. В. ОСТАПЕНКО, В. Г. ТАРАСОВ*

# ОБ ОДНОКЛЕТОЧНОСТИ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве Банаха $B$, называется одноклеточным, если множество всех его инвариантных подпространств упорядочено в смысле теоретико-множественного вложения. Одноклеточный оператор (термин принадлежит М. С. Бродскому) является аналогом конечномерного оператора, матрица которого подобна клетке Жордана. Впервые пример одноклеточного оператора в бесконечномерном пространстве (гильбертовом) был приведен М. С. Бродским в [1]. Этим свойством, как выяснилось, обладает оператор интегрирования $V$, заданный в $L_2(0, 1)$ формулой

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Почти одновременно с М. С. Бродским одноклеточность оператора $V$ была доказана другими методами Л. А. Сахновичем [2] и Донохью [3]. Последний также доказал одноклеточность оператора $V$ в пространствах $C$ и $L_p\,(p \geqslant 1)$.

Основной целью настоящей работы является доказательство одноклеточности оператора $V$ в пространствах непрерывно дифференцируемых функций $C^N$, а также $W_p^N$.

Пусть $B = \{f(x)\}$ — банахово пространство, элементами которого являются суммируемые на $[0, 1]$ функции некоторого класса. Условимся обозначать через $B_0$ (соответственно $B_0^{(k)}$ и $B_\mu$, где $k = 1, 2, \ldots; 0 < \mu \leqslant 1$) подмножество всех функций из $B$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$ ($f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 0$ и $f(x) \equiv 0$ на $[0, \mu]$). Если $\varphi \in B$, то $B_\varphi$ будет означать замыкание (в метрике $B$) линейной оболочки $H_\varphi$ множества $\{\varphi, V\varphi, V^2\varphi, \ldots\}$. Наконец, через $\mu(\varphi)$ обозначим такое неотрицательное число, что

$$\int\limits_0^{\mu(\varphi)} |\varphi(x)|\, dx = 0, \quad \int\limits_0^{\mu(\varphi)+\delta} |\varphi(x)|\, dx > 0 \quad (\forall \delta > 0).$$

1. Пусть $B = C(0, 1)$ — пространство непрерывных функций с обычной метрикой. Очевидно, каждое из множеств $B_\mu$ ($0 \leqslant \mu \leqslant 1$) будет подпространством в $B$, инвариантным относительно оператора $V$. Следующая теорема описывает структуру подпространств $B_\varphi$ в $C(0, 1)$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi(x) \in B$, $\mu = \mu(\varphi)$. *Тогда*

$$B_\varphi = \begin{cases} B, & \textit{если } \varphi(0) \neq 0, \\ B_\mu, & \textit{если } \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что для некоторого $\varphi$ $B_\varphi \neq B$. Зафиксируем произвольный вектор $h \in B \setminus B_\varphi$ и рассмотрим линейный функционал $\Phi$, определенный на подпространстве, состоящем из векторов вида $\{\psi + \lambda h\}$ ($\psi \in B_\varphi$), равенствами

$$\Phi(\psi) = 0, \ \Phi(h) = 1, \ \Phi(\psi + \lambda h) = \Phi(\psi) + \lambda \Phi(h). \tag{2}$$

Так как функционал $\Phi$ ограничен, то по теореме Хана—Банаха его можно продолжить с сохранением линейности и ограниченности на все пространство $B$. Обозначим для простоты расширенный функционал снова через $\Phi$. Используя теорему об общем виде линейного функционала в пространстве $C$, запишем

$$\Phi(f) = \int\limits_0^1 f(x)\, d\rho(x), \tag{3}$$

где $\rho(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации, которую можно считать непрерывной слева в интервале $(0, 1)$ и нормированной условием $\rho(1) = 0$. Так как функционал $\Phi$ аннулируется на $B_\varphi$, то

$$\int\limits_0^1 V^n\varphi(x)\, d\rho(x) = 0 \ \ (n = 0, 1, \ldots).$$

Применяя формулу интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса и учитывая, что $[V^n\varphi(x)\rho(x)]_0^1 = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), получим равенства

$$\int\limits_0^1 \rho(x)\, d(V^n\varphi(x)) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

В равенствах (4) интеграл Стилтьеса можно преобразовать в интеграл Римана:

$$\int_0^1 \rho(x)\, V^{n-1}\varphi(x)\, dx = 0 \quad (n = 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5}$$

Воспользовавшись известной формулой для степеней оператора

$$V^{k+1}\varphi(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x t^k \varphi(x-t)\, dt,$$

запишем равенство (5) в виде

$$\int_0^1 \rho(x) \int_0^x t^{n-2}\varphi(x-t)\, dt dx = 0 \quad n = 2,\ 3,\ \ldots). \tag{6}$$

Меняя в (6) порядок интегрирования, получим

$$\int_0^1 t^{n-2}\int_t^1 \rho(x)\,\varphi(x-t)\, dx dt = 0 \quad (n = 2,\ 3,\ \ldots). \tag{7}$$

Рассмотрим равенство (7) с точки зрения метрики гильбертова пространства $L_2(0,\ 1)$. Очевидно, вектор $\int_t^1 \rho(x)\,\varphi(x-t)\, dx$ ортогонален каждому из векторов системы $\{1,\ t,\ t^2,\ \ldots\}$. Ввиду полноты последней в $L_2(0,\ 1)$

$$\int_t^1 \rho(x)\,\varphi(x-t)\, dx \equiv 0 \ (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Произведя замену переменной $1 - x = y$ и обозначая $1 - t = \tau$, придем к равенству

$$\int_0^\tau \rho(1-y)\,\varphi(\tau - y)\, dy \equiv 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

В силу известной теоремы Титчмарша о свертках (см. [4]) необходимо $\rho(1-y) = 0$ почти везде на $[0,\ 1-\mu]$, т. е. $\rho(x) = 0$ почти везде на $[\mu,\ 1]$ и, таким образом, $\rho(x) \equiv 0$ $(\mu < x \leqslant 1)$. После этого представление (3) приобретает вид

$$\Phi(f) = \int_0^\mu f(t)\, d\rho(t) - f(\mu)\,\rho(\mu) \quad (\mu > 0), \tag{8}$$

$$\Phi(f) = -f(0)\,\rho(0) \quad (\mu = 0). \tag{9}$$

Воспользуемся условием $\Phi(\varphi) = 0$. Если $\mu = 0$, то $\varphi(0)\,\rho(0) = 0$, а так как $\rho(0) \neq 0$ (иначе функционал $\Phi$ аннулировался бы на всем пространстве $B$), то $\varphi(0) = 0$. Этими рассуждениями доказано, что если $\varphi(0) \neq 0$, то $B_\varphi$ совпадает с $B$. Покажем теперь, что $B_\varphi = B_0$. Включение $B_\varphi \subset B_0$ очевидно.

С другой стороны, из (9) видно, что $\Phi$ аннулируется на подпространстве $B_0$. Учитывая, что $\Phi(h) \neq 0$, причем вектор $h \in B \setminus B_\varphi$ мог выбираться, произвольно придем к выводу, что $B_0 \subset B_\varphi$.

Аналогичными рассуждениями с использованием формулы (8) вместо (9) доказывается, что $B_\varphi = B_\mu$ при $\mu > 0$. Из доказанной теоремы легко следует одноклеточность оператора $V$ в пространстве $C$. В самом деле, подпространства $B$, $B_\mu$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ инварианты относительно $V$ и образуют упорядоченное множество (обозначим его через $K$). Нетрудно доказать, что множество $K$ замкнуто в том смысле, что замыкание объединения любой части множества $K$ также принадлежит $K$. Пусть теперь $B^*$ — произвольное подпространство, инвариантное относительно оператора $V$. В силу инвариантности для каждого $f \in B^*$ будут справедливы включения $B_f \subset B^*$, $\bigcup\limits_{f \in B^*} B_f \subset B^*$. С другой стороны, $f \in B_f$ и, значит $B^* \subset \overline{\bigcup\limits_{f \in B^*} B_f}$. Таким образом,

$$B^* = \overline{\bigcup_{f \in B^*} B_f}. \tag{10}$$

На основании теоремы 1 и сделанного выше замечания о замкнутости $K$ придем к выводу, что $B^* \in K$. Ввиду упорядоченности $K$ одноклеточность оператора $V$ этим доказана. Это доказательство представляет собой модификацию принадлежащего Л. А. Сахновичу доказательства одноклеточности $V$ в $L_2$ (см. [2]).

2. Рассмотрим банахово пространство $C^N$, состоящее из всех $N$ раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, в котором норма задается равенством

$$\|f\|_{C^N} = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x)|, \ |f'(x)|, \ |f''(x)|, \ \ldots, \ |f^{(N)}(x)|\}.$$

Легко видеть, что сходимость $f_n \to f$ в $C^N$ эквивалентна равномерной сходимости последовательностей

$$f_n(x) \to f(x), \ f_n'(x) \to f'(x), \ \ldots, \ f_n^{(N)}(x) \to f^{(N)}(x).$$

Поэтому каждое из линейных многообразий $B_0$, $B_0^{(k)}(k = 1, 2, \ldots, N)$, $B_\mu$, которые были определены в начале статьи, замкнуто в метрике $B = C^N$ и представляет собой инвариантное подпространство оператора $V$. Ввиду очевидных соотношений

$$B \supset B_0 \supset B_0^{(1)} \supset \ldots \supset B_0^{(N)} \supset B_{\mu'} \supset B_{\mu''} \ (0 < \mu' < \mu'')$$

совокупность $K$ всех таких подпространств упорядочена и замкнута. При этом часть цепочки $B \supset B_0 \supset B_0^{(1)} \supset \ldots \supset B_0^{(N)}$ дискретна, и каждое из подпространств отличается от предшествующего на одномерное подпространство, в силу чего цепочка $K$ является максимальной (см. [5]).

**Теорема 2.** *Пусть* $\varphi(x) \in B$, $\mu = \mu(\varphi)$. *Тогда*

$$B_\varphi = \begin{cases} B, \ \textit{если} \ \varphi(0) \neq 0, \\ B_0, \ \textit{если} \ \varphi(0) = 0, \ \varphi'(0) \neq 0, \\ B_0^{(k)}, \ \textit{если} \ \varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi_{(0)}^{(k)} = 0, \ \varphi_{(0)}^{(k+1)} \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, \ 2, \ \ldots \ N-1), \\ B_0^{(N)}, \ \textit{если} \ \varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi_{(0)}^{(N)} = 0, \ \mu = 0, \\ B_\mu, \ \textit{если} \ \mu > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Покажем сначала, что если $\varphi \in B_\mu$ и $\mu = \mu(\varphi) > 0$, то система $\varphi, V\varphi, V^2\varphi, \ldots$ полна в $B_\mu$. По доказанному в теореме 1 линейная оболочка $H_\varphi$ векторов $\{\varphi, V\varphi, V^2\varphi, \ldots\}$ будет плотной относительно множества $C_\mu$ по метрике $C$. Так как для произвольной функции $f(x)$ из $B_\mu$ производная $f^{(N)}_{(x)}$ также принадлежит $C_\mu$, то существует такая последовательность $\psi_n(x) \in H_\varphi$, что $\psi_n(x) \to f^{(N)}(x)$ равномерно на $[0, 1]$. Применяя оператор $V$ и учитывая, что $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(N-1)}(0) = 0$, получим, что

$$V\psi_n \to f^{(N-1)}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$V^N\psi_n \to f(x)$$

также равномерно. Обозначая $V^n\psi_n = f_n$ $(f_n \in H_\varphi)$, перепишем предыдущие соотношения в виде

$$f_n(x) \to f(x);$$

$$f_n'(x) \to f'(x);$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n^{(N)}(x) \to f^{(N)}(x).$$

Таким образом, $f_n \to f$ по метрике пространства $C^N$. В случае, когда $\varphi(x) \in B_0^{(N)}$ и $\mu(\varphi) = 0$, повторяя дословно изложенные выше рассуждения, придем к равенству $\overline{H_\varphi} = B_0^{(N)}$.

Предположим теперь, что $\varphi(x) \in B_0^{(k)}$ $(0 \leqslant k < N,\ B_0^{(0)} = B_0)$, $\varphi^{(k+1)}(0) \neq 0$. Тогда $V^{N-k}\varphi \in B_0^{(N)}$ и, значит, система $V^{N-k}\varphi$, $V^{N-k+1}\varphi, \ldots$, по доказанному, полна в $B_0^{(N)}$. Обозначим через $B_k$ $N-k$-мерное подпространство, порожденное векторами $\varphi, V\varphi, V^2\varphi, \ldots, V^{N-k-1}\varphi$.
Легко показать, что $B_k \cap B_0^{(N)} = \{0\}$, и поэтому сумма $B_k + B_0^{(N)}$ прямая. Итак, $B_k \dotplus B_0^{(N)} \subset B_0^{(k)}$. С другой стороны, раскладывая произвольную функцию $F(x)$ из $B_0^{(k)}$ по формуле Тейлора

$$F(x) = \frac{1}{(k+1)!}F^{(k+1)}(0)\,x^{k+1} + \ldots + \frac{1}{N!}F^{(N)}(0)\,x^N + r(x),$$

видим, что $r(x) \in B_0^{(N)}$. Отсюда легко усмотреть, что

$$B_0^{(k)} = B_0^{(N)} + R_k, \tag{11}$$

где $R_k$ — подпространство, натянутое на векторы $x^{k+1}, \ldots, x^N$. Сравнивая (10) и (11) и учитывая, что размерности подпространств $B_k$ и $R_k$ совпадают, придем к выводу, что совпадают подпространства $B_k + B_0^{(N)}$ и $B_0^{(k)}$. Этим доказано, что система $\varphi$, $V\varphi$, $V^2\varphi, \ldots$ является полной в пространстве $B_0^{(k)}$.

**Теорема 3.** *Оператор $V$ в пространстве $C^N$ одноклеточен.* Доказательство опирается на утверждения теоремы 2 и вполне аналогично доказательству одноклеточности оператора $V$ в пространстве $C$, которое было приведено выше.

3. Рассмотрим банахово пространство $W_p^N$ $(p \geqslant 1)$, состоящее из $N$ раз дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, для которых $^{(N)}(x) \in L_p$, а норма определяется по формуле

$$\|f\|_{W_p^N} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 |f^{(i)}(x)|^p \, dx}.$$

Одноклеточность оператора $V$ в $W_2^N$ была установлена Э. Р. Цекановским [6] и это доказательство можно перенести на случай $p \neq 2$, хотя тогда оно окажется, возможно, несколько громоздким.

**Теорема 4.** *Оператор $V$ в пространстве $W_p^N$ $(p \geqslant 1)$ одноклеточен.*

Мы покажем, что одноклеточность оператора $V$ в пространстве $\tilde{B} = W_p^N$ следует из одноклеточности $V$ в пространстве $B = C^N$. Для этого докажем сначала несколько вспомогательных утверждений. Символы $\tilde{B}_0$, $\tilde{B}_0^{(k)}$, $\tilde{B}_\mu$ (соответственно, $B_0$, $B_0^{(k)}$, $B_\mu$) $k = 1, 2, \ldots$; $0 < \mu \leqslant 1$ будут обозначать подмножества функций из $\tilde{B}$ и $B$, определенные в начале работы.

***Лемма 1.*** *Если $f_n(x) \to f(x)$ ($f_n(x)$, $f(x) \in L_p(0, 1)$ по метрике $L_p$, то $Vf_n(x) \to Vf(x)$ равномерно на* $[0, 1]$.

Доказательство вытекает из неравенств

$$|Vf_n(x) - Vf(x)| = \left|\int_0^x [f_n(x) - f(x)]\, dx\right| \leqslant \int_0^x |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant \sqrt[p]{\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p \, dx}.$$

***Лемма 2.*** *Если $f_n'(x) \to f'(x)$ $(f_n,\ f \in W_p')$ по метрике $L_p$ и $f_n(0) = 0$, то $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на* $[0, 1]$.

Доказательство. Так как по определению пространства $W_p^{(1)}$ производные $f_n'(x)$ и $f'(x)$ существуют всюду и суммируемы, то (см. [7])

$$Vf_n' = \int_0^x f_n(x)\, dx = f_n(x), Vf' = \int_0^x f'(x)\, dx = f(x),$$

в силу же леммы 1 $Vf_n' \to Vf'$ равномерно.

Следствие. *Множества* $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_0^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$, $\widetilde{B}_\mu$ $(\mu>0)$ *замкнуты в метрике* $W_p^N$ *и, следовательно, представляют собой инвариантные подпространства оператора* $V$ *в пространстве* $\widetilde{B}$.

Доказательство следует из предыдущих лемм, если учесть, что сходимость $f_n \to f$ по метрике $W_p^N$ равносильна сходимости последовательностей $f_n^{(i)}(x) \to f^{(i)}(x)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ N)$ по метрике $L_p$.

**Лемма 3.** *Пусть черта означает замыкание множества по метрике пространства* $W_p^N$. *Тогда справедливы равенства* $\overline{B}=\widetilde{B}$, $\overline{B}_0=\widetilde{B}_0$, $\overline{B}_0^{(k)}=\widetilde{B}_0^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$, $\overline{B}_0^{(N)}=\widetilde{B}_0^{(N-1)}$, $\overline{B}_\mu = \widetilde{B}_\mu$ $(0<\mu\leqslant 1)$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ произвольная функция из $\widetilde{B}_\mu$ $(\mu>0)$. Тогда $f^{(N)}(x)\in L_p$ и $f^{(N)}(x)\equiv 0$ на $[0,\ \mu]$. Так как множество непрерывных функций плотно в пространстве $L_p$ по его метрике, то существует такая последовательность непрерывных функций $\psi_n(x)$, также удовлетворяющих условию $\psi_n(x)\equiv 0$ на $[0,\ \mu]$, что $\psi_n(x)\to f^{(N)}(x)$ по метрике $L_p$. Тогда, применяя леммы 1 и 2, найдем, что $V^i\psi_n \to f^{(N-i)}(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ равномерно. Обозначая $f_n = V^N\psi_n$ и учитывая, что $f_n\in B_\mu$, перепишем предыдущие соотношения так: $f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\to f'(x), \ldots, f_n^{(N)}(x)\to f^{(N)}(x)$.

Таким образом, $f_n\to f$ по метрике $W_p^N$ и, ввиду очевидного включения $B_\mu\subset B_\mu$, равенство $\overline{B}_\mu=\widetilde{B}_\mu$ доказано.

Если $f(x)\in\widetilde{B}_0^{(N-1)}$, то, как и прежде, $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(N-1)}(0)=0$. Поэтому, снова выбирая последовательность $\psi_n(x)$, стремящуюся к $f^{(N)}(x)$ по метрике $L_p$, получим, что $f_n=V^N\psi_n$ стремится к $f(x)$ по метрике $W_p^N$, $f_n\in B_0^{(N-1)}$, т. е. $\overline{B}_0^{(N-1)}=\widetilde{B}_0^{(N-1)}$. Если же, пользуясь полнотой в $L_p$ множества функций $\{f(x);\ f\in C,\ f(0)=0\}$, выбрать $\psi_n(x)$ так, чтобы $\psi_n(0)=0$, то $f_n\in B_0^{(N)}$ и окажется, что $\overline{B}_0^{(N)}=\widetilde{B}_0^{(N-1)}$ (это объясняется тем, что множество $\widetilde{B}_0^{(N)}$ в $\widetilde{B}$ не является замкнутым и его замыкание совпадает с $\widetilde{B}_0^{(N-1)}$).

Остальные равенства легко вытекают из представлений

$$\widetilde{B}=R_0\dot{+}\widetilde{B}_0^{(N-1)},\ \widetilde{B}_0^{(i)}=R_{i+1}\dot{+}\widetilde{B}_0^{(N-1)}\quad(i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-2),$$

$$B=R_0\dot{+}B_0^{(N-1)},\ B_0^{(i)}=R_{i+1}\dot{+}B_0^{(N-1)}\quad(i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-2),$$

(см. доказательство теоремы 2), где $R_i$ — подпространство, порожденное векторами $x^i,\ x^{i+1},\ \ldots,\ x^{N-1}$.

*Лемма 4. Пусть* $\varphi(x) \in \widetilde{B} = W_p^N$, $\widetilde{B}_\varphi$ *— замыкание линейной оболочки векторов* $\varphi$, $V\varphi$, ... ; $\mu(\varphi) = \mu$. *Тогда*

$$B_\varphi = \begin{cases} \widetilde{B}, \text{ если } \varphi(0) \neq 0, \\ \widetilde{B}_0, \text{ если } \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) \neq 0, \\ \widetilde{B}_0^{(k)}, \text{ если } \varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(k)}(0) = 0 \varphi^{(k+1)}(0) \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, N-2), \\ \widetilde{B}_0^{(N-1)}, \text{ если } \varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(N-1)}(0) = 0, \mu = 0, \\ \widetilde{B}_\mu, \text{ если } \mu > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\|f\|_{W_p^N} \leqslant \sqrt[p]{N+1}\, \|f\|_{C^N}$. Поэтому из сходимости $f_n \to f$ в $C^N$ следует сходимость $f_n \to f$ в $W_p^N$. Пусть $\varphi(0) \neq 0$. Тогда $\psi(x) = V\varphi(x)$, очевидно, принадлежит $B_0$, $\psi'(0) \neq 0$. В силу теоремы 2 последовательность $\psi$, $V\psi$, ... будет полной в пространстве $B_0$, (по метрике пространства $B$) и, ввиду сделанного замечания, она будет также полной в $\overline{B}_0 = \widetilde{B}_0$ по метрике $\widetilde{B}$. Но это значит, что последовательность $\varphi$, $V\varphi$, ... будет полной в пространстве $\widetilde{B}$, так как последнее отличается от $\widetilde{B}_0$ на 1-мерное подпространство, а $\varphi \overline{\in} \widetilde{B}_0$.

Аналогично, с учетом леммы 3, доказываются и остальные равенства.

Доказательство теоремы 4 теперь получается на основании леммы 4 так же, как и доказательства предыдущих теорем об одноклеточности оператора $V$ в пространствах $C$ и $C^N$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Г. Э. Кисилевскому за большую помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бродский М. С. О жордановых клетках бесконечномерных операторов. — «Докл. АН СССР», 1956, т. III, № 5, с. 926—929.
2. Сахнович Л. А. О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду и обратных задачах. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1957. т. 21, с. 235—262.
3. Donoghue W. F. The lattice of invariant subspaces of completely continuous guasi — nilpotent transformation — «Pacifis G. Math», 1957, vol 7, № 2, p. 1031—1035.
4. Титчмарш Е. К. Теория функций. М.-Л., Гостехиздат, 1951. 397 с.
5. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967. 448 с.
6. Цекановский Э. Р. Об описании инвариантных подпространств и одноклеточности оператора интегрирования в пространстве $W_2^{(P)}$. — УМН, 1965, т. 20, № 6, с. 169—172.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957. 424 с.


*Поступила 24 сентября 1973 г.*