УДК 513.88

Е. З. МОГУЛЬСКИЙ

ПРИЗНАК КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

В данной статье устанавливается признак кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов одного класса несамосопряженных операторных пучков, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Начало этому направлению спектральной теории было положено М. В. Келдышем [1, 2], исследования которого были продолжены в последующие годы М. Г. Крейном, Г. Лангером, В. И. Мацаевым, А. С. Маркусом и другими математиками [3—10].

1_0. Пусть S_∞ — двусторонний идеал кольца линейных ограниченных операторов, действующих в $\boldsymbol{H}$, состоящий из вполне непрерывных операторов. Обозначим через $\{s_j(A)\}_1^\infty$ последовательность сингулярных чисел оператора $A \in S_\infty$, занумерованных в порядке убывания с учетом кратности, а через $\nu(t, A)$ $(t > 0)$ — количество чисел $s_j(A)$ на интервале (t^{-1}, ∞). Будем говорить, что оператор $A \in S_\infty$ является полным, если система его корневых векторов, соответствующих ненулевым собственным числам, полна в $\boldsymbol{H}$. Через $\tilde{\boldsymbol{H}}$ обозначим ортогональную сумму n экземпляров пространства $\boldsymbol{H}$, а через S_ω — мацаевский идеал кольца линейных ограниченных операторов $S_\omega = \{A \in S_\infty : \sum_{j=1}^\infty s_j(A)(2j-1)^{-1} < \infty\}$.

В статье рассматриваются операторные пучки вида

$$L(\lambda) = \mathbf{1} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j A_j H^{j+a} - \lambda^n H^n, \tag{I}$$

$$L(\lambda) = \mathbf{1} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j H^{j+a} A_j - \lambda^n H^n, \tag{II}$$

в которых операторы $A_j \in S_\infty$ $(j = 0, \ldots, n-1)$, оператор $H \in S_\infty$ — полный нормальный, оператор H^n самосопряжен, $a > 0$. Напомним понятие кратной полноты (более подробное изложение дано, например, в [10]).

Если уравнение $L(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет ненулевое решение $\varphi_0 \in \boldsymbol{H}$, то вектор φ_0 назовем собственным вектором пучка $L(\lambda)$, который соответствует характеристическому числу λ_0. Вектор $\varphi_k \in H$ будем называть присоединенным вектором пучка $L(\lambda)$, соответствующим характеристическому числу λ_0, если существуют векторы $\varphi_0 \neq 0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ такие,что $\| L(\lambda)(\varphi_0 + (\lambda - \lambda_0)\varphi_1 + \ldots + (\lambda - \lambda_0)^{k-1}\varphi_{k-1} + (\lambda - \lambda_0)^k \varphi_k) \| = 0(|\lambda - \lambda_0|^{k+1})$.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — некоторая цепочка из собственного и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, соответствующих характеристическому числу λ_0. Соотношениями,

$$\varphi_0^{(k)} = \lambda_0 \varphi_0^{(k-1)}, \quad \varphi_s^{(k)} = \lambda_0 \varphi_s^{(k-1)} + \varphi_{s-1}^{(k-1)}$$

$$(\varphi_p^{(0)} = \varphi_p;\ k = 1, \ldots, n-1;\ s = 1, \ldots, m)$$

определяются еще $n-1$ цепочек $\varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_m^{(k)}$ собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$. Система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ называется n-кратно полной в $\boldsymbol{H}$, если векторы $(\varphi_s, \varphi_s^{(1)}, \ldots, \varphi_s^{(n-1)}) \in \widetilde{\boldsymbol{H}}$, построенные для всех характеристических чисел пучка и всевозможных цепочек полны в $\boldsymbol{H}$. Можно показать, что если система собственных и присоединенных векторов не является n-кратно полной, то найдутся n одновременно не равных 0 векторов $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ из $\boldsymbol{H}$ таких, что при любом векторе $f \in \boldsymbol{H}$ будет являться целой функция $\left(L^{-1}(\lambda) f, \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j g_j\right)$.

Целью статьи является доказательство следующего признака кратной полноты.

Теорема. *Если выполнено условие*

$$\varliminf_{k \to \infty} s_k^a(H) \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} s_j(A_p)(2j-1)^{-1} = 0, \tag{1}$$

то система собственных и присоединенных векторов каждого из операторных пучков (I), (II) *n-кратно полна в* $\boldsymbol{H}$.

В качестве частного случая теорема содержит такое предложение: если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

$$\text{а) } A_p \in S_\omega\ (p = 0, 1, \ldots, n-1); \quad \text{б) } \varliminf_{k \to \infty} s_k^a(H) \ln k < \infty,$$

то система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков [I] и [II] n- кратно полна в $\boldsymbol{H}$.

Отметим, что утверждение теоремы останется в силе, если требование самосопряженности оператора H заменить на условие, чтобы спектр оператора H лежал на конечном числе лучей, исходящих из точки $\lambda = 0$. Для случая линейного пучка эта теорема была доказана В. И. Мацаевым и анонсирована среди прочих его теорем полноты в [4]. Общий случай анонсировался в [9].

2_0. Установим вначале некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть $H \in S_\infty$ — полный нормальный оператор, оператор H^n для некоторого натурального n самосопряжен и $a > 0$. Тогда имеет место оценка*

$$\| H^{j+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} \| \leqslant c\,(r^{-n} + r^{-j-a} |\sin n\varphi)^{-1}), \quad \lambda = re^{i\varphi}$$
$$(j = 0, \ldots, n-1).$$

Доказательство. Обозначим через $\{h_k\}_1^\infty$ полную ортонормированную последовательность собственных векторов оператора H, а через $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — соответствующую последовательность характеристических чисел того же оператора. Тогда имеет место такое представление:

$$H^{j+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{n-j-a}}{\lambda_k^n - \lambda^n} (\cdot,\ h_k)\, h_k, \tag{2}$$

из которого на основании равенства $\|A\| = s_1(A)$ $(A \in S_\infty)$ следует соотношение

$$\| H^{j+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} \| = \sup_k \left| \frac{\lambda_k^{n-j-a}}{\lambda_k^n - \lambda^n} \right|. \tag{3}$$

Остановимся сперва на случае, когда $j + a \geqslant n$. Из равенства (2) следует соотношение

$$\| H^{j+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} \| \leqslant \sup_{(t \geqslant |\lambda_1|)} t^{n-j-a} \,|\, t^n - (-1)^m r^n e^{in\varphi} |^{-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$p(t) = t^{2(j+a-n)} \,|\, t^n - (-1)^m r^n e^{in\varphi} |^2.$$

В промежутках $[r_1,\ 2^{-1}r]$, $[2^{-1}r,\ \infty)$ для нее верны соответственно оценки $p(t) > (2^{-n}-1)^2 r_1^{2(j+a-n)} r^{2n}$, $p(t) > 2^{-2a} r^{2(j+a)} \sin^2 n\varphi$. Следовательно, в рассматриваемом случае справедливо неравенство

$$\| H^{j+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} \| \leqslant c'\,(r^{-n} + r^{-j-a} |\sin n\varphi|^{-1}). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $j + a < n$. Если $r \geqslant 2r_k$, то

$$\sup_k |\lambda_k^{-j-a}(1-\lambda^n\lambda_k^{-n})^{-1}| \leqslant \sup_k r_k^{-j-a}\,(r^n r_k^{-n} - 1)^{-1} =$$
$$= r^{-j-a} \sup_k (rr_k)^{j+a-n} \left(1 - r^{-n} r_k^n\right)^{-1} < (1-2^{-n})^{-1} r^{-j-a}.$$

Если же $r \leqslant 2r_k$, то поскольку выполняется оценка $|1-\lambda^n\lambda_k^{-n}| \geqslant \geqslant |\sin n\varphi|$, получаем

$$\sup_k |\lambda_k^{-j-a}(1-\lambda^n\lambda_k^{-n})^{-1}| \leqslant 2^n r^{-j-a} |\sin n\varphi|^{-1}.$$

И, значит, во втором случае верна оценка

$$\| H^{j+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} \| \leqslant 2^n r^{-j-a} |\sin n\varphi|^{-1}. \tag{5}$$

Так как оценка (4) является более общей чем (5), то независимо от величины $j+a$ мы будем пользоваться ею.

Лемма доказана.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $a \geqslant 0$. Обозначим через V_ε область $\{\lambda : r^a \times \times |\sin n\varphi| > \varepsilon\}$.

Лемма 2. *Пусть $H \in S_\infty$ — полный нормальный оператор, оператор H^n для некоторого натурального n самосопряжен. Тогда для оператора $T \in S_\infty$ в области V_ε равномерно выполняются соотношения*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty} \| \lambda^j T H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} \| = 0, \\ &\lim_{\lambda\to\infty} \| \lambda^j H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} T \| = 0. \end{aligned}\right\} \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Доказательство. Мы докажем первое соотношение, второе доказывается аналогично. Выберем произвольное $\delta > 0$ и представим оператор T в виде суммы $T = B + M$, где B — конечномерный оператор, а $\|M\| \leqslant (2c)^{-1}\varepsilon\delta$, где c — постоянная, входящая в утверждение леммы 1. Так как конечномерный оператор B допускает представление

$$B = \sum_{k=1}^m (\cdot, e_k)\, b_k, \quad (e_k, b_k \in \boldsymbol{H}, \|b_k\| = 1; k = 1, \ldots, m),$$

то, воспользовавшись представлением (2), получим такую оценку:

$$\| \lambda^j B H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} f \| \leqslant \|f\| \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^N \left\| \frac{\lambda_p^{n-j-a} \lambda^j}{\lambda_p^n - \lambda^n} (h_p, e_k) \right\| + \right.$$

$$\left. + r^j \left(\sum_{p=N+1}^\infty \left| \frac{\lambda_p^{n-j-a}}{\lambda_p^n - \lambda^n} \right|^2 |h_p, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (f \in \boldsymbol{H}).$$

Выберем число N настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $\left(\sum_{p=N+1}^\infty |(h_p, e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (4mc)^{-1}\varepsilon\delta$ $(k = 1, \ldots, m)$, а затем число R таким, чтобы были выполнены неравенста

$$\sum_{p=1}^N \left\| \frac{\lambda_p^{n-j-a} \lambda^j}{\lambda_p^n - \lambda^n} (h_p, e_k) \right\| \leqslant (4m)^{-1}\delta \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Тогда получим с учетом леммы 1, что

$$\| \lambda^j B H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} f \| \leqslant \|f\| \left(4^{-1}\delta + r^j (4c)^{-1}\varepsilon\delta \times \right.$$

$$\left. \times \sup_k \left| \frac{\lambda_k^{n-j-a}}{\lambda_k^n - \lambda^n} \right| \right) \leqslant 2^{-1}\delta + 0(1).$$

Вновь применяя лемму 1, найдем, что

$$\| \lambda^j M H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} \| \leqslant 2^{-1}\delta + 0(1)$$

Следовательно,

$$\| \lambda^j T H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} f \| \leqslant \| \lambda^j B H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} f \| +$$

$$+ \| \lambda^j M H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} f \| \leqslant \|f\| \, (\delta + 0(1)).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *При достаточно большом R в области $V_\varepsilon \cap \cap \{\lambda : r > R\}$ имеет место оценка резольвенты пучка* $\| L^{-1}(\lambda) \| \leqslant \leqslant 2^{n+1} r^a \varepsilon^{-1}$.

Доказательство. На основании леммы можно указать число R такое, что в рассматриваемой области будет выполняться неравенство

$$\| \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j A_j H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} \| \leqslant 2^{-1}.$$

С его помощью получаем с учетом (4) требуемую оценку для резольвенты

$$L^{-1}(\lambda) \| \leqslant \| (1 - \lambda^n H^n)^{-1} \| \cdot \| (1 - \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j A_j H^{j+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1})^{-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{n+1} |\sin n\varphi|^{-1} \leqslant 2^{n+1} r^a \varepsilon^{-1}.$$

Следствие доказано.

Так как имеет место включение

$$\{\lambda : r^a |\sin a\varphi| > \varepsilon, \ r > R\} \subset \left\{\lambda : r^a |\sin n\varphi| < \frac{2n\varepsilon}{\pi a}, \ r > R\right\},$$

то из следствия 1 следует

Следствие 2. *В области* $\{\lambda : r^a |\sin a\varphi| > \varepsilon, \ r > R\}$ *имеет место оценка* $\| L^{-1}(\lambda) \| \leqslant 2^n \pi a n^{-1} r^a \varepsilon^{-1}$.

3_0. В этом пункте получены оценки для определителя некоторого ядерного оператора. Выберем число $\varepsilon > 0$ и представим каждый из операторов A_p пучка в виде суммы $A_p = B_p + E_p$, где $\| E_p \| \leqslant \varepsilon c^{-1} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) \equiv \varepsilon_1 \ (p = 0, \ 1, \ \ldots, \ n-1)$, а s-числа конечномерного оператора B_p совпадают с теми s-числами оператора A_p, которые превосходят $\| E_p \|$.

Положим

$$S(\lambda) = \textstyle\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p E_p H^{p+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1}.$$

На основании леммы 1 можно утверждать, что при $r > 2^{-\frac{1}{n}}$ выполнено неравенство $\| S(\lambda) \| \leqslant \varepsilon (r^{-1} + r^{-a} |\sin n\varphi|^{-1})$. Поэтому в области $U_\varepsilon \left\{\lambda : r > 2^{-\frac{1}{h}}, \ 2\varepsilon (r^{-1} + r^{-a} |\sin n\varphi|^{-1}) < 1\right\}$ оператор $1 - S(\lambda)$ обратим, а норма оператора $T(\lambda) = (1 - S(\lambda))^{-1}$ оценивается следующим образом:

$$\| T(\lambda) \| < 2 \quad (\lambda \in U_\varepsilon). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$D(\lambda) = \det \left(1 - \textstyle\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p B_p H^{p+a} (1 - \lambda^n H^n)^{-1} T(\lambda)\right).$$

Важную роль в дальнейшем играет оценка определителя, которую дает

Лемма 3. *В области* U_ε справедливо неравенство

$$\ln |D(\lambda)| < \textstyle\sum_{p=0}^{n-1} \displaystyle\int_0^{2\varepsilon_1^{-1}} t^{-1} \nu(t, \ A_p)\, dt. \tag{7}$$

Доказательство. Из неравенства Г. Вейля [11] следует, что

$$\ln|D(\lambda)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left(1 + s_j\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p B_p H^{p+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} T(\lambda)\right)\right).$$

В силу леммы 1, оценки (6) с учетом того, что

$$\nu\left(t, \sum_{p=0}^{n-1} A_p\right) \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \nu(nt, A_p)$$

(лемма 1.4 из [10]), имеем

$$\ln|D(\lambda)| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^\infty \ln(1+t^{-1})\, d\nu(tnc\varepsilon^{-1}, B_p) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\varepsilon_1^{-1}} \ln(1 + nc\varepsilon^{-1} t^{-1})\, d\nu(t, A_p) \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{2\varepsilon_1^{-1}} t^{-1} \nu(t, A_p)\, dt.$$

Лемма доказана.

Оценку определителя снизу дает следующая

Лемма 4. *При достаточно большом R на лучах $\Lambda\ \{\lambda : \arg\lambda = \frac{\pi}{2n} + \pi k,\ r > R;\ k = 0, \ldots, 2n-1\}$ выполняется неравенство*

$$-\ln|D(\lambda)| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{2\varepsilon_1^{-1}} t^{-1} \nu(t, A_0)\, dt.$$

Доказательство. Представим обратную величину определителя в виде

$$(D(\lambda))^{-1} = \det\left(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p B_p H^{p+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1} T(\lambda)\right)^{-1} =$$

$$= \det\left[(1 - S(\lambda))(1 - \lambda^n H^n) L^{-1}(\lambda)\right] = \det\left(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p B_p H^{p+a} L^{-1}(\lambda)\right).$$

Рассуждая точно так, как при доказательстве следствия 1, и применяя лемму 1, получим для точек Λ

$$\|\lambda^p H^{p+a} L^{-1}(\lambda)\| = \|\lambda^p H^{p+a}(1-\lambda^n H^n)^{-1}\| \cdot \left\|\left(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p H^{p+a} \times (1-\lambda^n H^n)^{-1}\right)^{-1}\right\| \leqslant 2c(R^{-1} + R^{-a}) \equiv c_1.$$

Аналогично оценке (7) устанавливается теперь оценка

$$-\ln|D(\lambda)| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \left(\int_{\varepsilon_1^{-1}}^{\varepsilon_1^{-1}+nc_1} t^{-1} \nu(t, A_p)\, dt + \int_0^{\varepsilon_1^{-1}} t^{-1} \nu(t, A_p)\, dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{2\varepsilon_1^{-1}} t^{-1} \nu(t, A_p)\, dt.$$

Лемма доказана.

Как известно, ([8, с. 298]) для нормы операторов вида $(1-A)^{-1}$, где A — ядерный оператор, имеет место важная оценка определителя

$$\|(1-A)^{-1}\| \leqslant |\det(1-A)|^{-1} \Pi_{j=1}^{\infty} (1 + s_j(A)).$$

На этой оценке основана следующая

Лемма 5. *При достаточно большом R в области*

$$U_\varepsilon \cap \left\{\lambda : r > R,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\right\}$$

выполнено неравенство

$$\left\|\left(\lambda+e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^{-a} D(\lambda) L^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant 2^{n}\varepsilon^{-1} \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_{0}^{2\varepsilon_1^{-1}} t^{-1}\nu(t, A_p)\,dt\right\}.$$

Доказательство. С учетом (5) и (6) получаем

$$\|D(\lambda) L^{-1}(\lambda)\| = \|D(\lambda)(1-\lambda^n H^n)^{-1} T(\lambda)\left(1-\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^p B_p H^{p+a} \times\right.$$
$$\times (1-\lambda^n H^n)^{-1} T(\lambda)^{-1}\| \leqslant 2^{n+1} |\sin n\varphi|^{-1} \Pi_{j=1}^{\infty} (1 +$$
$$+ s_j \left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p B_p H^{p+a} (1-\lambda^n H^n)^{-1} T(\lambda)\right) \leqslant 2^n \varepsilon^{-1} r^a \times$$
$$\times \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_{0}^{2\varepsilon_1^{-1}} t^{-1}\nu(t, A_p)\,dt\right\}.$$

Осталось отметить, что в рассматриваемой области $\left|\lambda+e^{i\frac{\pi}{2n}}\right| > r$.
Лемма доказана.

4_0. В этом пункте приводятся некоторые утверждения геометрического характера. Пусть $\alpha = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi a}{2n}\right) \neq 0$. Введем в рассмотрение лежащую внутри угла $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$ область Π, которая выделяется системой неравенств

$$\begin{cases} r^a \sin n\varphi - \varepsilon\alpha \sin\left(\frac{\pi a}{2n} + (n-a)\varphi\right) > 0, \\ \left| -i\lambda^n - \varepsilon\alpha\left(\lambda e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)^{n-a}\right| > 1. \end{cases}$$

Тогда будут справедливы следующие предложения (ε считаем малым):

1) кривая

$$\left| -i\lambda^n - \varepsilon\alpha\left(\lambda e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)^{n-a}\right| = 1$$

лежит в кольце $2^{-\frac{1}{n}} < r < (1{,}5)^{\frac{1}{n}}$;

2) область Π заключена между двумя «стандартными» областями:

$$U_{\varepsilon} \cap \left\{\lambda : r > (1{,}5)^{\frac{1}{n}},\ \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\right\} \subset \Pi \subset U_{\bar\varepsilon} \cap \left\{\lambda : 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\right\},$$

$$\bar\varepsilon = \frac{\varepsilon}{8}\left|\sin\frac{\pi a}{2n}\right|;$$

3) область Π посредством суперпозиции функций

$$u = -i\lambda^n - \varepsilon\alpha\left(\lambda e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)^{n-a},$$

$$z = 2^{-1}(u - u^{-1}) \ \ (\arg z = \Theta,\ \arg U = \Psi) \tag{8}$$

отображается на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$.

Аналогичные результаты справедливы и для того случая, когда $a = 2l n$ (l — натуральное число). А именно, некоторая область Π_1, заключенная между двумя «стандартными» областями

$$U_\varepsilon \cap \left\{\lambda : r > (1{,}5)^{\frac{1}{n}},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\right\} \subset \Pi_1 \subset U_{\frac{\varepsilon}{16}} \cap \left\{\lambda : 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\right\},$$

отображается посредством суперпозиции функций

$$u = -i\lambda^n - \varepsilon n \pi^{-1} \lambda^{n(1-2l)} \ln\left(2^{\frac{1}{n}} \lambda e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right),\ z = 2^{-1}(u - u^{-1})$$

на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$.

5_0. В этом разделе доказывается основная лемма об оценке резольвенты операторного пучка через сингулярные числа операторов A_p ($p = 0, \ldots, n-1$).

Пусть элементы f, g_j ($j = 0, \ldots, n-1$) $\in \boldsymbol{H}$ таковы, что функция

$$b(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) f,\ \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \bar{\lambda}^j g_j\right).$$

является голоморфной при $\varphi \neq \frac{\pi l}{n}$ ($l = 0, 1, \ldots, 2n-1$).

Лемма 6. *В области* $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$ *имеет место следующая оценка:*

$$\ln\left|\left(\lambda + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^{1-n} b(\lambda)\right| \leqslant \frac{C}{\sin n\varphi}\left(1 + \textstyle\sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\mathscr{C} r^{-a}(\sin n\varphi)^{-1}} t^{-1}\nu(t, A_p)\, dt\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим тот случай, когда $\alpha_1 = \left|\sin\frac{\pi a}{2n}\right| \neq 0$. Проведем оценку резольвенты пучка в точке $\lambda_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ($r_0 > R$), лежащей вблизи одного из лучей $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{n}$. Определим число ε соотношением $r_0^{-1} + r_0^{-a} (\sin n\varphi_0)^{-1} = (2\varepsilon)^{-1}$. Тогда $2\varepsilon < r_0^a \sin n\varphi_0 < 4\varepsilon$ и точка λ_0 находится на границе области U_ε. Обозначим через Γ границу области Π, а через $K(\lambda;\ \zeta)$ ($\lambda \in \Pi$, $\zeta \in \Gamma$) — ядро Пуассона области Π ($K(\lambda,\ \zeta) \geqslant 0$, $\int_\Gamma K(\lambda;\ \zeta)|d\zeta| = 1$). Известно, ([12, с. 311]), что для ограниченной голоморфной в области Π функции $u(\zeta)$ выполняется оценка

$$\ln|u(\lambda)| \leqslant \int_\Gamma \ln|u(\zeta)|\, K(\lambda;\ \zeta)\, |d\zeta|. \qquad (9)$$

Так как имеет место включение

$$\Pi \subset \left\{\lambda : 2r^a \sin n\varphi > \varepsilon\alpha_1,\ \ r > 2^{-\frac{1}{n}},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\right\},$$

то на основании следствия 1 из леммы 2 в области Π будет ограничена функция

$$c(\lambda) = \left(\lambda + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^{-a-n+1} b(\lambda) \equiv \left(\lambda + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^{-a} b_1(\lambda).$$

Следовательно, на основании оценки (9) будем иметь неравенство

$$\ln|c(\lambda)| \leqslant \int_\Gamma \ln|c(\zeta)|K(\lambda;\ \zeta)|d\zeta|,$$

из которого с учетом соотношения

$$\ln\left|\left(1+e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^{-a}\right| = \int_\Gamma \ln\left|\left(\zeta+{}^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^{-a}\right| K(\lambda;\ \zeta)|d\zeta|$$

получим

$$\ln|b_1(\lambda)| \leqslant \int_\Gamma \ln|b_1(\zeta)|K(\lambda;\ \zeta)|d\zeta|. \qquad (10)$$

Поскольку область П содержится в области U_ε^-, то на основании леммы 5 в области П для функции $d(\lambda) = b_1(\lambda) D(\lambda)$ будет иметь место оценка

$$|d(\lambda)| \leqslant c\bar{\varepsilon}^{-1} r^a \exp \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{2\bar{\varepsilon}^{-1}} t^{-1} \nu(t.\ A_p)\, dt. \qquad (11)$$

Так как $b_1(\lambda) = d(\lambda)\ (D(\lambda))^{-1}$, то из неравенства (10) будет следовать оценка

$$\ln|b_1(\lambda_0)| \leqslant \int_\Gamma \ln + \left|\frac{d(\zeta)}{D(\zeta)}\right| K(\lambda_0;\ \zeta)|d\zeta| \leqslant \int_\Gamma \ln^+|d(\zeta) \times$$

$$\times K(\lambda_0;\ \zeta)|d\zeta| + \int_\Gamma \ln^-|D(\zeta)|K(\lambda_0;\ \zeta)\, d\zeta). \qquad (12)$$

Второе слагаемое правой части неравенства (11) оценивается следующим образом. Введем в рассмотрение точку λ_1, лежащую на биссектрисе угла $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$, образ которой при отображении области П на полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > 0$ имеет модуль, равный модулю образа точки λ_0. Из неравенства (9), примененного к функции $D(\lambda)$ в точке λ_1, следует неравенство

$$\int_\Gamma \ln^-|D(\zeta)|K(\lambda_1;\ \zeta)|d\zeta| \leqslant \int_\Gamma \ln^+ D(\zeta)|K(\lambda_1;\zeta)|d\zeta| - \ln|D(\lambda_1)|,$$

с помощью которого получаем

$$\int_\Gamma \ln^-|D(\zeta)|K(\lambda_0;\quad \zeta)|d\zeta| \leqslant \sup_{\zeta\in\Gamma} \frac{K(\lambda_0,\ \zeta)}{K(\lambda_1;\ \zeta)} \int_\Gamma \ln^-|D(\zeta)|K(\lambda_1;\ \zeta) \times$$

$$\times |d\zeta| \leqslant \sup_{\zeta\in\Gamma} \frac{K(\lambda_0;\ \zeta)}{K(\lambda_1;\ \zeta)} (\int_\Gamma \ln^+|D(\zeta)|K(\lambda_1;\ \zeta)|d\zeta| - \ln|D(\lambda_1)|). \quad (13)$$

Поскольку гармоническая мера при конформном отображении не изменяется [13], то вместо отношения ядер Пуассона для области П будем рассматривать отношение ядер Пуассона $K_1(z;\ t)$ для полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$:

$$\sup_{\zeta\in\Gamma} \frac{K(\lambda_0;\ \zeta)}{K(\lambda_1;\ \zeta)} = \sup_t \frac{K_1(z_0;\ t)}{K_1(z_1;\ t)} = \sup_t \frac{\mathrm{Re}\, z_0}{|z_0|} \frac{t^2 + |z_0|^2}{(t - \mathrm{Im}\, z_0)^2 + (\mathrm{Re}\, z_0)^2} =$$

$$= \frac{\cos\Theta_0}{1 - |\sin\Theta_0|} \leqslant \frac{2}{\cos\Theta_0}. \qquad (14)$$

Теперь оценим $\cos\Theta_0$. Так как $2|z_0| \leqslant |u_0| + |u_0|^{-1}$, то с учетом того, что $|u_0|$ достаточно велик, получим

$$\cos\Theta_0 = \frac{1}{2|z_0|}(|u_0| - |u_0|^{-1}\cos\Psi_0 > 2^{-1}\cos\Psi_0. \qquad (15)$$

Из (8) следует соотношение

$$|u_0| \cos \Psi_0 = r_0^n \sin n\varphi_0 - \varepsilon a r_0^{n-a} \sin \left(a \frac{\pi}{2n} + \varphi_0 (n-a) \right),$$

из которого получаем оценку

$$|u_0| \cos \Psi_0 > \varepsilon r_0^{n-a}. \tag{16}$$

А так как при достаточно большом r_0 имеет место неравенство $|u_0| \leqslant 2r_0^n$, то из (14), (15), (16) вытекает оценка отношения ядер Пуассона:

$$\sup_{\zeta \in \Gamma} \frac{K(\lambda_0;\ \zeta)}{K(\lambda_1;\ \zeta)} \leqslant \frac{32}{\sin n\varphi_0}. \tag{17}$$

С учетом неравенств (13), (14) и лемм 3 и 4 получаем такую оценку второго слагаемого правой части неравенства (12):

$$\int_\Gamma \ln^- |D(\zeta)|\, K(\lambda_0;\ \zeta)\, |d\zeta| \leqslant \frac{64}{\sin n\varphi_0} \times \\ \times \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{2^{\varepsilon^{-1}}} t^{-1} \nu(t,\ A_p)\, dt. \tag{18}$$

Подставляя (18) и (11) в (12) и производя огрубление, получаем окончательно

$$\ln |b_1(\lambda_0)| \leqslant \frac{C}{\sin n\varphi_0} \left(1 + \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{Cr_0^{-a(\sin n\varphi_0)^{-1}}} t^{-1} \nu(t,\ A_p)\, dt \right). \tag{19}$$

Неравенства, аналогичные (19), справедливы и в остальных секторах $\frac{\pi}{n}(m-1) < \varphi < \frac{\pi}{n} m$ $(m = 2,\ \ldots,\ 2n)$.

Лемма доказана.

6_0. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, несколько огрубим оценку (19). Если воспользоваться неравенством $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$, то из оценки (19) следует неравенство

$$\ln |b_1(\lambda_0)| \leqslant \frac{C_1}{r_0^a \sin^2 a\varphi_0} \sum_{p=0}^{n-1} \nu \left(\frac{C_1}{r_0^a \sin a\varphi_0},\ A_p \right). \tag{20}$$

Введем в рассмотрение монотонно растущую на $(0, +\infty)$ функцию

$$m(t) = t \int_0^t \sum_{p=0}^{n-1} \nu(x,\ A_p)\, dx,$$

и сделаем замену переменного: $\lambda^a = \zeta = \omega + i\tau$.

Поскольку $\omega_0 > \tau_0$, то из неравенства (20) получаем оценку

$$\ln |b_1(\lambda(\zeta_0)) < \frac{C_1 \sqrt{2}}{\tau_0^2}\, \omega_0 \sum_{p=0}^{n-1} \nu \left(\frac{C_1}{\tau_0},\ A_p \right) < C_1' e^{\sigma\omega_0} m \left(\frac{2C_1}{\tau_0} \right), \tag{21}$$

где $\sigma > 0$.

Кроме оценки (21), при доказательстве теоремы будет использована оценка резольвенты пучка через s-числа оператора ([10, с. 14]). В ζ-плоскости эта оценка имеет вид

$$\ln |b_1(\lambda(\zeta))| < B \ln \omega \nu \left(b\omega^{\frac{1}{a}},\ H \right). \tag{2}$$

Доказательство теоремы. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся n одновременно не равных нулю элементов $g_0, \ldots, g_{n-1} \in \boldsymbol{H}$ таких, что при любом $f \in \boldsymbol{H}$ функция

$$b(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) f, \ \sum_{p=0}^{n-1} \bar{\lambda}^p g_p\right)$$

будет целой.

Изучим поведение этой функции в окрестности луча $\arg \lambda = 0$. Согласно лемме 6, в области $G\{\zeta : |\zeta| > R, \ |\arg \zeta| < \varepsilon\}$ функция

$$h(\zeta) = \left(1 + \zeta^{\frac{1}{a}}\right)^{1-n-a} b(\lambda(\zeta)).$$

удовлетворяет оценке (20).

Пусть функция $m^{-1}(t)$ является обратной к функции $m(t)$. Определим функцию $n(t)$ $(t \geqslant t_0)$ равенством

$$n(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{x m^{-1}(x)}$$

и обозначим через $n^{-1}(t)$ функцию, обратную к $n(t)$. Положим $r(t) = (m^{-1}(n^{-1}(t)))^{-1}$, $\beta = \frac{\pi}{16 C_1}$ и выберем числа t_0 и ω' настолько большими, чтобы криволинейная полуполоса

$$\Pi\{\zeta : \omega > \omega', \ |\tau| < 2C_1 r(\beta(\omega - \omega'))\}$$

входила в область G.

Отобразим конформно полуполосу Π на прямолинейную полуполосу $\left\{w = u + iv : u > 0, \ |v| < \frac{\pi}{2}\right\}$ с помощью аналитической функции $w = U(\zeta) + iV(\zeta)$ так, чтобы точки $\zeta = \omega' \pm \pm i \frac{2C_1}{m^{-1}(t_0)}$ перешли в точки $w = \pm i \frac{\pi}{2}$, а точка $\zeta = \infty$ перешла в точку $w = \infty$. Оценка снизу действительной части отображающей функции дается неравенством Альфорса ([14, с. 220])

$$U(\omega + i\tau) > 4\beta \int_{\omega'}^{\omega} m^{-1}(n^{-1}(\beta(x - \omega')))\, dx + c =$$

$$= 4 \int_{t_0}^{n-1(\beta(\omega-\omega'))} \frac{dx}{x} + c = 4 \ln \frac{m((r(\beta(\omega - \omega')))^{-1})}{t_0} + c$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Re}\left\{\exp \frac{1}{2} w(\zeta)\right\} > \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{c}{2}} \frac{m((r(\beta(\omega - \omega')))^{-1})}{t_0} e^{\beta m^{-1}(t_0)(\omega - \omega')}. \quad (23)$$

Из неравенств (21) и (23) следует, что при $\sigma < m^{-1}(t_0)\beta$ выполняется оценка

$$\operatorname{Re}\left\{\exp \frac{1}{2} w(\zeta)\right\} > C_1' e^{\sigma \omega} m((r(\beta(\omega - \omega')))^{-1}) > \ln |h(\omega \pm$$

$$\pm i 2C_1 r(\beta(\omega - \omega')))| \quad (|\tau| < 2C_1 r(\beta(\omega - \omega'))),$$

из которой можно заключить, что при $\forall d > 0$ имеет место неравенство

$$\ln|h(\omega + d \pm i2C_1 r(\beta(\omega - \omega')))| < e^{\sigma d} \operatorname{Re}\left\{\exp \frac{1}{2} w(\zeta)\right\}. \quad (24)$$

Ниже будет показано, что из условия (1) следует последовательность $\{\omega_l\}_1^\infty$ $(\omega_l \to \infty)$ такая, что для $\forall d > 0$, начиная с некоторого номера $l_0(d)$, справедливо неравенство

$$B \ln(\omega_l + d)\, \nu\left(b(\omega_l + d)^{\frac{1}{a}},\ H\right) < C_1 e^{\sigma(\omega_l + d)} m((r(\beta(\omega_l - \omega')))^{-1}). \quad (25)$$

Тогда в силу неравенства (22)

$$\ln|h(\omega_l + d + i\tau)| < e^{\sigma d} \operatorname{Re}\left\{\exp \frac{1}{2} w(\omega_l + i\tau)\right\},$$

$$(|\tau| < 2C_1 r(\beta(\omega_l - \omega^1))). \quad (26)$$

Согласно следствию 2 из леммы 2, на границе полуполосы $\Pi_1\{\zeta : \omega > \omega',\ |\tau| < 2C_1 r(0)\}$ функция $h(\zeta)$ ограничена; поэтому в силу оценок (24), (26) в области

$$\{\zeta : -d < \omega < \omega',\ |\tau| < 2C_1 r(0)\} \cup \{\zeta : \omega' < \omega < \omega_{l_0(d)},$$
$$|\tau| < 2C_1 r(\beta(\omega - \omega'))\}$$

на основании принципа максимума для субгармонических функций будет выполнено неравенство

$$\ln|h(\omega + d + i\tau)| < e^{\sigma d} \operatorname{Re}\left\{\exp \frac{1}{2} \omega(\zeta)\right\} + c_1. \quad (27)$$

Из (27) при $\omega = \omega'$ получаем неравенство $\ln|h(\omega' + d + i\tau) < < e^{\sigma d} + c_1$, из которого в силу принципа Фрагмена — Линделефа заключаем, что в полуполосе Π_1 функция $h(\zeta)$ ограничена. Теперь с учетом следствия 2 из леммы 2 можно утверждать, что в области $\left\{\lambda : |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2n}\right\}$ выполняется оценка

$$|(\lambda + 1)^{-n+1} b(\lambda)| < C_2(1 + r^a). \quad (28)$$

Поскольку функция $(\lambda + 1)^{-n+1} b(\lambda)$ ограничена на лучах $|\arg\lambda| = \frac{\pi}{2n}$, то из оценки (28) на основании принципа Фрагмена — Линделефа находим, что

$$|b(\lambda)| < C_3(1 + r^{n-1})\left(|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2n}\right).$$

Аналогичным образом ведет себя функция $b(\lambda)$ и вблизи остальных «опасных» лучей. Следовательно, во всей плоскости выполняется равенство $b(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$, из которого следует тождество

$$L^*(\lambda)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k \lambda^k\right) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} g_k \lambda^k \ (\Psi_k \in H,\ k = 0,\ \ldots,\ n-1).$$

После сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ, с учетом полноты оператора $\boldsymbol{H}$, получаем, что $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} = 0$, что противоречит предположению.

Для завершения доказательства осталось показать, что из условия (1) следует наличие последовательности $\{\omega_l\}_1^\infty$, для которой выполняется неравенство (25). В ([10, с. 26]) была установлена оценка

$$\int_{t_0}^{k} \frac{dx}{xm^{-1}(x)} \leqslant C_4 \left(1 + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} s_j (A_p) (2_{j-1})^{-1}\right).$$

Поэтому на основании (1) заключаем, что существует подпоследовательность $\{m_l\}_1^\infty$ натурального ряда чисел такая, что

$$s_{m_l}^{a} (H) \int_{t_0}^{m_l} \frac{dx}{xm^{-1}(x)} = \varepsilon_l \; (\varepsilon_l \to 0, \; l \to \infty).$$

Рассмотрим последовательность $\{\omega_l\}_1^\infty$:

$$\omega_l = \omega' + \beta^{-1} \int_{t_0}^{(m^l)^2} \frac{dx}{xm^{-1}(x)}.$$

Поскольку $3\varepsilon_l s_{m_l}^{-a} (H) \geqslant \beta (\omega_l - \omega')$, то

$$\nu \left(b (\omega_l + d)^{\frac{1}{a}}, \; H \right) = \max_j \left\{ j : \bar{s}_j^{a} (H) < b^a (\omega_l + d) \right\} < m_l.$$

А так как $m ((r (\rho (\omega_l - \omega')))^{-1}) = m_l^2$, то неравенство (25) для последовательности $\{\omega_l\}_1^\infty$ выполнено.

Теорема доказана полностью.

Замечание. При доказательстве теоремы считалось, что $n(\infty) = \infty$. Условие $n(\infty) < \infty$ означает, что операторы $A_p \in S_\omega$ ($p = 0, \ldots, n-1$), а следовательно, и операторы $A_p H^a \in S_\omega$. Для последнего случая утверждение теоремы следует из теоремы 3.1 статьи [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. — ДАН СССР, 1951, т. 177, № 1, с. 11—14.
2. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. — «Усп. мат. наук», 1971, т. 26, вып. 4, с. 15—41.
3. Крейн М. Г., Лангер Г. К. К теории квадратичных самосопряженных операторов. — ДАН СССР, 1964, т. 154, вып. 6, с. 1258—1261.
4. Мацаев В. И. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов. — ДАН СССР, 1964, т. 155, вып. 2, с. 273—276.
5. Маркус А. С. О кратной полноте и сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка. — ДАН СССР, 1965, т. 163, вып. 5, с. 1061—1064.

6. Аллахвердиев Дж. Э. О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, близких к нормальным. — ДАН СССР, 1957, т. 115, вып. 2, с. 207—210.
7. Палант Ю. А. Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. — ДАН СССР, 1961, т. 141, вып. 3, с. 558—560.
8. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965. 448 с.
9. Могульский Е. З. О полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка. — ДАН СССР, 1968, т. 183, вып. 4, с. 775—778.
10. Мацаев В. И. и Могульский Е. З. Некоторые признаки кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 13, Харьков, 1971, с. 3—46.
11. Weyl H. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of linear transfomation. — «Proc. Nat. Sci.», vol. 35. p. 408—411.
12. Левин Б. Я. Распределение нулей целых функций М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
13. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М., Гостехиздат, 1949. 451 с.

Поступила 9 февраля 1974 г.