УДК 517.2

Р. Л. МОГИЛЕВСКАЯ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОПЕРАТОРОВ С МЕДЛЕННО РАСТУЩЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ

В работе построены треугольные функциональные модели диссипативных и сжимающих операторов, на рост резольвенты которых наложены некоторые ограничения. Тем самым на такие операторы обобщены соответствующие результаты М. С. Лившица [1] и В. Т. Поляцкого [2,3]. Получены также описания «дополнительных компонент» треугольных моделей.

Основные результаты работы содержатся в 2,3. 1 носит вспомогательный характер: в нем сформулирован ряд определений и теорем, на которые мы ссылаемся в дальнейшем, а также доказано одно простое предложение (теорема 3), тесно примыкающее к этим теоремам.

1. Спектральные функции сжатий с медленно растущей резольвентой. Пусть T — сжатие ($\| T \| \leqslant 1$) с унитарным (т. е. расположенным на единичной окружности) спектром, действующее в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Отнесем T к классу II [4], если

$$\overline{\lim_{\rho \uparrow 1}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \{(1-\rho) \| (T - \rho e^{i\varphi} I)^{-1} \| \} \, d\varphi < \infty.$$

Классу II принадлежат, в частности, сжатия, подобные унитарному оператору, слабые сжатия T ($\operatorname{sp}(I - T^*T) < \infty$) с унитарным спектром.

Всякое сжатие T, действующее в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, можно включить [5] в сжимающий узел:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & T & \boldsymbol{H} \\ F & & G \\ \boldsymbol{F} & T^{(0)} & \boldsymbol{G} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ — сепарабельные пространства; F, G, $T^{(0)}$ — операторы, действующие соответственно из $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{H}$, из $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{H}$ и из $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{F}$, и связанные соотношениями $I - T^*T = GG^*$, $I - TT^* = FF^*$, $TG = FT^{(0)}$, $I - T^{(0)*}T^{(0)} = G^*G$, $I - T^{(0)}T^{(0)*} = F^*F$.

Оператор T называется основным оператором узла α. Узлу α поставим в соответствие его характеристическую функцию (х. ф.)

$$\theta_\alpha(\zeta) = T^{(0)} - \zeta F^*(I - \zeta T^*)^{-1}G \,|\, \boldsymbol{G}.$$

Рассмотрим также класс $\boldsymbol{P}$ функций $X(\zeta)$, значениями которых при $|\zeta| < 1$ являются обратимые сжатия в $\boldsymbol{G}$, и

$$\sup_{0 \leqslant \rho < 1} \int_0^{2\pi} \ln \| X^{-1}(\rho e^{i\upsilon}) \| \, d\upsilon < \infty. \tag{2}$$

Если T — основной оператор узла α, то включения $T \in \Pi$, $\theta_\alpha(\zeta) \in \boldsymbol{P}$ эквивалентны [4].

Условие (2) для $\theta_\alpha(\zeta)$ равносильно существованию при $|\zeta| < 1$ наилучшей гармонической мажоранты $u_\alpha(\zeta)$ функции $\ln \| \theta_\alpha^{-1}(\zeta) \|$:

$$u_\alpha(\zeta) = \int_0^{2\pi} (1 - |\zeta|^2) \, |\zeta - e^{i\upsilon}|^{-2} d\omega_\alpha(\upsilon),$$

где $\omega_\alpha(\upsilon)$ $(0 \leqslant \upsilon \leqslant 2\pi,\ \omega_\alpha(0) = 0)$ — непрерывная слева неубывающая функция.

Для измеримой функции $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l = \omega_\alpha(2\pi),\ 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 2\pi)$ положим

$$\varphi_{a,\,b}^{<-1>}(\upsilon) = \operatorname{mes}\{t : \varphi(t) < \upsilon,\ a \leqslant t \leqslant b\}$$
$$(0 \leqslant \upsilon \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant a < b \leqslant l).$$

Функцию $\varphi(t)$ назовем [6, 7] ограниченно разрывной, если она представляется в виде суммы непрерывной функции и функции ограниченной вариации, и допустимой, если, кроме того, при любом $t \in [0, l]$

$$\min\left\{\frac{d}{d\upsilon}\varphi_{0,\,t}^{<-1>}(\upsilon);\ \frac{d}{d\upsilon}\varphi_{t,\,l}^{<-1>}(\upsilon)\right\} = 0 \text{ почти для всех } \upsilon \in [0, 2\pi].$$

Допустимыми являются, например, монотонные функции, функции ограниченной вариации, для которых множество значений, принимаемых более одного раза, имеет нулевую меру.

Теорема 1. [7]. *Пусть (1) — узел, для которого оператор $T \in \Pi$ является основным. Если $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — произвольная допустимая функция, удовлетворяющая условию $\varphi_{0,l}^{<-1>}(\upsilon) = \omega_\alpha(\upsilon)$, то справедливо представление*

$$\theta_\alpha(\zeta) = U \overset{\leftarrow}{\int_0^l} \exp\{k[\zeta, \varphi(t)]\, dE(t)\}, \tag{3}$$

в котором U — изометрия из G на F, $E(t)$ — эрмитово-возрастающая на $[0, l]$ оператор-функция,

$$\operatorname*{var}_{[0,t]} E \equiv t, \ E(0) = 0, \ k(\zeta, \varphi) = (\zeta + e^{i\varphi})(\zeta - e^{i\varphi})^{-1}.$$

Теорема 2. [7] *Пусть T — действующее в H сжатие с унитарным спектром. Если существует спектральная функция* $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$, принадлежащая T, и ограниченно разрывная функция $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ такие, что 1) спектр $\sigma(T, P, t', t'')$ каждого из операторов $[P(t'') - P(t')]\, T \mid [P(t'') - P(t')] H$ $(0 \leqslant t' < t'' \leqslant l)$ принадлежит замыканию множества значений функции $e^{i\varphi(t)}$ в $(t', t'']$;*

2) $\operatorname{sp}_{\hat{P}}(I - T^*T) < \infty$ $\left(\hat{P} = \{P(t)\}\right)$**, то справедливо представление

$$T = \int_0^l e^{i\varphi(t)} dP(t) \left\{ I + \int_0^l [I - P(t)(I - T^*T)P(t)]^{-1} P(t)(I - T^*T)\, dP(t) \right\}^{-1},$$

и T принадлежит Π

Если $\varphi(t)$ — допустимая функция, то для полной неунитарности оператора T необходимо и достаточно, чтобы замыкание линейной оболочки (з.л.о.) векторов вида

$$P(t)(I - T^*T)h, \quad 0 \leqslant t \leqslant l, \ h \in H$$

совпадало с H.

Теорема 3. *Пусть $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — спектральная функция, H — неотрицательный оператор, $\|H\| < 1$, $\operatorname{sp}_{\hat{P}} H < \infty$ $\left(\hat{P} = \{P(t)\}\right)$, $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — допустимая функция. Тогда оператор*

$$T = \int_0^l e^{i\varphi(t)} dP(t) \times \left\{ I + \int_0^l [I - P(t) H P(t)]^{-1} P(t) H\, dP(t) \right\}^{-1}$$

* Функция $P(x)$, заданная на $[a, b]$, называется **спектральной**, если ее значениями являются ортопроекторы в H, $P(x)$ строго возрастает и сильно непрерывна на $[a, b]$, $P(a) = 0$, $P(b) = I$. Говорят, что $P(x)$ принадлежит оператору T, если все подпространства $P(x)H$ инвариантны относительно T.

** Под $\operatorname{sp}_{\hat{P}} H$ (след неотрицательного оператора H вдоль цепочки $\hat{P} = \{P(t)\}$) подразумевается $\sup \sum_j \| [P(t_j) - P(t_{j-1})] H - [P(t_j) - P(t_{j-1})] \|$ (sup берется по всевозможным разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = l$) [6].

принадлежит классу П. *Основное подпространство** *оператора* T *совпадает с з.л.о.* $\{P(t)Hh,\ 0 \leqslant t \leqslant l,\ h \in \boldsymbol{H}\}$.

Доказательство. Включим оператор T в узел (1). Х.ф. этого узла $\theta_\alpha(\zeta)$ представляется (ср. [8]) в виде (3). Значит, $\theta_\alpha(\zeta) \in \boldsymbol{P}$ и, следовательно, $T \in$ П. Непосредственной проверкой убеждаемся (ср. [9]), что $P(t)$ — спектральная функция оператора T и $I - T^*T = H$.

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{H}_1 = \text{з.л.о.}\ \{T^nHh,\ T^{*n}Hh,\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ h \in \boldsymbol{H}\};$$
$$\boldsymbol{H}_0 = \text{з.л.о.}\ \{P(t)Hh,\ 0 \leqslant t \leqslant l,\ h \in \boldsymbol{H}\}. \tag{4}$$

Раскладывая в ряд выражения для T и T^*, заменяя полученные интегралы интегральными суммами и пользуясь включением $P(t)\boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H}_0\ (0 \leqslant t \leqslant l)$, доказываем, что подпространство $\boldsymbol{H}_0$ инвариантно относительно T и T^*, и

$$\boldsymbol{H}_1 \subset \boldsymbol{H}_0. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор $T_0 = T \mid \boldsymbol{H}_0$. Легко видеть, что

$$T_0 = \int_0^l e^{i\varphi(t)} dP_0(t) \left\{ I + \int_0^l [I - P_0(t) HP_0(t)]^{-1} P_0(t)\, HdP_0(t) \right\}^{-1},$$

где $P_0(t) = P(t) \mid \boldsymbol{H}_0$. Так как $P(t)\boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H}_0$, то $P_0^2(t) = P_0(t)$ и, следовательно, $P_0(t)$ — ортопроектор в пространстве $\boldsymbol{H}_0$ при любом $t \in [0,\ l]$.

Пусть $h \in \boldsymbol{H}$. Тогда $Hh \in \boldsymbol{H}_0$, и $P_0(t)Hh = P(t)Hh$. Поэтому (4) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{H}_0 = \text{з.л.о.}\ \{P_0(t)Hh,\ 0 \leqslant t \leqslant l,\ h \in \boldsymbol{H}\}.$$

Если $\mathrm{H}_0 = H \mid \boldsymbol{H}_0$, то $H_0\boldsymbol{H}_0 = H\boldsymbol{H}_0 = H\boldsymbol{H}$,
и

$$\boldsymbol{H}_0 = \text{з.л.о.}\ \{P_0(t)H_0h,\ 0 \leqslant t \leqslant l,\ h \in \boldsymbol{H}_0\}. \tag{6}$$

Из последнего равенства и теоремы 2 следует, что оператор $T \mid \boldsymbol{H}_0$ вполне неунитарен. Значит, $\boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H}_1$, что в сочетании с (5) доказывает теорему.

2. Построение треугольных моделей сжатий с медленно растущей резольвентой. Пусть основной оператор T узла (1) принадлежит классу П. По теореме 1 его х.ф допускает мультипликативное представление (3). Введем обозначения:

$$\theta_\alpha(\zeta,\ t) = \overset{\leftarrow}{\int_0^t} \exp\{k[\zeta,\ \varphi(\tau)]\, dE(\tau)\}.$$

---

* Основным подпространством оператора T называется $\boldsymbol{H}_1 = \text{з.л.о.}\ \{T^n(I - T^*T)h,\ T^{*n}(I - T^*T)h,\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ h \in \boldsymbol{H}\}$. Подпространство $\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H} \ominus \boldsymbol{H}_1$ называется дополнительной компонентой оператора T. Оператор T индуцирует в $\boldsymbol{H}_1$ вполне неунитарный, а в $\boldsymbol{H}_2$ — унитарный [5].

Легко видеть, что существует эрмитово-неотрицательная (слабо) измеримая оператор-функция $M(x)$, $||M(x)||=1$ почти при всех $x \in [0, l]$ такая, что $E(t)=\int\limits_0^t M(x)\,dx$. Очевидно, функция $M(x)$ представима в виде $M(x)=\Gamma(x)\Gamma^*(x)$, где $\Gamma(x)$ — измеримая оператор-функция, $||\Gamma(x)||=1$ почти для всех $x \in [0, l]$. (Можно, в частности, положить $\Gamma(x)=M^{\frac{1}{2}}(x)$).

Рассмотрим лебегово пространство L_G^2 измеримых вектор-функций $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве G, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^l ||f(x)||^2 dx < < \infty$. Зададим скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ пространства L_G^2 формулой $< f(x), g(x) > = \int\limits_0^l (f(x), g(x))\,dx$, где круглыми скобками обозначено скалярное произведение в G.

Теорема 4. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие класса* II *(1) — узел, для которого оператор T является основным, (3) — какое-нибудь представление $\theta_\alpha(\zeta)$, $\Gamma(x)$ — измеримая функция, значениями которой являются операторы в G, такая, что $E(t) = = \int\limits_0^t \Gamma(x)\Gamma^*(x)\,dx$. Тогда узел α унитарно эквивалентен* узлу*

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} L_G^2 \ominus D & \vec{T} & L_G^2 \ominus D \\ \vec{F} & & \vec{G} \\ G & \vec{T}^{(0)} & G \end{pmatrix},$$

где

$$\vec{T} f(x) = e^{i\varphi(x)}\left[f(x) - 2\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha^{-1*}(0, x)\int\limits_x^l \theta_\alpha^*(0, t)\,\Gamma(t)\,f(t)\,dt\right], \quad (7)$$

$$\vec{G} g = \sqrt{2}\,\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(0, x)\,g,$$

$$\vec{F} g = \sqrt{2}\,e^{i\varphi(x)}\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha^{-1*}(0, x)\,\theta_\alpha^*(0, l)\,g.$$

$$\vec{T}^{(0)} g = \theta_\alpha(0, l)\,g,$$

$$(f(x) \in L_G^2,\ g \in G,\ x \in [0, l]),$$

---

* Узлы $\alpha_i = \begin{pmatrix} H_i & T_i & H_i \\ F_i & & G_i \\ F_i & T_i^{(0)} & G_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2)$ называются унитарно эквивалентными, если $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$, $T_1^0 = T_2^0$, и существует такое изометрическое отображение U пространства H_1 на H_2, что $UT_1 = T_2U$, $F_2 = UF_1$, $G_2 = UG_1$ [5].

$$D = \{f(x) : f(x) \in L_G^2,\ \Gamma(x) f(x) = 0 \text{ почти всюду на } [0, l]\} \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим совокупность

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} L_G^2 & \vec{T} & L_G^2 \\ \vec{F} & & \vec{G} \\ G & \vec{T}^{(0)} & G \end{pmatrix} \tag{9}$$

и докажем, что она является узлом. Для удобства обозначим $\theta_\alpha(0, x) \equiv \Phi(x)$. Имеют место тождества (ср. [2])

$$2\int_a^b \Phi^{-1}(x)\Gamma(x)\Gamma^*(x)\Phi^{-1*}(x)\,dx = \Phi^{-1}(b)\Phi^{-1*}(в) - \Phi^{-1}(a)\Phi^{-1*}(a);$$

$$2\int_a^b \Phi^*(x)\Gamma(x)\Gamma^*(x)\Phi(x)\,dx = \Phi^*(a)\Phi(a) - \Phi^*(b)\Phi(b). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что для $f(x) \in L_G^2$

$$\vec{T}^* f(x) = e^{-i\varphi(x)} f(x) - 2\Gamma^*(x)\Phi(x)\int_0^x e^{-i\varphi(t)}\Phi^{-1}(t)\Gamma(t)f(t)\,dt.$$

Для любых $f(x) \in L_G^2$, $g \in G$

$$< \vec{G}g,\ f(x) > = \sqrt{2}\int_0^l (\Gamma^*(x)\Phi(x)g,\ f(x))\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^l (g,\ \Phi^*(x)\Gamma(x)f(x))\,dx = \left(g, \sqrt{2}\int_0^l \Phi^*(x)\Gamma(x)f(x)\,dx\right).$$

Следовательно,

$$\vec{G}^* f(x) = \sqrt{2}\int_0^l \Phi^*(x)\Gamma(x)f(x)\,dx.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\vec{F}^* f(x) = \sqrt{2}\Phi(l)\int_0^l e^{-i\varphi(x)}\Phi^{-1}(x)\Gamma(x)f(x)\,dx.$$

Вычислим

$$\left(I - \vec{T}^*\vec{T}\right) f(x) = 2\Gamma^*(x)\Phi^{-1*}(x)\int_x^l \Phi^*(t)\Gamma(t)f(t)\,dt +$$

$$+ 2\Gamma^*(x)\Phi(x)\int_0^x \Phi^{-1}(t)\Gamma(t)f(t)\,dt -$$

$$- 4\Gamma^*(x)\Phi(x)\int_0^x \Phi^{-1}(t)\Gamma(t)\Gamma^*(t)\Phi^{-1*}(t)\int_t^l \Phi^*(z)\Gamma(z)f(z)\,dz.$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и используя тождества (10), получаем

$$\left(I-\vec{T}^{*}\vec{T}\right)f(x)=2\Gamma^{*}(x)\,\Phi(x)\int_{0}^{l}\Phi^{*}(t)\,\Gamma(t)\,f(t)\,dt=\vec{G}\vec{G}^{*}f(x).$$

Аналогично проверяем, что

$$\left(I-\vec{T}\vec{T}^{*}\right)f(x)=\vec{F}\vec{F}^{*}f(x)\quad\left(f(x)\in L_{G}^{2}\right).$$

Далее, для $g\in\boldsymbol{G}$

$$\vec{G}^{*}\vec{G}g=2\int_{0}^{l}\Phi^{*}(t)\,\Gamma(t)\,\Gamma^{*}(t)\,\Phi(t)\,dt\,g=$$

$$=[I-\Phi^{*}(l)\,\Phi(l)]\,g=\left[I-\vec{T}^{(0)*}\vec{T}^{(0)}\right]g;$$

$$\vec{F}^{*}\vec{F}g=2\Phi(l)\int_{0}^{l}\Phi^{-1}(t)\,\Gamma(t)\,\Gamma^{*}(t)\,\Phi^{-1^{*}}(t)\,dt\,\Phi^{*}(l)\,g=$$

$$=\Phi(l)\left[\Phi^{-1}(l)\,\Phi^{-1^{*}}(l)-I\right]\Phi^{*}(l)\,g=\left[I-\vec{T}^{(0)}\vec{T}^{(0)*}\right]g.$$

Наконец,

$$\vec{T}\vec{G}g=\sqrt{2}\,e^{i\varphi(x)}\left[\Gamma^{*}(x)\,\Phi(x)-2\Gamma^{*}(x)\,\Phi^{-1^{*}}(x)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{x}^{l}\Phi^{*}(t)\,\Gamma(t)\,\Gamma^{*}(t)\,\Phi(t)\,dt\right]g=\sqrt{2}\,e^{i\varphi(x)}\Gamma^{*}(x)\,[\Phi(x)-$$

$$-\Phi^{-1^{*}}(x)\,(\Phi^{*}(x)\,\Phi(x)-\Phi^{*}(l)\,\Phi(l))]\,g=$$

$$=\sqrt{2}\,e^{i\varphi(x)}\Gamma^{*}(x)\,\Phi^{*}(l)\,\Phi(l)\,g=\vec{F}\vec{T}^{(0)}g\quad(g\in\boldsymbol{G})$$

и, значит, совокупность (9) является узлом.

Вычислим характеристическую функцию узла $\vec{\alpha}_{1}$. Пусть $g\in\boldsymbol{G}$ и

$$h_{\zeta}(x)=\left(I-\zeta\vec{T}^{*}\right)^{-1}\vec{G}g.$$

Тогда

$$\sqrt{2}\,\Gamma^{*}(x)\,\Phi(x)=\vec{G}g=\left(I-\zeta\vec{T}^{*}\right)h_{\zeta}(x),$$

т. е.

$$\sqrt{2}\,\Gamma^{*}(x)\,\Phi(x)=(1-\zeta e^{-i\varphi(x)})\,h_{\zeta}(x)+2\zeta\Gamma^{*}(x)\,\Phi(x)\times$$

$$\times\int_{0}^{x}\Phi^{-1}(t)\,\Gamma(t)\,h_{\zeta}(t)\,dt.\tag{11}$$

Рассмотрим оператор-функцию $\Omega(\zeta, x) = \Phi^{-1}(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x)$. Так как $\Omega(\zeta, 0) = I$,

$$\frac{d\Omega(\zeta, x)}{dx} = \Phi^{-1}(x)\,\Gamma(x)\,\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x) +$$

$$+ \frac{\zeta + e^{i\varphi(x)}}{\zeta - e^{i\varphi(x)}}\Phi^{-1}(x)\,\Gamma(x)\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x) = \frac{2\zeta}{\zeta - e^{i\varphi(x)}} \times$$

$$\times \Phi^{-1}(x)\,\Gamma(x)\,\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x)$$

(все производные понимаются в слабом смысле), то

$$I = \Omega(\zeta, x) - \int_0^x \frac{2\zeta}{\zeta - e^{i\varphi(t)}}\Phi^{-1}(t)\Gamma(t)\,\Gamma^*(t)\,\theta_\alpha(\zeta, t)\,dt;$$

$$\sqrt{2}\,\Gamma^*(x)\,\Phi(x) = \sqrt{2}\,\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x) -$$

$$-\sqrt{2}\,\Gamma^*(x)\,\Phi(x)\int_0^x \frac{2\zeta}{\zeta - e^{i\varphi(t)}}\Phi^{-1}(t)\,\Gamma(t)\,\Gamma^*(t)\,\theta_\alpha(\zeta, t)\,dt.$$

Из последнего равенства, учитывая, что уравнение Вольтерра II рода (11) при фиксированном $\zeta\,(|\zeta| < 1)$ имеет единственное решение, получаем

$$h_\zeta(x) = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x)}{1 - \zeta e^{-i\varphi(x)}}.$$

Следовательно,

$$\zeta\vec{F}^*\left(I - \zeta\vec{T}^*\right)^{-1}\vec{G}g = \zeta\vec{F}^* h_\zeta(x) =$$

$$= 2\zeta\int_0^l \Phi(l)\,\Phi^{-1}(x)\,\Gamma(x)\,\frac{\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x)}{-\zeta + e^{i\varphi(x)}}\,dxg =$$

$$= -\Phi(l)\int_0^l \frac{2\zeta}{\zeta - e^{i\varphi(x)}}\Phi^{-1}(x)\Gamma(x)\Gamma^*(x)\,\theta_\alpha(\zeta, x)\,dxg = -\Phi(l)[\Omega(\zeta, l) - I],$$

$$\theta_{\vec{\alpha}_1}(\zeta) = \Phi(l) + \Phi(l)\,[\Phi^{-1}(l)\,\theta_\alpha(\zeta, l) - I] = \theta_\alpha(\zeta).$$

Значит, узел α унитарно эквивалентен главной части узла $\vec{\alpha}_1$ [5], т. е. проекции узла $\vec{\alpha}_1$ на основное подпространство оператора $\vec{T}$.

Вычислим основное подпространство оператора $\vec{T}$. Зададим в пространстве L^2_G проекционный оператор $Q(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ формулой

$$Q(x)\,h(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \leqslant t \leqslant x \\ 0, & x < t \leqslant l \end{cases}.$$

Тогда для произвольных $g \in G$ и $x \in [0, l]$

$$\vec{G}^* Q(x)\vec{G}g = 2\int_0^l \Phi^*(t)\,\Gamma(t)\,Q(x)\,\Gamma^*(t)\,\Phi(t)\,dtg =$$

$$= \int_0^x \Phi^*(t)\,\Gamma(t)\,\Gamma^*(t)\,\Phi(t)\,dtg = [I - \Phi^*(x)\,\Phi(x)]\,g =$$

$$= [I - \theta_\alpha^*(0,\ x)\,\theta_\alpha(0,\ x)]\,g = 2\int_0^x \theta_\alpha^*(0,\ \tau)\,dE(\tau)\,\theta_\alpha(0,\ \tau)\,g.$$

Поэтому

$$\mathrm{sp}_{\hat{Q}}\left(I - \vec{T}^*\vec{T}\right) = \sup \sum_j ||\Delta Q_j \vec{G}\vec{G}^* \Delta Q_j|| =$$

$$= \sup \sum_j ||\vec{G}^* \Delta Q_j \vec{G}|| \leqslant 2 \operatorname*{var}_{[0,l]} E < \infty \quad \left(\hat{Q} = \{Q(x)\}\right).$$

Из уравнения

$$\left[\vec{T}_{Q(x'')-Q(x')} - \zeta I_{Q(x'')-Q(x')}\right] f(x) = h(x) \quad (h(x) \in \boldsymbol{L}_G^2)$$

находим

$$f(x) = \frac{2\Gamma^*(x)\,\Phi^{-1^*}(x)}{e^{i\varphi(x)} - \zeta} \int_{x'}^{x''} \Phi^*(t)\,\Gamma(t)\,f(t)\,dt + \frac{h(x)}{e^{i\varphi(x)} - \zeta},$$

откуда следует, что спектр оператора $\vec{T}_{Q(x'')-Q(x')} = [Q(x'') - Q(x')]\,\vec{T}\,|\,[Q(x'') - Q(x')]\,\boldsymbol{L}_G^2$ совпадает с замыканием множества значений $e^{i\varphi(x)}$ в $[x',\ x'']$.

По теореме 3 основное подпространство $\boldsymbol{B}$ оператора $\vec{T}$ совпадает с з.л.о. $\left\{Q(x)\,\vec{G}g,\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ g \in \boldsymbol{G}\right\}$. Поэтому чтобы $f(x) \in \boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}_G^2 \ominus \boldsymbol{B}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$< Q(t)\,\vec{G}g,\ f(x) > = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant l,\ g \in \boldsymbol{G}),$$

т. е.

$$\left(g, \int_0^t \Phi^*(x)\,\Gamma(x)\,f(x)\,dx\right) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant l,\ g \in \boldsymbol{G}),$$

что эквивалентно равенству

$\Phi^*(x)\,\Gamma(x)\,f(x) = 0$ почти для всех $x \in [0,\ l]$.

Так как $\Phi^*(x)$ не аннулирует векторов из $\boldsymbol{L}_G^2$, то $\Gamma(x) \times f(x) = 0$ почти для всех $x \in [0,\ l]$. Теорема доказана.

Треугольная модель вида (7) впервые была построена В. Т. Поляцким [2, 3] для ограниченных и ограниченно обратимых линейных операторов T, у которых $\mathrm{sp}\,(I - T^*T) < \infty$. Вид же (8) дополнительной компоненты $\boldsymbol{D}$ треугольной модели (7) не был ранее известен даже в случае конечномерности оператора $I - T^*T$.

3. Треугольные модели диссипативных операторов с медленно растущей резольвентой. Пусть A — ограниченный диссипативный

$\left(A_J = \frac{A - A^*}{2i} \geqslant 0\right)$ оператор с вещественным спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Оператор A отнесем к классу Λ [6], если

$$\lim_{y \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ \{y \,\| [A - (x + iy) I]^{-1} \|\}}{1 + x^2} dx < \infty.$$

Классу Λ принадлежат, в частности, диссипативные операторы, подобные самосопряженному [9], диссипативные операторы с вещественным спектром и sp $A_j < \infty$ [1], операторы класса $\Lambda^{(\exp)}$ [10]. Преобразования Кэли операторов класса Λ принадлежат Π.

Известно [11], что всякий диссипативный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, можно включить в диссипативный узел

$$\Theta = \begin{pmatrix} A & K \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{G} \end{pmatrix}.$$

Здесь K — ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{H}$ и удовлетворяющий условию $KK^* = \frac{A - A^*}{2i}$. Оператор A называется основным оператором узла Θ. Узлу Θ поставим в соответствие [11] его характеристическую функцию (х. ф.).

$$W_\Theta(\lambda) = I - 2iK^* (A - \lambda I)^{-1} K \,|\, \boldsymbol{G}.$$

Рассмотрим также класс $\boldsymbol{L}$-функций $W(\lambda)$ таких, что значениями $W(\lambda)$ $(\operatorname{Im} \lambda > 0)$ являются линейные ограниченные операторы в пространстве $\boldsymbol{G}$, $W(\lambda)$ голоморфна в расширенной плоскости λ, за исключением некоторого ограниченного множества $\boldsymbol{M}_W$ вещественных точек,

$$\operatorname{Im} \lambda \,(W^*(\lambda) W(\lambda) - I) \leqslant 0 \;(\lambda \,\overline{\in}\, \boldsymbol{M}_W), \; W(\infty) = I,$$

$$\varlimsup_{y \to -0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \ln \| W(x + iy) \| \, dx < \infty. \tag{12}$$

Если A — основной оператор узла Θ, то включения $A \in \Lambda$, $W^*_\Theta(\overline{\lambda}) \in \boldsymbol{L}$ эквивалентны [6].

Условие (12) для $W^*_\Theta(\overline{\lambda})$ эквивалентно существованию при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ наилучшей гармонической мажоранты $u_\Theta(\lambda)$ функции $\ln \| W^*_\Theta(\overline{\lambda}) \|$:

$$u_\Theta(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y}{(x - \tau)^2 + y^2} \, d\omega_\Theta(\tau),$$

где $\omega_\Theta(\tau)$ $(-\infty < \tau < \infty)$ — неубывающая ограниченная функция, $\omega_\Theta(-\infty) = 0$, $\omega_\Theta(\tau - 0) = \omega_\Theta(\tau)$.

Теорема 5. *Если* $A \in \Lambda$, $\Theta = \begin{pmatrix} A & K \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{G} \end{pmatrix}$ — *узел, для которого оператор* A *является основным,* $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — *произвольная допустимая функция, удовлетворяющая условию* $\alpha^{<-1>}_{0,l}(\tau) = \omega_\Theta(\tau)$ $(-\infty < \tau < \infty)$, *то справедливо представление*

$$W_\Theta(\lambda) = \overset{\rightarrow}{\int_0^l} \exp\left\{ i \frac{H(t)\,dt}{\lambda - \alpha(t)} \right\}, \tag{13}$$

где $H(t)$ — *эрмитово-неубывающая функция ограниченной вариации на* $[0, l]$.

Теорема 6. *Пусть* A — *диссипативный оператор с вещественным спектром. Если существует спектральная функция* $P(t) \times$ $\times (0 \leqslant t \leqslant l)$, *принадлежащая* A, *и ограниченно разрывная функция* $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ *такие, что* 1) $\sigma(A, P, t', t'')$ *принадлежит замыканию множества значений* $\alpha(t)$ в $(t', t'']$; 2) $\operatorname{sp}_{\hat{P}} A_J < \infty$ $(\hat{P} =$ $= \{P(t)\})$, *то справедливо представление*

$$A = \int_0^l \alpha(t)\,dP(t) + 2i \int_0^l P(t)\,A_J\,dP(t)$$

и A *принадлежит* Λ.

При этом если $\alpha(t)$ — допустимая функция, то основное подпространство оператора A совпадает с замыканием линейной оболочки векторов $P(t)A_J h$ $(0 \leqslant t \leqslant l,\ h \in \boldsymbol{H})$.

Теоремы 5 и 6, за исключением последнего утверждения, сформулированы в [6].

Доказательства теорем 5 и 6 аналогичны доказательствам теорем 1—3 для класса II и поэтому опускаются.

Теорема 7. *Пусть* A — *вполне несамосопряженный оператор класса* Λ, $\Theta = \begin{pmatrix} A & K \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{G} \end{pmatrix}$ — *диссипативный узел, для которого* A *является основным оператором,* (13) — *какое-нибудь представление* $W_\Theta(\lambda)$, $\Pi(x)$ — *измеримая функция, значениями которой являются операторы в* $\boldsymbol{G}$, *такая, что* $H(x) = \Pi(x)\Pi^*(x)$.

Тогда узел Θ *унитарно эквивалентен узлу*

$$\vec{\Theta} = \begin{pmatrix} \vec{A} & \vec{K} \\ \boldsymbol{L}^2_G \ominus \boldsymbol{DG} \end{pmatrix},$$

где

$$\vec{A} f(x) = \alpha(x) f(x) + i\Pi^*(x) \int_x^l \Pi(t) f(t)\,dt \quad \left(f(x) \in \boldsymbol{L}^2_G\right), \tag{14}$$

$$\vec{K} g = \frac{1}{\sqrt{2}} \Pi^*(x) g \quad (0 \leqslant x \leqslant l,\ g \in \boldsymbol{G}),$$

$$\boldsymbol{D} = \left\{ f(x) : f(x) \in \boldsymbol{L}^2_G,\ \Pi(x) f(x) = 0 \ \textit{почти всюду} \text{ на } [0, l] \right\} \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим совокупность

$$\vec{\Theta}_1 = \begin{pmatrix} \vec{A} & \vec{K} \\ L_G^2 & G \end{pmatrix}$$

и докажем, что она является узлом. Легко видеть, что

$$\vec{A}^* f(x) = \alpha(x) f(x) - i\Pi^*(x) \int_0^x \Pi(t) f(t)\, dt,$$

$$\vec{A}_J f(x) = \frac{1}{2} \Pi^*(x) \int_0^l \Pi(t) f(t)\, dt \quad (f(x) \in L_G^2)$$

и, значит, оператор $\vec{A}$ диссипативен,

$$\vec{K}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^l \Pi(x) f(x)\, dx \quad (f(x) \in L_G^2).$$

Отсюда следует, что $\vec{K}\vec{K}^* = \vec{A}_J$ и $\vec{\Theta}_1$ действительно является узлом.

Вычислим $W_{\vec{\Theta}_1}(\lambda)$. Пусть $g \in G$ и

$$h_\lambda(x) = (\vec{A} - \lambda I)^{-1} \vec{K} g,$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi^*(x) g = \vec{K} g = (\vec{A} - \lambda I) h_\lambda(x),$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi^*(x) g = [\alpha(x) - \lambda] h_\lambda(x) + i\Pi^*(x) \int_x^l \Pi(t) h_\lambda(t)\, dt. \tag{16}$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$W_\Theta(\lambda, x) = \overset{\to}{\int_x^l} \exp\left\{ i \frac{H(t)\, dt}{\lambda - \alpha(t)} \right\}.$$

Так как

$$W_\Theta(\lambda, l) = I, \quad \frac{dW_\Theta(\lambda, x)}{dx} = \frac{i}{\alpha(x) - \lambda} \Pi(x) \Pi^*(x) W_\Theta(\lambda, x),$$

то

$$I = W_\Theta(\lambda, x) + i \int_x^l \frac{1}{\alpha(t) - \lambda} \Pi(t) \Pi^*(t) W_\Theta(\lambda, t)\, dt.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi^*(x) g = \frac{1}{\sqrt{2}} \Pi^*(x) W_\Theta(\lambda, x) g +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}} \Pi^*(x) \int^l \frac{1}{\alpha(t) - \lambda} \Pi(t) \Pi^*(t) W_\Theta(\lambda, t)\, dt g.$$

Сравнив последнее равенство с (16), получим

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Pi^*(x)\, W_\Theta(\lambda, x)}{\alpha(x) - \lambda} g.$$

Следовательно,

$$2i\vec{K}^*(\vec{A} - \lambda I)^{-1}\vec{K}g = 2i\vec{K}^* h_\lambda(x) =$$

$$= i\int_0^l \frac{\Pi(x)\,\Pi^*(x)\, W_\Theta(\lambda, x)}{\alpha(x) - \lambda} dxg = [I - W_\Theta(\lambda, 0)]\, g,$$

т. е.

$$W_{\vec{\Theta}_1}(\lambda) = W_\Theta(\lambda, 0) = W_\Theta(\lambda).$$

Это означает, что узел Θ унитарно эквивалентен главной части узла $\vec{\theta}_1$.

Рассуждения, приводящие к описанию основного подпространства оператора $\vec{A}$, мы опускаем; они совершенно аналогичны соответствующим рассуждениям, приведенным для $\vec{T}$ в 2. Теорема доказана.

Треугольная модель вида (14) впервые была получена М. С. Лившицем [1] для ограниченных операторов с ядерной мнимой компонентой. Описание (15) дополнительной компоненты D треугольной модели (14) даже в случае конечномерной мнимой компоненты оператора $\vec{A}$ ранее было известно лишь в частных случаях $\alpha(t) = 0$ (вольтерров оператор) [12] и $\alpha(t) = t$ (оператор, подобный самосопряженному) [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. — «Мат. сб.», 1954, т. 34, вып. 1, с. 145—198.
2. Поляцкий В. Т. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов. — «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 4, с. 756—759.
3. Поляцкий В. Т. О приведении к треугольному виду операторов класса K. — «Научные записки ОГПИ», 1959, т. 24, вып. 1, с. 13—15.
4. Гинзбург Ю. П. О спектральных подпространствах сжатий с медленно растущей резольвентой. — «Мат. исслед.», 1970, т. 5, вып. 4, с. 45—62.
5. Бродский В. М. Об операторных узлах и их характеристических функциях. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 1, с. 15—19.
6. Гинзбург Ю. П., Могилевская Р. Л. Об одном классе диссипативных операторов с медленно растущей резольвентой. — «Функциональный анализ и его приложения», 1969, т. 3, вып. 4, с 83—84.
7. Гинзбург Ю. П., Могилевская Р. Л. О спектральных функциях сжатия с медленно растущей резольвентой. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 3, с. 13—16.
8. Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Общие теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций. — «Функциональный анализ и его приложения», 1969, т. 3, вып. 4, с. 1—27.

9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным. — «Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, вып. 1, с. 38—60.
10. Бродский М. С., Исаев Л. Е. Треугольные представления диссипативных операторов с резольвентой экспоненциального типа. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 188, № 5, с. 971—973.
11. Бродский М. С. Треугольные и жордановые представления линейных операторов. М., «Наука», 1969
12. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. — «Усп. мат. наук», 1958, т. 13, вып. 1, с. 3—85.
13. Сахнович Л. А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром. — «Труды Моск. мат. об-ва», 1968, вып. 19, с. 211—270.

Поступила 25 января 1973 г.