УДК 517.946

А. А. МАКАРОВ

О КОЛЬЦЕ СВЕРТЫВАТЕЛЕЙ В ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье [1] исследованы классы корректной разрешимости задачи Коши для уравнений в свертках на основе изучения некоторых функциональных пространств и свертывателей в них. Использование подобной методики при изучении краевой задачи для систем уравнений в свертках приводит к необходимости изучения иных функциональных пространств.

В настоящей статье дается полное описание кольца свертывателей в функциональном пространстве, элементами которого являются бесконечно дифференцируемые функции с определенными оценками роста на бесконечности, а также описывается действие оператора Фурье в этом кольце.

Пусть $l(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, которая монотонно возрастает быстрее любой линейной функции и удовлетворяет неравенству

$$l(t_1+t_2) < l(t_1)+l(t_2)+at_1+bt_2+c \tag{1}$$

с некоторыми положительными a, b, c, а производные которой растут на бесконечности не быстрее некоторой степени. Примером такой функции является $l(t)=|t|\ln(1+|t|)$.

Введем в рассмотрение пространства $W^{\infty}_{l\alpha}$, состоящие из N раз непрерывно дифференцируемых функций, которые удовлетворяют неравенствам

$$|D^k\varphi(x)| < C_k \exp\{l((\alpha-\delta\}|x|)\},$$
$$|k| = \sum_{t=1}^{m} k_i \leqslant N, \quad x \in R^m \tag{2}$$

с положительными постоянными C_k, δ, зависящими от $\varphi(x)$ Здесь $\alpha>0$, $D^k\varphi(x) = \dfrac{\partial^{|k|}\varphi(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}}$.

Последовательность функций $\varphi_\nu(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в пространстве $W^N_{l\alpha}$, если, во-первых, φ_ν допускает равномерные оценки по ν, т. е. постоянные в неравенствах (2) не зависят от ν; а во-вторых, на любом компакте в R^m $D^k\varphi_\nu \rightrightarrows D^k\varphi$ при $|k|\leqslant N$.

Пространство $W^N_{l\alpha} = \bigcap\limits_{N=0}^{\infty} W^N_{l\alpha}$ определяется как проективный предел пространств $W^N_{l\alpha}$.

Обозначим через $W^{-\infty}_{-l\alpha}$ пространство обобщенных функций из S' (S — пространство Шварца), которые при любых $\delta>0$ могут быть представлены в виде

$$f = f_\delta \exp\{-l((\alpha-\delta)|x|)\}, \quad f_\sigma \in S'. \tag{3}$$

Сходимость в этом пространстве определяется так: $f_\nu \to f$ в $W^{-\infty}_{-l\alpha}$, если при любых $\delta f_{\delta\nu} \to f_\delta$ в S'.

Так как пространство $W^{\infty}_{l\alpha}$ инвариантно относительно сдвига, то можно обычным образом определить свертку функции $\varphi(x) \in \in W^{\infty}_{l\alpha}$ и функционала $f \in (W^{\infty}_{l\alpha})'$ по формуле

$$(f * \varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} (f_y, \varphi(x-y)). \tag{4}$$

Если f таков, что для любой $\varphi(x) \in W^{\infty}_{l\alpha}$ $f * \varphi \in W^{\infty}_{l\alpha}$, то f называется свертывателем в $W^{\infty}_{l\alpha}$, а оператор, им порождаемый, обозначается $\mathrm{con}_f : \varphi \to f * \varphi$. Совокупность всех свертывателей обозначается $C(W^{\infty}_{l\alpha})$.

Это множество станет кольцом, если в нем определить свертку обобщенных функций (см. [1]): $(f * g, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (g, If * \varphi)$ (I — оператор отражения). Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. $C(W^{\infty}_{l\alpha}) = W^{-\infty}_{-l\alpha}$, *причем это равенство будет гомеоморфизмом, если в* $C(W^{\infty}_{l\alpha})$ *ввести операторную топологию.*

Доказательство. Обобщенная функция $f \in W^{-\infty}_{-l\alpha}$ есть непрерывный функционал на пространстве S, действующий по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{R^m} g_\delta(x) P_\delta(D) [\exp\{-l((\alpha-\delta)|x|)\} dx, \tag{5}$$

где $g_\delta(x) \in C_l(R^m)$, т. е. $|g_\delta(x)| < C(1+|x|)^l$.

Здесь мы воспользовались общим видом функционала в пространстве S (см. [2, с. 144]). Как легко видеть, этот функционал по формуле (5) продолжается на пространство $W^{\infty}_{l\alpha}$, а значит, $W^{-\infty}_{-l\alpha} \subset (W^{\infty}_{l\alpha})'$.

Покажем, что формула (5) задает общий вид функционала из $(W^{\infty}_{l\alpha})'$. Предварительно заметим, что пространство $W^{\infty}_{l\alpha}$ можно представить в такой форме:

$$W^{\infty}_{l\alpha} = \bigcup_{\delta>0} S \exp\{l((\alpha-\delta)|x|)\}, \tag{6}$$

а значит, $(W^{\infty}_{l\alpha})' = \bigcap_{\delta>0} S' \exp\{-l((\alpha-\delta)|x|)\} = W^{-\infty}_{-l\alpha}$.

Покажем теперь, что если $f \in W^{-\infty}_{-l\alpha}$, то $f * \varphi \in W^{\infty}_{l\alpha}$ для любой функции $\varphi \in W^{\infty}_{l\alpha}$ $|(f*\varphi)(x) <| C_1 \int_{R^m} \exp\{l((\alpha-\delta_\varphi)|x-\xi| - l((\alpha - \delta_1)|\xi|\} d\xi < C_2 \exp\{l((\alpha-\delta'_\varphi)|x|)\}$ при любом $\delta'_\varphi < \delta_\varphi$.

Аналогично доказываются неравенства:

$$|D^k(f*\varphi)(x)| < C_k \exp\{l((\alpha-\delta_\varphi)|x|)\}. \tag{7}$$

Значит, включение $f * \varphi \in W^{\infty}_{l\alpha}$ доказано.

Осталось доказать, что включение $W^{-\infty}_{-l\alpha} \subset C(W^{\infty}_{l\alpha})$ является топологическим, т. е. $f_\nu \to f$ в топологии $W^{-\infty}_{-l,\alpha}$, при любых $\varphi \in \in W^{\infty}_{l\alpha}$ $f_\nu * \varphi \to f * \varphi$ в $W^{\infty}_{l\alpha}$.

Это следует, во-первых, из того, что последовательность функций $f_\nu * \varphi$ будет ограниченным множеством в пространстве $W_{l\alpha}^{\infty}$, так как постоянные C_k в неравенствах (7) не зависят от ν, и, во-вторых, что на любом компакте в R^m

$$D^k (f_\nu * \varphi)(x) \rightrightarrows D^k (f * \varphi)(x).$$

Последнее утверждение доказывается стандартными рассуждениями.

Итак, доказано, что включение $W_{-l\alpha}^{-\infty} \subset C(W_{l\alpha}^{\infty})$ топологическое. Ранее было доказано, что $W_{-l\alpha}^{-\infty} = (W_{l\alpha}^{\infty})$, а так как $C(W_{l\alpha}^{\infty}) \subset \subset (W_{l\alpha}^{\infty})'$, то теорема полностью доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы нетрудно видеть, что оператор con_f продолжается непрерывно с пространства $W_{l\alpha}^{\infty}$ на пространство $W_{l\alpha}^{N}$, если N больше порядка сингулярности ρ обобщенной функции f, причем con_f переводит пространство $W_{l\alpha}^{N}$ в пространство $W_{l\alpha}^{N-\rho}$. Поскольку пространство $W_{-l\alpha}^{-\infty}$ является подпространством S', на нем определено преобразование Фурье (см. [2, с. 158]).

Прежде чем дать описание пространства $FW_{-l\alpha}^{-\infty}$, определим пространство $\Omega_{l^*\beta}$ $(\beta > 0)$, состоящее из целых функций, которые удовлетворяют при $\nu > 0$ и любом $\rho > 0$ следующей оценке:

$$|\Psi(s)| < C_\rho (1 + |s|)^\nu \exp\{l^*((\beta + \rho)|\operatorname{Im} s|)\}, \tag{8}$$

где $\operatorname{Im} s = (\operatorname{Im} s_1, \ldots, \operatorname{Im} s_m)$, а $l^*(\tau)$ двойственна по Юнгу к $l(t)$. Для определения сходимости последовательности функций в этом пространстве потребуем, чтобы на любом компакте эта последовательность равномерно сходилась, а функции равномерно удовлетворяли оценке (8).

Теорема 2. $FC(W_{l\alpha}^{\infty}) = \Omega_{l^*1/\alpha}$, *причем оператор Фурье осуществляет непрерывный изоморфизм соответствующих колец.*

Доказательство. Функционал $f \in C(W_{l\alpha}^{\infty})$ можно записать для всех положительных δ в таком виде (см. (3) и [2, с. 144]):

$$f = \exp\{-l((\alpha - \delta)|x|\} D^k g_\delta(x),$$

где $g_\delta(x) \in C_{l_1}(R^m)$ или, воспользовавшись формулой Лейбница — Хермандера, получить

$$f = \sum_{|j| \leq |k|} D^j g_{\delta j}(x),$$

где $g_{\delta j}(x) \exp\{l((\alpha - \delta)|x|)\} \in C_{l_2}(R^m)$.

Преобразования Фурье $g_{\delta j}(x)$ будут целыми функциями, поскольку при любых k, $s \in C^m$

$$\int_{R^m} (ix)^k g_{\delta j}(x) \exp\{i(x, s)\}\, dx < \infty$$

абсолютно и, значит, существуют $D^k \widetilde{g}_{\delta j}(s)$.

Оценим $\widetilde{g}_{\delta j}(s)$, пользуясь неравенством Юнга:

$$|\widetilde{g}_{\delta j}(s)| < C_1 \int_{R^m} \exp\{-l((\alpha-\delta_1)|x| + |x||\operatorname{Im} s|\} dx <$$

$$< C_2 \exp\left\{l^*\left(\frac{\operatorname{Im} s}{\alpha-\delta_2}\right)\right\} = C_2 \exp\left\{l^*\left(\left(\frac{1}{\alpha}+\rho\right)|\operatorname{Im} s|\right)\right\},$$

где $\rho > 0$ любое. Так как $Ff = \sum_j (-is)^j g_{\delta j}(s)$ (см. [2, с. 160]), то выполняется неравенство

$$|F(s)| < C_\rho (1 + ||s||)^{|k|} \exp\left\{\exp\left(\frac{1}{\alpha}+\rho\right)||\operatorname{Im} s||\right\},$$

т. е. $f(s) \in \Omega_{l^*1/\alpha}$.

Мы доказали, что $FC(W_{l\alpha}^\infty) \subset \Omega_{l^*1/\alpha}$.

Покажем обратное включение. Рассмотрим δ-образную последовательность функций g_n из пространства Гуревича $W_{l\alpha}$, т. е. удовлетворяющих для любых положительных δ оценке

$$|D^k g_n(x)| < C_{k\delta} \exp\{-l((\alpha-\delta)|x|)\}$$

и сходящихся к $\delta(x)$ в смысле слабой сходимости (см. [3, с. 10]).

Преобразования Фурье $Fg_n(x) = \psi_n(s)$ будут принадлежать пространству $W^{l^*1/\alpha}$ (см. [3, с. 27]), т. е. для всех положительных $\varkappa$ и ρ выполняется неравенство

$$|\psi_n(s)| < C_{\varkappa\rho}(1+|s|^{-\varkappa} \exp\left\{l^*\left(\left(\frac{1}{\alpha}+\rho\right)|\operatorname{Im} s|\right\}.$$

Из определения пространства $\Omega_{l^*1/\alpha}$ видно, что любая функция $\psi(s)$ из этого пространства является мультипликатором в пространстве $W^{l^*1/\alpha}$ и поэтому $\psi(s)\psi_n(s) \in W^{l^*1/\alpha}$.

Известно (см. [3, с. 29]), что

$$f_n(x) = F^{-1}[\psi\psi_n] \in W_{l\alpha},$$

а с другой стороны, $f_n = g * g_n$, где $g = F^{-1}\psi$.

Так как по предложению $g_n(x) \to \delta(x)$ в пространстве S', а свертка — непрерывный оператор в S', то $f_n \to f$ в S', т. е. при любых $\varphi \in S$ $(f_n, \varphi) \to (g, \varphi)$. Но так как $f_n(x) \in W_{l\alpha}$, то функционалы f_n можно доопределить по непрерывности на пространство $S \exp\{l((\alpha-\delta)|x|\}$ для любого $\delta > 0$, а значит, и на пространство

$$\bigcup_{\delta>0} S \exp\{l((\alpha-\delta)|x|)\} = W_{l\alpha}^\infty.$$

Мы показали, что $g \in (W_{l\alpha}^\infty)' = W_{-l\alpha}^{-\infty}$, т. е. $F^{-1}\Omega_{l^*1/\alpha} \subset W_{-l\alpha}^{-\infty}$, а это и означает, что $FC(W_{l\alpha}^\infty) \supset \Omega_{l^*1/\alpha}$.

Итак, равенство $FC(W_{l\alpha}^\infty) = \Omega_{l^*1/\alpha}$ доказано.

А тот факт, что при преобразовании Фурье свертка переходит в произведение, следует из справедливости этого для пространства S' (см. [1]), подпространством которого является рассматриваемое пространство $W_{-l\alpha}^{-\infty}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Задачи Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках. — «Усп. мат. наук», 1972, т. XXVII, вып. 4 (166), с. 65—144.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции, вып. 2. М., Физматгиз, 1958. 306 с.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. (Обобщенные функции, вып. 3). М., Физматгиз, 1958. 247 с.

Поступила 12 декабря 1974 г.