УДК 517.2

В. А. КОЗЕЛ, Д. Ш. ЛУНДИНА, В. А. МАРЧЕНКО

ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МАТРИЦА ТРЕХМЕРНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

1. *Постановка общей задачи и примеры.*

Для краткости пространствами мы будем называть линейные локально выпуклые топологические пространства над полем комплексных чисел.

Рассмотрим произвольные пространства X_1, X_2 и сопряженные им пространства линейных функционалов X^1, X^2. Значение функционала $l \in X^i$ на векторе $x \in X_i$ будем обозначать через $<x, l>$.

Пусть I_2^1 — непрерывный линейный оператор, отображающий пространство X_2 в X^1, а L_2 — линейный оператор, определенный на линейном многообразии $X_2(L_2) \subset X_2$ и отображающий его в пространство X_2. Эти операторы порождают билинейные формы:

$$<x_1, \ I_2^1 x_2>, \ (x_1 \in X_1, \ \ x_2 \in X_2), \tag{1.1}$$

$$<x_1, \ I_2^1 L_2 x_2>, \ \ (x_1 \in X_1, \ \ x_2 \in X_2(L_2)), \tag{1.1'}$$

которые мы хотим одновременно привести к некоторому каноническому виду. С этой целью введем еще два пространства $Z_i = Z_i(\Lambda)$ $(i = 1, 2)$, элементами которых являются функции $f(\lambda)$, определенные на множестве Λ, и обозначим через Z^i $(i = 1, 2)$ сопряженные им пространства линейных функционалов. Пусть семейства непрерывных линейных отображений $F_i(a_i)$, $(i = 1, 2)$, $(a_i \in A_i)$ пространства Z_i в X_i обладают следующими свойствами:

а) линейные многообразия $F_i(a_i)[Z_i] = X_i(a_i) \subset X_i$ $(i = 1, 2)$ линейно независимы, т. е. из равенства

$$\sum_{\alpha=1}^{N} x_i^{(\alpha)} = 0, \quad x_i^{(\alpha)} \in X_i(a_i^{(\alpha)})$$

и $a_i^{(\alpha)} \neq a_i^{(\alpha')}$ при $\alpha \neq \alpha'$ следует, что $x_i^{(\alpha)} = 0$ при каждом $\alpha = 1, 2, \ldots, N$;

в) линейная оболочка $X_i(A_i)$ множества $\bigcup\limits_{a_i \in A_i} x_i(a_i)$ плотна в X_i $(i = 1, 2)$.

Тогда на линейных оболочках $X_i(A_i)$ определены проектирующие на линейные многообразия $X_i(a_i)$ линейные операторы $p(a_i)$ такие, что для всех $x_i \in X_i(A_i)$

$$x_i = \sum_{a_i \in A_i} p(a_i)[x_i], \quad (p(a_i)[x_i] \in X_i(a_i)),$$

где суммирование производится каждый раз лишь по конечному множеству индексов a_i, для которых $p(a_i)[x_i] \neq 0$. Это позволяет сопоставить каждому вектору $x_i \in X_i(A_i)$ функцию $\tilde{x}_i(\lambda, a_i)$ $(\lambda \in \Lambda, a_i \in A_i)$, принадлежащую при каждом фиксированном a_i множеству $F_i^{-1}(a_i)[p(a_i)[x_i]]$ так, что

$$x_i = \sum_{a_i \in A_i} F_i(a_i)[\tilde{x}_i(\lambda, a_i)], \tag{1.2}$$

функцию $\tilde{x}_i(\lambda, a_i)$ мы будем называть F_i-преобразованием вектора $x_i \in X_i(A_i)$. Оно определено с точностью до слагаемого, которое операторы $F_i(a_i)$ переводят в нуль. От этой неоднозначности можно, конечно, освободиться, перейдя к соответствующим факторпространствам $Z_i/\mathrm{Ker}\, F_i(a_i)$, но мы этого делать не будем. Условимся только считать две функции $f(\lambda, a_i)$, $g(\lambda, a_i)$, принадлежащие при каждом $a_i \in A_i$ пространству Z_i, эквивалентными и писать $f(\lambda, a_i) \asymp g(\lambda, a_i)$, если $F_i(a_i)[f(\lambda, a_i)] = F_i(a_i)[g(\lambda, a_i)]$ при всех $a_i \in A_i$.

Переходя к F-преобразованиям и используя при этом формулу (1.2), можно представить интересующие нас билинейные формы (1.1), (1.1′) в следующем виде:

$$< x_1, I_2^1 x_2 > = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} < F_1(a_1)\tilde{x}_1(\lambda, a_1), I_2^1 F_2(a_2)\tilde{x}_2(\lambda, a_2) > =$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} < \tilde{x}_1(\lambda, a_1), \quad F_1(a_1) I_2^1 F_2(a_2)\tilde{x}_2(\lambda, a_2) >$$

$$(x_1 \in X_1(A_1), \quad x_2 \in X_2(A_2), \tag{1.3}$$

$$< x_1, I_2^1 L_2 x_2 > = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} < \tilde{x}_1(\lambda, a_1), F_1'(a_1) I_2^1 L_2 F_2(a_2)\tilde{x}_2(\lambda, a_2) >$$

$$(x_1 \in X_1(A_1), x_2 \in X_2(A_2) \cap X_2(L_2)). \tag{1.3′}$$

Здесь через $F_1'(a_1)$ обозначен оператор, сопряженный оператору $F_1(a_1)$.

Введем еще одно пространство $Z_{1,2} = Z_{1,2}(\Lambda)$, элементами которого являются функции $f(\lambda)$, заданные на том же множестве Λ, причем все произведения $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$, где $f_1(\lambda) \in Z_1$, $f_2(\lambda) \in Z_2$, принадлежат $Z_{1,2}$ и отображение пространства $Z_1 \times Z_2$ в $Z_{1,2}$, определенное формулой $(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) \to f_1(\lambda) f_2(\lambda)$, непрерывно. Элементы сопряженного к $Z_{1,2}$ пространства $Z^{1,2}$ называются обобщенными функциями, действующими над основным пространством $Z_{1,2}$.

Линейный оператор $\tilde{I}_2^1$, действующий из Z_2 в Z^1, называется оператором умножения на обобщенную функцию $R \in Z^{1,2}$, если

$$<f_1(\lambda),\ \tilde{I}_2^1 f_2(\lambda)> = <f_1(\lambda) f_2(\lambda),\ R>$$

при всех $f_1(\lambda) \in Z_1$, $f_2(\lambda) \in Z_2$.

Пусть $m(\lambda)$ — произвольная функция, заданная на множестве Λ. Обозначим через $Z_2(m(\lambda))$ множество тех элементов пространства Z_2, для которых произведение $m(\lambda) f(\lambda)$ тоже принадлежит пространству Z_2, и через $X_2(m(\lambda))$ — линейную оболочку множества $\bigcup_{a_2 \in A_2} F_2(a_2)[Z_2(m(\lambda))]$.

Определение. *Пара F_i-преобразований* ($i = 1, 2$) *приводит билинейные формы* (1.1), (1.1′) *к каноническому виду, если*

1) *существует заданная на множестве Λ функция $m(\lambda)$ такая, что множество $X_2(m(\lambda))$ содержится в области определения $X_2(\mathbf{L}_2)$ оператора $\mathbf{L}_2$ и плотно в ней;*

2) *для всех векторов $x_2 \in X_2(m(\lambda))$ выполняется равенство*

$$\widetilde{\mathbf{L}_2[x_2]} \asymp m(\lambda)\, \tilde{x}_2(\lambda,\ a_2); \tag{1.4}$$

3) *при всех $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ операторы $F_1'(a_1)\ I_2^1\ F_2(a_2)$ являются операторами умножения на обобщенные функции $R(a_1, a_2) \in Z^{1,2}$.*

Из формул (1.3), (1.3′) следует, что в этом случае при всех $x_1 \in X_1(A_1)$, $x_2 \in X_2(A_2)$

$$< x_1,\ I_2^1 x_2 > = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} < \tilde{x}_1(\lambda,\ a_1)\, \tilde{x}_2(\lambda,\ a_2),\ R(a_1,\ a_2) >$$

и при всех $x_1 \in X_1(A_1)$, $x_2 \in X_2(m(\lambda))$

$$< x_1,\ I_2^1 L_2 x_2 > = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} < m(\lambda)\, \tilde{x}_1(\lambda,\ a_2)\, \tilde{x}_2(\lambda,\ a_2),\ R(a_1,\ a_2) >.$$

Правые части этих равенств мы называем каноническим видом билинейных форм (1.1), (1.1′), а матрицу $R(a_1,\ a_2)$ — обобщенной спектральной матрицей операторов L_2 и I_2^1. Приведем несколько типичных примеров.

1. Рассмотрим произвольный линейный оператор L, отображающий аффинное m-мерное комплексное векторное пространство R_m в себя. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ различные собственные значения оператора L, через $E_a(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_a(\lambda_1)} (\lambda - \lambda_2)^{n_a(\lambda_2)} \ldots \ldots (\lambda - \lambda_r)^{n_a(\lambda_r)}$ $(1 \leqslant a \leqslant N,\ \ n_1(\lambda_s) \geqslant n_2(\lambda_s) \geqslant \ldots \geqslant n_{p_s+1}(\lambda_s) = 0)$ — непостоянные инвариантные многочлены и через $e_{a,j}(\lambda_s)$ $(1 \leqslant s \leqslant r,\ \ 1 \leqslant a \leqslant p_s,\ \ 1 \leqslant j \leqslant n_a(\lambda_s))$ — жорданов базис пространства R_m:

$$L[e_{a,j}(\lambda_s)] = \lambda_s e_{a,j}(\lambda_s) + e_{a,j-1}(\lambda_s). \tag{1.5}$$

Здесь для удобства положено $e_{a,0}(\lambda_s) = 0$.

В качестве пространства Z возьмем пространство всевозможных полиномов $P(\lambda)$ с естественной топологией: последовательность полиномов стремится к нулю, если их коэффициенты стремятся к нулю, а степени равномерно ограничены. Отображения $F(a)$ $(a=1, \ldots, N)$ пространства Z в R_m определим формулой

$$F(a)[P(\lambda)] = \sum_{r=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_a(\lambda_s)} \frac{D^{(n_a(\lambda_s)-j)} P(\lambda)}{(n_a(\lambda_s)-j)!} \Bigg|_{\lambda=\lambda_s} e_{a,j}(\lambda_s). \quad (1.6)$$

Любой вектор $x \in R_m$ единственным образом представим в виде $x = \sum x_{a,j}(\lambda_k) e_{a,j}(\lambda_k)$ и, следовательно, имеет F-преобразование $\tilde{x}(\lambda, a)$ $(a=1, 2, \ldots, N)$, которое при каждом a является полиномом от λ, удовлетворяющим таким интерполяционным условиям:

$$\frac{D^{(n_a(\lambda_s)-j)} \tilde{x}(\lambda, a)}{(n_a(\lambda_s)-j)!} \Bigg|_{\lambda=\lambda_s} = x_{a,j}(\lambda_s),$$

откуда, в частности, следует формула (1.2):

$$x = \sum_{a=1}^{N} F(a)\left[\tilde{x}(\lambda, a)\right].$$

Несложными преобразованиями, опирающимися на формулы (1.5), (1.6), доказывается справедливость тождеств

$$\sum_{a=1}^{N} F(a)\left[\lambda\tilde{x}(\lambda, a)\right] \equiv L\left[\sum_{a=1}^{N} F(a)\left[\tilde{x}(\lambda, a)\right]\right] \equiv L[x],$$

из которых следует соотношение $\widetilde{L(x)} \asymp \lambda\tilde{x}(\lambda, a)$, показывающее, что построенное F-преобразование удовлетворяет условиям *1, 2.*

Рассмотрим теперь два пространства $X_1 = R_{m_1}$, $X_2 = R_{m_2}$, линейный оператор L_2, отображающий пространство R_{m_2} в себя, и линейный оператор I_2^1, отображающий пространство R_{m_2} в $X^1 = R'_{m_1}$. Предположим, что существует такой линейный оператор L'_1, отображающий пространство $X^1 = R'_{m_1}$ в себя, что $L'_1 I_2^1 = I_2^1 L_2$. Тогда, обозначая через L_1 оператор, сопряженный оператору L'_1, получим

$$\langle x_1, I_2^1 L_2 x_2 \rangle = \langle x_1, L'_1 I_2^1 x_2 \rangle = \langle L_1 x_1, I_2^1 x_2 \rangle. \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что в наиболее интересном случае (когда $m_1 = m_2$ и оператор I_2^1 обратим) оператор L'_1 существует и равен $I_2^1 L_2 (I_2^1)^{-1}$.

Беря в приведенной выше конструкции в качестве оператора L операторы L_1, L_2, мы получим F_1 и F_2 преобразования пространств R_{m_1}, R_{m_2}, удовлетворяющие условиям *1*, *2* (с $m(\lambda)=\lambda$). Проверим, что они удовлетворяют также условию *3* (если в качестве $Z^{1,2}$ взять снова пространство полиномов Z) и, следовательно, приводят билинейные формы (1.1), (1.1′) к каноническому виду. Пусть $\lambda_{i,s}$ $(1\leqslant s\leqslant r_i)$ — различные собственные значения операторов L_i и $e_{a,j}(\lambda_{i,s})$ $(1\leqslant s\leqslant r_i,\ 1\leqslant a\leqslant p_{i,s},\ 1\leqslant j\leqslant n_{i,a}(\lambda_{i,s}))$ — соответствующие базисы Жордана ($i=1, 2$). Тогда, согласно (1.6), для любых полиномов $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$

$$<P_1(\lambda),\ F_1'(a_1)\,I_2^1F_2(a_2)\,P_2(\lambda)> = <F_1(a_1)\,P_1(\lambda),\ I_2^1F_2(a_2)\,P_2(\lambda)> = \sum c(a_1,\ a_2,\ j_1,\ j_2,\ s_1,\ s_2)\times \times <e_{a_1,\,j_1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2}(\lambda_{2,\,s_2})>, \tag{1.8}$$

где

$$c(a_1,\ a_2,\ j_1,\ j_2,\ s_1,\ s_2)= =\frac{D^{(n_{a_1}(\lambda_{1,\,s_1})-j_1)}\,P_1(\lambda)}{(n_{a_1}(\lambda_{1,\,s_1})-j_1)\,!}\Bigg|_{\lambda=\lambda_{1,\,s_1}}\frac{D^{(n_{a_2}(\lambda_{2,\,s_2})-j_2)}\,P_2(\lambda)}{(n_{a_2}(\lambda_{2,\,s_2})-j_2)\,!}\Bigg|_{\lambda=\lambda_{2,\,s_2}} \tag{1.9}$$

и суммирование проводится по $j_1=1,\ 2,\ \ldots,\ n_{a_1}(\lambda_{1,\,s_1})$, $j_2=1,\ 2,\ \ldots,\ n_{a_2}(\lambda_{2,\,s_2})$, $s_1=1,\ 2,\ \ldots,\ r_1$, $s_2=1,\ 2,\ \ldots,\ r_2$. Полагая в формуле (1.7) $x_i=e_{a_ij_i}(\lambda_{i,\,s_i})$ $(i=1,\ 2)$ и учитывая при этом равенства (1.5), получим:

$$\lambda_{2,\,s_2}<e_{a_1,\,j_1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2}(\lambda_{2,\,s_2})>+ +<e_{a_1,\,j_1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2-1}(\lambda_{2,\,s_2})>= =\lambda_{1,\,s_1}<e_{a_1,\,j_1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2}(\lambda_{2,\,s_2})>+ +<e_{a_1,\,j_1-1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2}(\lambda_{2,\,s_2})>.$$

Из этих равенств по индукции выводим, что при $\lambda_{1,\,s_1}\neq\lambda_{2,\,s_2}$

$$<e_{a_1,\,j_1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2}(\lambda_{2,\,s_2})>=0,$$

а при $\lambda_{1,\,s_1}=\lambda_{2,\,s_2}=\mu$

$$<e_{a_1,\,j_1}(\lambda_{1,\,s_1}),\ I_2^1e_{a_2,\,j_2}(\lambda_{2,\,s_2})>=q(a_1,\ a_2,\ \mu,\ j_1+j_2),$$

причем $q(a_1,\ a_2,\ \mu,\ j_1+j_2)=0$, если

$$n_{a_1}(\mu)+n_{a_2}(\mu)-(j_1+j_2)\geqslant m(a_1,\ a_2,\ \mu)=\min\{n_{a_1}(\mu),\ n_{a_2}(\mu)\}.$$

Отсюда, согласно (1.8), (1.9), следует, что

$$<P_1(\lambda),\ F_1'(a_1)\,I_2^1F_2(a_2)\,P_2(\lambda)>= =\sum_{l=1}^{r}\ \sum_{k=0}^{m(a_1,\,a_2,\,\mu_l)-1}\frac{q(a_1,\ a_2,\ \mu_l,\ n_{a_1}(\mu_l)+n_{a_2}(\mu_l)-k)}{k!}\times \times D^{(k)}\,[P_1(\lambda)\,P_2(\lambda)]_{\lambda=\mu_l}.$$

Здесь $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ — общие собственные значения операторов L_1 и L_2. Таким образом, оператор $F_1'(a_1) I_2' F_2(a_2)$ действительно является оператором умножения на обобщенную функцию

$$R(a_1, a_2) = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=0}^{m(a_1, a_2, \mu_l)-1} r(a_1, a_2; \mu_l, k)\, \delta^{(k)}(\lambda - \mu_l),$$

где

$$r(a_1, a_2; \mu_l, k) = \frac{(-1)^k q(a_1, a_2, \mu_l, n_{a_1}(\mu_l) + n_{a_2}(\mu_l) - k)}{k!}$$

— некоторые числовые коэффициенты.

2. Пусть теперь $X_1 = X_2 = L_2(0, \infty)$, оператор I_2^1 определен равенством

$$<f, I_2^1 g> = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx,$$

а

$$L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

где $q(x)$ — произвольная непрерывная комплекснозначная функция. Область определения $X_2(L_2)$ оператора L_2 состоит из всех дважды дифференцируемых финитных функций $y(x)$ $(y''(x) \in L_2(0, \infty))$, удовлетворяющих граничному условию $y(0)h - y'(0) = 0$; F_1-и F_2-преобразование определим на множестве финитных функций $f(x) \in L_2(0, \infty)$ одной и той же формулой:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx,$$

где $\omega(\lambda, x)$ — решение уравнения $L_2[\omega] = \lambda^2\omega$ при начальных данных $\omega(\lambda, 0) = 1$, $\omega'(\lambda, 0) = h$. На функциях $f(x) \in X_2(L_2)$ выполняется равенство $\widetilde{L_2[f]} = \lambda^2 \tilde{f}(\lambda)$.

Пространство $Z_1 = Z_2$ $(Z_{1,2})$ состоит из всех целых четных функций экспоненциального типа $g(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$ $(g(\lambda) \in L_1 \times \times (-\infty, \infty))$. Последовательность $g_n(\lambda)$ стремится к нулю, если существуют такие числа σ, C, что

$$\sup_n \left\{\sup_\lambda |g_n(\lambda)\, e^{-\sigma|\lambda|}|\right\} \leqslant C,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda)|^2 d\lambda = 0 \left(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda)|\, d\lambda = 0\right).$$

Как известно (1), существует такая обобщенная функция $R \in \in Z^{1,2}$, что на всех финитных функциях $f(x)$, $g(x) \in L_2(0, \infty)$ выполняется равенство

$$<f, I_2^1 g> = <\tilde{f}(\lambda)\, \tilde{g}(\lambda), R>,$$

причем

$$<f,\ I_2^1 L_2 g> = <\lambda^2 \tilde{f}(\lambda)\, g(\tilde{\lambda}),\ R>,$$

если $g(x) \in X_2(L_2)$.

3. Рассмотрим сужение R_π функции R на подпространство $Z_{1,\,2}(\pi) \subset Z_{1,\,2}$, состоящее из тех функций $f(\lambda) \in Z_{1,\,2}$, для которых

$$\sup_\lambda |f(\lambda)\, e^{-2\pi|\lambda|}| < \infty.$$

Это сужение является обобщенной спектральной функцией операторов I_2^1, L_2, рассматриваемых в пространстве $L_2(0,\ \pi)$, если в качестве области определения оператора L_2 взять все функции из $X_2(L_2)$, равные нулю в окрестности точки π. Обобщенная функция R_π допускает бесконечно много аналитических представлений. Можно, например, воспользоваться формулами разложения по собственным и присоединенным функциям краевой задачи, порождаемой на интервале $(0, \pi) = 0$, операцией L_2 и краевыми условиями $y(0)\, h - y'(0) = y(\pi)\, h_1 + y'(\pi) = 0$, где h_1 — любое комплексное число (2). Это дает такие представления обобщенной функции R_π:

$$<f(\lambda),\ R_\pi> = <f(\sqrt{\mu}),\ \hat{R}_\pi>,$$

где

$$\hat{R}_\pi = \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{s=0}^{p_n-1} r_s(\mu_n)\, \delta^{(s)}(\mu - \mu_n),$$

и μ_{n_0}, μ_{n_0+1}, ... — различные собственные значения этой краевой задачи.

2. *Несамосопряженный трехмерный оператор Шредингера.* Условимся в следующих обозначениях: R_3 — трехмерное евклидово пространство; $x = (x^1,\ x^2,\ x^3)$ — точки (векторы) пространства R_3; R_3^+ — полупространство, состоящее из точек $x = (x^1, x^2, x^3)$, у которых $x^3 \geqslant 0$; $A = A_1 = A_2$ — множество точек $a = (a^1,\ a^2,\ 0)$ плоскости $x^3 = 0$; $X_1 = X_2 = L_2(R_3^+)$ — гильбертово пространство функций $f(x)$, определенных в R_3^+ с обычным скалярным произведением $(f,\ g) = \int\limits_{R_3^+} f(x)\overline{g}(x)\, dx$; $Z_1 = Z_2 = Z$, $(Z_{1,\,2})$ — пространство целых четных функций экспоненциального типа $\tilde{f}(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\tilde{f}(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty, \ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\tilde{f}(\lambda)|\, d\lambda < \infty\right).$$

Последовательность $f_n(\lambda)$ сходится к нулю, если существуют такие числа σ, C, что

$$\sup_n \left\{\sup_\lambda |\tilde{f}_n(\lambda)|\, e^{-\sigma|\lambda|}\right\} \leqslant C$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2|\tilde{f}_n(\lambda)|^2 d\lambda=0,\ \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2|\tilde{f}_n(\lambda)|\,d\lambda=0\right);$$

$K^\infty(R_3)$ — множество всех финитных бесконечно дифференцируемых и четных по переменной x^3 функций $f(x)$; $K^\infty(R_3^+)$ — множество всех функций $f_+(x)$, являющихся сужением на полупространство R_3^+ функций $f(x)\in K^\infty(R_3)$.

Рассмотрим оператор L, порождаемый дифференциальной операцией Шредингера $L=-\Delta+q(x)$ $(x\in R_3^+)$ с непрерывным комплекснозначным потенциалом $q(x)$ и краевым условием

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x^3}\right|_{x^3=0}=0.$$

По определению функция $y(x)\in L_2(R_3^+)$ принадлежит области определения $X_2(L)$ оператора L, если она финитна, и для всех функций $f_+(x)\in K^\infty(R_3^+)$ выполняется тождество

$$\int_{R_3^+} f_+(x)g(x)\,dx=\int_{R_3^+} L[f_+](x)\,y(x)\,dx,$$

где $g(x)\in L_2(R_3^+)$. При этом мы полагаем $L[y]=g(x)$.

Оператор I_2^1, отображающий пространство X_2 в X^1, определяется формулой

$$<f_1,\ I_2^1 f_2>=\int_{R_3^+} f_1(x)\,f_2(x)\,dx.$$

Мы покажем, что существуют F-преобразования, приводящие билинейные формы $<f_1,\ I_2^1 f_2>$, $<f_1,\ I_2^1 \boldsymbol{L} f_2>$ к каноническому виду. Продолжим потенциал $q(x)$ на все пространство R_3, полагая, $q(x^1,\ x^2,\ -x^3)=q(x^1,\ x^2\ x^3)$. В дальнейшем мы будем рассматривать аналитические потенциалы

$$q(x)=\sum q_{l,k,m}(x^1)^l(x^2)^k(x^3)^{2m}.$$

Это ограничение играет существенную роль только при доказательстве леммы 3. Все остальные результаты верны для любых непрерывных потенциалов.

Конструкция линейных отображений $F(a)$ $(a\in A)$ *пространства* Z *в пространства* $X_1=X_2=L_2(R_3^+)$. Пусть $f(x)$ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, определенная во всем пространстве R_3. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-q(x)\,u\quad (x\in R_3,\ t\geqslant 0) \tag{2.1}$$

с начальными данными

$$u(x,\ 0)=0,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=f(x). \tag{2.1'}$$

При сделанных предположениях решение $u(f, x, t)$ этой задачи существует, единственно и бесконечно дифференцируемое. Из четности потенциала $q(x)$ относительно переменной x^3 и единственности решения следует, что решение $u(f, x, t)$ четно (нечетно) относительно x^3, если начальная функция $f(x)$ четна (нечетна) относительно переменной x^3.

Как известно [3, 4], решение $u(f, x, t)$ рассматриваемой задачи можно представить в таком виде:

$$u(f, x, t) = u_0(f, x, t) + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{|\xi| \leqslant t} W(x, \xi, t) f(x+\xi)\, d\xi, \tag{2.2}$$

где $W(x, \xi, t)$ — некоторая непрерывная функция, и

$$u_0(f, x, t) = \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{|\xi| = t} f(x+\xi)\, d\omega_t(\xi) \tag{2.2'}$$

($d\omega_t(\xi)$ — элемент площади сферы $|\xi| = t$). Заметим, что функция $W(a, \xi, t)$, а вместе с ней и функция $W(a, \xi - a, t)$ при $a = (a^1, a^2, 0) \in A$ четна относительно переменной ξ^3. Действительно, если начальная функция $f(x)$ нечетна относительно переменной x^3, то функции $u(f, x, t)$ и $u_0(f, x, t)$ тоже нечетны. Поэтому при $a \in A$ $u(f, a, t) = u_0(f, a, t) = 0$ и, следовательно,

$$\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{|\xi| \leqslant t} W(a, \xi, t) f(a+\xi)\, d\xi = 0$$

для всех нечетных относительно x^3 бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$, что эквивалентно четности функции $W(a, \xi, t)$ по переменной ξ^3.

Функции $\tilde{l}(\lambda) \in Z$ являются косинус преобразованиями Фурье четных абсолютно непрерывных финитных функций

$$l(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \tilde{l}(\lambda) \cos \lambda t\, d\lambda,$$

производные которых

$$l'(t) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda \tilde{l}(\lambda) \sin \lambda t\, d\lambda$$

суммируемы в квадрате и финитны.

Сопоставим каждой точке $a \in A$ линейный оператор $T(a)$, отображающий пространство Z в множество аддитивных и однородных функционалов, определенных на многообразии $K^\infty(R_3^+) \subset L_2(R_3^+)$ формулой

$$< f_+, T(a)\left[\tilde{l}\right] > = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty l'(t)\, u(f, a, t)\, dt. \tag{2.3}$$

Эти функционалы непрерывны в метрике пространства $L_2(R_3^+)$. Действительно, согласно формулам (2.2), (2.2'),

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^\infty l'(t)\, u(f, a, t)\, dt = \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^\infty l'(t) \left\{ \frac{1}{t} \iint\limits_{|\xi| = t} f(a+\xi)\, d\omega_t(\xi) + \right.$$

$$+\iiint\limits_{|\xi|\leqslant t} W(a,\ \xi,\ t)\, f(a+\xi)\, d\xi\Bigg\}\, dt=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{R_3}\left\{\frac{l'(|\xi|)}{|\xi|}+\int\limits_{|\xi|}^{\infty} W(a,\ \xi,\ t)\, l'(t)\, dt\right\} f(a+\xi)\, d\xi=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{R_3}\left\{\frac{l'(|x-a|)}{|x-a|}+\int\limits_{|x-a|}^{\infty} W(a,x-a,\ t)\, l'(t)\, dt\right\} f(x)\, dx,$$

откуда в силу четности по переменной x^3 функций $f(x)$ и $W(a, x-a,\ t)$ следует:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} l'(t)\, u(f,\ a,\ t)\, dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R_3^+}\left\{\frac{l'\,|(x-a)|}{|x-a|}+\int\limits_{|x-a|}^{\infty} W(a,\ x-a,\ t)\, l'(t)\, dt\right\} f_+(x)\, dx. \qquad (2.4)$$

Функция, стоящая в фигурных скобках, принадлежит пространству $L_2(R_3^+)$ и финитна. Поэтому функционал $T(a)\left[\tilde{l}\,\right]$, определенный первоначально только на многообразии $K^\infty(R_3^+)$ формулой (2.3), однозначно расширяется правой частью равенства (2.4) до линейного непрерывного функционала, определенного во всем пространстве $L_2(R_3^+)$.

Определим теперь семейство операторов $F(a)$ $(a\in A)$ формулой

$$F(a)\left[\tilde{l}\,\right]=\frac{l'(|x-a|)}{|x-a|}+\int\limits_{|x-a|}^{\infty} W(a,\ x-a,\ t)\, l'(t)\, dt. \qquad (2.5)$$

Из предыдущего следует, что эти операторы осуществляют линейные непрерывные отображения топологического пространства Z в пространство $L_2(R_3^+)$, причем на функциях $f_+(x)\in K^\infty(R_3^+)\subset$ $\subset L_2(R_3^+)$ выполняются тождества

$$<f_+,\ T(a)\left[\tilde{l}\,\right]>=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} l'(t)\, u(f,\ a,\ t)\, dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}<f_+,\ I_2^1 F(a)\left[\tilde{l}\,\right]>. \qquad (2.6)$$

Свойства операторов $F(a)$. Обозначим, как обычно, образ пространства Z при отображении $F(a)$ через $X(a)$ и линейную оболочку множества $\bigcup\limits_{a\in A} X(a)$ — через $X(A)$.

Лемма 1. *Многообразия* $X(a)$ *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{N} F(a_i)\,[\tilde{l}_i]=0. \qquad (2.7)$$

Тогда на всех функциях $f_+(x) \in K^\infty(R_3^+)$ выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{N} <f_+,\ I_2^1 F(a_i)[\tilde{l}_i]> =$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty l_i'(t)\, u\,(f,\ a_i,\ t)\, dt = 0.$$

Так как функции $l_i'(t)$ финитны, то существует такое число t_0, что $l_i'(t) = 0$ при $t \geqslant t_0$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^{t_0} l_i'(t)\, u\,(f,\ a_i,\ t)\, dt = 0.$$

Как известно, в интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$ функция $u(f,\ a_i,\ t)$ однозначно определяется значениями начальной функции $f(x)$ в шаре $|x - a_i| \leqslant t_0$. Следовательно, если две бесконечно дифференцируемые функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ принимают одинаковые значения при $|x| \leqslant a + t_0$, где $a = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |a_i|$, то

$$u(g_1,\ a_i,\ t) = u(g_2,\ a_i,\ t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

Возьмем теперь произвольную четную по переменной x^3 и бесконечно дифференцируемую в шаре $|x| < a + t_0 + 1$ функцию $g(x)$. Очевидно, существует финитная, четная по x^3 и бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, совпадающая с $g(x)$ при $|x| \leqslant a + t_0$. Отсюда, согласно предыдущему, следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty l_i'(t)\, u\,(g,\ a_i,\ t)\, dt = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{t_0} l_i'(t)\, u\,(g,\ a_i,\ t)\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{t_0} l_i'(t)\, u\,(f,\ a_i,\ t)\, dt = 0, \tag{2.8}$$

какова бы ни была четная по x^3 и бесконечно дифференцируемая в шаре $|x| < a + t_0 + 1$ функция $g(x)$.

Рассмотрим в шаре $C(a,\ t_0) = \{x : |x| < a + t_0 + 1\}$ задачу Дирихле:

$$-\Delta g + q\,(x)\, g = \lambda^2 g, \tag{2.9}$$

$$g\,(x)\,|_{x \in \partial C(a,\ t_0)} = \varphi\,(x), \tag{2.9'}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная достаточно гладкая и четная по переменной x^3 функция, заданная на сфере $\partial C(a,\ t_0)$.
Если комплексное число λ^2 не принадлежит спектру этой задачи, то ее решение $g(x) = g(\varphi,\ x)$ существует, единственно и представимо в виде

$$g\,(\varphi,\ x) = \iint\limits_{\partial C(a,\ t_0)} \frac{\partial G\,(\lambda,\ x,\ y)}{\partial\,|y|}\, \varphi\,(y)\, d\omega\,(y),$$

где $G(\lambda, x, y)$ — соответствующая функция Грина, а $d\omega(y)$ — элемент площади сферы $\partial C(a, t_0)$. Внутри шара $C(a, t_0)$ функция $g(\varphi, x)$ бесконечно дифференцируема и четна по переменной x^3, откуда, согласно (2.8), следует

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty l_i'(t)\, u(g, a_i, t)\, dt = 0.$$

Поскольку функция $g(\varphi, x)$ в шаре $C(a, t_0)$ удовлетворяет уравнению (2.9), то в области $0 \leqslant t \leqslant a + t_0 + 1 - |x|$

$$u(g, x, t) = \frac{\sin \lambda t}{\lambda} g(\varphi, x)$$

и

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty l_i'(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} g(\varphi, a_i)\, dt = -\sum_{i=1}^{N} \tilde{l}_i(\lambda) g(\varphi, a_i) =$$

$$= -\iint_{\partial C(a, t_0)} \sum_{i=1}^{N} \tilde{l}_i(\lambda) \frac{\partial G(\lambda, a_i, y)}{\partial |y|} \varphi(y)\, dy = 0, \qquad (2.10)$$

какова бы ни была достаточно гладкая четная по переменной x^3 функция $\varphi(y)$, заданная на сфере $\partial C(a, t_0)$. Из свойств функции Грина $G(\lambda, x, y)$ следует, что функция

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{l}_i(\lambda) G(\lambda, a_i, y) \qquad (2.11)$$

при $y \in C(a, t_0)$, $y \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ удовлетворяет уравнению (2.9) и обращается в нуль на сфере $\partial C(a, t_0)$. Из равенства (2.10) в силу произвольности функции $\varphi(y)$ следует, что нормальная производная этой функции на сфере $\partial C(a, t_0)$ тоже равна нулю. Отсюда, используя теорему единственности для решений эллиптических уравнений, заключаем, что функция (2.11) тождественно равна нулю в области $y \in C(a, t_0)$, $y \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Поэтому устремляя точку y последовательно к точкам a_i, находим, что $\tilde{l}_i(\lambda) = 0$, если λ^2 не принадлежит спектру задачи (2.9), (2.9′). Так как спектр этой задачи дискретен, а функции $l_i(\lambda)$ — целые, то $\tilde{l}_i(\lambda) \equiv 0$ и тем более $F(a_i)\left[\tilde{l}_i\right] = 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что на самом деле мы доказали, что из равенства (2.7) вытекают не только равенства $F(a_i)\left[\tilde{l}_i\right] = 0$ (т. е. линейная независимость многообразий $X(a)$), но и равенства $\tilde{l}_i(\lambda) \equiv 0$, показывающие, что операторы $F(a)$ отображают пространство Z взаимнооднозначно на многообразия $X(a)$.

Из доказанной леммы следует, что на линейной оболочке $X(A)$ определены операторы проектирования $p(a)$ на многообразия $X(a)$ и любая функция $f(x) \in X(A)$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{a \in A} p(a)[f], \quad (p(a)[f] \in X(a)),$$

где суммирование производится каждый раз лишь по конечному множеству значений параметра a.

В соответствии с общей схемой мы определяем F-преобразования функций $f(x) \in X(a)$ формулой

$$\tilde{f}(\lambda, a) = F^{-1}(a)\, p(a)\,[f].$$

Обозначим через $Z(\lambda^2)$ линейное многообразие пространства Z, состоящее из тех функций $\tilde{l}(\lambda) \in Z$, для которых $\lambda^2\tilde{l}(\lambda) \in Z$, и через $X_2(\lambda^2)$ линейную оболочку множества $\bigcup\limits_{a \in A} F(a)\,[Z(\lambda^2)]$.

Лемма 2. *Множество $X_2(\lambda^2)$ содержится в области определения $X_2(L)$ оператора L и для любой функции $f(x) \in X_2(\lambda^2)$ справедливо равенство*

$$\widetilde{L}\,\widetilde{[f]} = \lambda^2\tilde{f}(\lambda, a).$$

Доказательство. Если $\tilde{f}(\lambda, a)$ — F-преобразование функции $f(x) \in X_2(\lambda^2)$, то при любом $a \in A$ функция $\lambda^2\tilde{f}(\lambda, a) \in Z$ и, следовательно,

$$\sum_{a \in A} F(a)\left[\lambda^2\tilde{f}(\lambda, a)\right] = g(x) \in X_2(A) \subset X_2(A) \subset L_2(R_3^+)$$

Полагая

$$l(t, a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda, a)\cos\lambda t\, d\lambda,$$

получим

$$l''(t, a) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \lambda^2\tilde{f}(\lambda, a)\cos\lambda t\, d\lambda$$

и, согласно равенству (2.6),

$$\frac{1}{4\pi} < \varphi_+,\ I_2^1 g > = -\frac{1}{2}\sum_{a \in A}\int_0^\infty l'''(t, a)\, u(\varphi, a, t)\, dt$$

для всех функций $\varphi_+(x) \in K^\infty(R_3^+)$. Поскольку функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема, то функция $v(x, t) = u''_{tt}(\varphi, x, t)$ является решением уравнения (2.1) при начальных данных $v(x, 0) = 0$, $v_t(x, 0) = -L[\varphi]$ и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 u(\varphi, x, t)}{\partial t^2} = -u(L\varphi, x, t).$$

Поэтому

$$-\int_0^\infty l'''(t, a)\, u(\varphi, a, t)\, dt = -\int_0^\infty l'(t, a)\, u''_{tt}(\varphi, a, t)\, dt =$$

$$=\int_0^\infty l'(t,\ a)\,u(L\varphi,\ a,\ t)\,dt$$

и

$$\frac{1}{4\pi}<\varphi_+,\ I_2^1 g>=\frac{1}{4\pi}<L\varphi_+,\ I_2^1 f>,$$

т. е. для всех функций $\varphi_+(x)\in K^\infty(R_3^+)$

$$\int_{R_3^+}\varphi_+(x)\,g(x)\,dx=\int_{R_3^+}L[\varphi_+](x)\,f(x)\,dx,$$

откуда следует, что функция $f(x)$ принадлежит области определения оператора и $L[f]=g(x)$.

Лемма 3. *Множество $X_2(\lambda^2)$ и тем более множество $X_2(A)$ плотно в пространстве $L_2(R_3^+)$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой функции $g(x)\in L_2(R_3^+)$ равенство

$$\int_{R_3^+}f(x)\,g(x)\,dx=0 \tag{2.12}$$

выполняется для всех функций $f(x)\in X_2(\lambda^2)$. Продолжим функцию $g(x)$ на все пространство R_3 формулой $g(x^1,\ x^2,\ -x^3)=g(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и положим

$$u(g,\ x,\ t)=\frac{1}{4\pi t}\iint_{|\xi|=t}g(x+\xi)\,d\omega_t(\xi)+\frac{1}{4\pi}\iiint_{|\xi|\leqslant t}W(x,\ \xi,\ t)\times$$

$$\times\, g(x+\xi)\,d\xi,\ (t\geqslant 0)\quad u(g,\ x,\ t)=-u(g,\ x,\ -t).\quad (t<0)$$

Легко проверить, что функция $u(g,x,t)$ интегрируема с квадратом в любой ограниченной области D переменных $x,\ t$ и если последовательность $g_n(x)\in K^\infty(R_3)$ сходится в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции $g(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\iiiint_{(D)}|u(g,\ x,\ t)-u(g_n,\ x,\ t)|^2\,dx\,dt=0. \tag{2.13}$$

Введем функцию

$$v(g,\ x,\ t)=\begin{cases}u(g,\ x,\ t) & (x^3\geqslant 0)\\ 0 & (x^3<0)\end{cases} \tag{2.14}$$

и покажем, что она является обобщенным решением уравнения (2.1), если выполняются равенства (2.12).

Так как функция $v(g,\ x,\ t)$ нечетна по t, то для этого достаточно убедиться в справедливости равенства

$$A(\varphi,\ v)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\iiint_{R_3^+}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+L[\varphi]\right\}v(g,\ x,\ t)\,dx=0$$

для всех финитных бесконечно дифференцируемых и нечетных по t функций $\varphi(x, t)$. В силу равенств (2.13), (2.14)

$$A(\varphi, v) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_{R_3^+} \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + L[\varphi]\right\} u(g_n, x, t)\, dx,$$

откуда, используя формулу Грина, получим

$$A(\varphi, v) = \lim_{n \to \infty} \iint_A da \int_{-\infty}^{\infty} l'(t, a)\, u(g_n, a, t)\, dt,$$

где

$$l(t, a) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial\varphi(x, \tau)}{\partial x^3}\, d\tau \Bigg|_{x=a=(a^1, a^2, 0)}.$$

При этом нужно учесть, что функция $\varphi(x, t)$ финитна, а функция $u(g_n, x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и граничному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial x^3}\right|_{x^3=0} = 0$. Поскольку функция $l(t, a)$ по переменной t финитна, четна и бесконечно дифференцируема, то

$$l(t, a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{l}(\lambda, a) \cos \lambda t\, d\lambda,$$

и функции $\lambda^{2m}\tilde{l}(\lambda, a)$ принадлежат пространству Z при любом $m = 0, 1, \ldots$. Следовательно, функции $f(x, a) = F(a)\left[\tilde{l}(\lambda, a)\right]$ принадлежат многообразию $X_2(\lambda^2)$ и, согласно (2.6),

$$\int_{-\infty}^{\infty} l'(t, a)\, u(g_n, a, t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{R_3^+} g_n(x) f(x, a)\, dx,$$

откуда при $n \to \infty$ получим, учитывая равенства (2.12), (2.13),

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} l'(t, a)\, u(g_n, a, t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{R_3^+} g(x) f(x, a)\, dx = 0$$

равномерно по a. Таким образом, $A(\varphi, v) = 0$, и функция $v(g, x, t)$ является обобщенным решением уравнения (2.1). Так как $v(g, x, t) \equiv 0$ при $x^3 < 0$, то в силу теоремы единственности Хольмгрена [5] функция $v(g, x, t)$, а вместе с ней и функция $u(g, x, t)$ почти всюду равны нулю. Поэтому для любой гладкой финитной функции $\delta(x)$ и любого положительного τ

$$\frac{1}{\tau^3} \int_0^{\tau} dt \iint_{R_3} u(g, x, t)\, \delta(x)\, dx = 0,$$

откуда, устремляя τ к нулю и пользуясь при этом равенством (2.2), выводим, что

$$\int_{R_3} g(x)\,\delta(x)\,dx = 0$$

для всех гладких финитных функций $\delta(x)$. Следовательно, функция $g(x)$ почти всюду равна нулю, а множество $X_2(\lambda^2)$ плотно в пространстве $L_2(R_3^+)$.

Вид операторов $F'(a_1)\,I_2^1 F(a_2)$. Расширим оператор I_2^1 на все пространство $L_2(R_3)$, полагая

$$<f,\ I_2^1 g> = \int_{R_3} f(x)\,g(x)\,dx,$$

и продолжим функции $u(f,\ x,\ t)$, определенные формулой (2.2), нечетно на отрицательные значения t. Продолженные так функции $u(f,\ x,\ t)$ удовлетворяют уравнению (2.1) при всех t, если начальная функция $f(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ — произвольные финитные бесконечно дифференцируемые функции и

$$s(t,\ \tau) = <u(f_1,\ x,\ t),\ I_2^1 u(f_2,\ x,\ \tau)>.$$

Тогда

$$s''_{tt} = <u''_{tt}(f_1,\ x,\ t),\ I_2^1 u(f_2,\ x,\ \tau)> = -<L[u(f_1,\ x,\ t)],$$
$$I_2^1 u(f_2,\ x,\ \tau)>,\ s''_{\tau\tau} = <u(f_1,\ x,\ t),\ I_2^1 u''_{\tau\tau}(f_2,\ x,\ \tau)> =$$
$$= -<u(f_1,\ x,\ t),\ I_2^1 L[u(f_2,\ x,\ \tau)]>,$$

где $L = -\Delta + q(x)$. Из формулы Грина следует, что для любых финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ справедливо равенство

$$<\varphi_1,\ I_2^1 L[\varphi_2]> = <L\varphi_1,\ I_2^1\varphi_2>.$$

Поэтому функция $s(t,\ \tau)$ удовлетворяет уравнению $s''_{tt} = s''_{\tau\tau}$ и граничным условиям

$$s(0,\ \tau) = s(t,\ 0) = 0,\ s'_t(0,\ \tau) = <u'_t(f_1, x, t),\ I_2^1 u(f_2, x, \tau)>|_{t=0} =$$
$$= <f_1,\ I_2^1 u(f_2, x, \tau)>,\ s'_\tau(t, 0) = <u(f_1, x, t),\ I_2^1 u'_\tau(f_2, x, \tau)>|_{\tau=0} =$$
$$= <u(f_1,\ x,\ t),\ I_2^1 f_2>,$$

откуда, согласно формуле Даламбера, следует, что

$$s(t,\ \tau) = \frac{1}{2}\int_{\tau-t}^{\tau+t} <f_1,\ I_2^1 u(f_2,\ x,\ \xi)>\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t+\tau} <u(f_1,\ x,\ \xi),\ I_2^1 f_2>\,d\xi.$$

Полагая в этом равенстве $t=\tau$, получим

$$\int\limits_0^{2t} <f_1,\ I_2^1 u(f_2,\ x,\ \xi)> d\xi = \int\limits_0^{2} <u(f_1,\ x,\ \xi),\ I_2^1 f_2> d\xi$$

и

$$<f_1,\ I_2^1 u(f_2,\ x,\ t)> = <u(f_1,\ x,\ t),\ I_2^1 f_2>.$$

Из последнего равенства и формулы (2.2) следует, что

$$\int\limits_{R_3}\int\limits_{R_3} W(x,\ y-x,\ t) f_1(x) f_2(y)\, dxdy = \int\limits_{R_3}\int\limits_{R_3} W(y,\ x-y,\ t) \times$$
$$\times f_1(x) f_2(y)\, dxdy$$

(мы полагаем при этом $\omega(x,\ \xi,\ t)=0$, если $|\xi|>t$), а так как здесь функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ произвольны, то

$$\omega(x,\ y-x,\ t) = \omega(y,\ x-y,\ t). \tag{2.15}$$

Это равенство позволяет представить операторы $F(a)$ в другом виде. Для этого умножим обе части формулы (2.2) на $l'(t)$ и проинтегрируем по t. После несложных преобразований получим

$$\int\limits_0^\infty u(f,\ x,\ t)\, l'(t)\, dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R_3}\left\{\frac{l'(|x-y|)}{|x-y|} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{|x-y|}^\infty W(x,\ y-x,\ t)\, l'(t)\, dt\right\} f(y)\, dy,$$

откуда, согласно (2.15), следует

$$\int\limits_0^\infty u(f,\ x,\ t)\, l'(t)\, dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R_3}\left\{\frac{l'(|x-y|)}{|x-y|} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{|x-y|}^\infty W(y,\ x-y,\ t)\, l'(t)\, dt\right\} f(y)\, dy.$$

Поэтому если последовательность функций $f_n(x)\in K^\infty(R_3)$ при $n\to\infty$ сходится к $\delta_3(x-a)$ ($\delta_3(x)$ — трехмерная функция Дирака), то

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{l'(|x-y|)}{|x-y|} + \int\limits_{|a-x|}^\infty W(a,\ x-a,\ t)\, l'(t)\, dt\right\} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty u(f_n,\ x,\ t) \times$$
$$\times\, l'(t)\, dt$$

и

$$F(a)\,[\tilde{l}] = 4\pi \lim \int\limits_0^\infty u(f,\ x,\ t)\, l'(t)\, dt = 2\pi \lim \int\limits_{-\infty}^\infty u(f,\ x,\ t)\, l'(t)\, dt, \tag{2.16}$$

где функции $u(f, x, t)$, $l'(t)$ считаются нечетно продолженными на отрицательные значения t и предел берется по последовательности функций $f(x) \in K^\infty(R_3)$, сходящейся к $\delta_3(x-a)$. Условимся для краткости писать $f \to \delta_a$, если последовательность равномерно финитных функций $f(x)$ из $K^\infty(R_3)$ сходится к $\delta_3(x-a)$. Используя эти обозначения и формулу (2.16), получим

$$<F(a_1)[\tilde{l}(\lambda, a_1)], \ I_2^1 F(a_2)[\tilde{l}(\lambda, a_2)]> = 2\pi^2 \lim_{f_2 \to \delta_{a_2}} \times$$

$$\times \left\{ \lim_{f_1 \to \delta_{a_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l'(t, a_1)\, l'(\tau, a_2) <u(f_1, x, t), \ I_2^1 u(f_2, x, \tau)> dt \times \right.$$

$$\times d\tau = 2\pi^2 \lim_{f_2 \to \delta_{a_2}} \left\{ \lim_{f_1 \to \delta_{a_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l'(t, a_1)\, l'(\tau, a_2)\, s(t, \tau)\, dt d\tau. \right.$$

Так как

$$s(t, \tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau - t}^{\tau + t} r(\xi)\, d\xi, \quad r(\xi) = <f_1, \ I_2^1 u(f_2, x, \xi)>,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l'(t, a_1)\, l'(\tau, a_2)\, s(t, \tau)\, dt d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l(t, a_1)\, l'(\tau, a_2) \{ r(\tau + t) + r(\tau - t) \}\, dt d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [l(\xi - \tau, a_1) + l(\tau - \xi, a_1)]\, l'(\tau, a_2)\, d\tau \right\} r(\xi)\, d\xi =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} l(\xi - \tau, a_1)\, l'(\tau, a_2)\, d\tau \right\} r(\xi)\, d\xi,$$

поскольку $l(t, a_1) = l(-t, a_1)$. По теореме о свертке

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(\xi - \tau, a_1)\, l'(\tau, a_2)\, d\tau = -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \tilde{l}(\lambda, a_1)\, \tilde{l}(\lambda, a_2)\, \lambda \sin \lambda \xi\, d\xi$$

и

$$<F(a_1)[\tilde{l}(\lambda, a_1)], \ I_2^1 F(a_2)[\tilde{l}(\lambda, a_2)]> =$$

$$= 16\pi \lim_{N \to \infty} \left\{ \lim_{f_2 \to \delta_{a_2}} \lim_{f_1 \to \delta_{a_1}} \int_0^\infty \tilde{l}(\lambda, a_1)\, \tilde{l}(\lambda, a_2) \left[\lambda \int_0^N \sin \lambda \xi\, r(\xi)\, d\xi \right] d\lambda = \right.$$

$$= \lim_{N \to \infty} \lim_{f_2 \to \delta_{a_2}} \lim_{f_1 \to \delta_{a_1}} <\tilde{l}(\lambda, a_1)\, \tilde{l}(\lambda, a_2), \ R^N(f_1, f_2)>,$$

где

$$R^N(f_1, f_2) = 16\pi\lambda \int_0^N \sin \lambda \xi\, r(\xi)\, d\xi = 16\pi\lambda \int_0^N \sin \lambda \xi <f_1, \ I_2^1 u(f_2, x, \xi)> d\xi$$

регулярная обобщенная функция, принадлежащая пространству $Z^{1,2}$. Имеем далее

$$<f_1, I_2^1 u(f_2, x, t)> = \frac{1}{4\pi}\int_{R_3} f_1(x)\left\{\frac{1}{t}\int_{|\xi|=t} f_2(x+\xi)\,d\omega_t(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_{|\xi|\leqslant t} W(x, \xi, t) f_2(x+\xi)\,d\xi\right\} dx,$$

откуда при $f_1 \to \delta_{a_1}$ следует

$$<f_1, I_2^1 u(f_2, x, t)> \to \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{t}\int_{|\xi|=t} f_2(a_1+\xi)\,d\omega_t(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_{|\xi|\leqslant t} W(a_1, \xi, t) f_2(a_1+\xi)\,d\xi\right\},$$

т. е. в топологии пространства $Z^{1,2}$

$$\lim_{f_1\to\delta_{a_1}} R^N(f_1, f_2) = R^N(a_1, f_2) = 4\lambda\int_0^N \sin\lambda t\left\{\frac{1}{t}\int_{|\xi|=t} f_2(a_1+\xi)\,d\omega_t(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_{|\xi|\leqslant t} W(a_1, \xi, t) f_2(a_1+\xi)\,d\xi\right\} dt =$$

$$= 4\lambda\left\{\int_{|\xi|\leqslant N} \frac{\sin\lambda|\xi|}{|\xi|} f_2(a_1+\xi)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{|\xi|\leqslant N}\left[\int_{|\xi|}^N W(a_1, \xi, t)\sin\lambda t\,dt\right] f_2(a_1+\xi)\,d\xi\right\},$$

$$\lim_{f_2\to\delta_{a_2}} R^N(a_1, f_2) = R^N(a_1, a_2) = 4\lambda\left\{\frac{\sin\lambda|a_1-a_2|}{|a_1-a_2|} + \right.$$

$$\left. + \int_{|a_1-a_2|}^N W(a_1, a_2-a_1, t)\sin\lambda t\,dt\right\}.$$

Поэтому в топологии пространства $Z^{1,2}$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{f_2\to\delta_{a_2}}\lim_{f_1\to\delta_{a_1}} R^N(f_1, f_2) = R(a_1, a_2) =$$

$$= 4\lambda\left\{\frac{\sin\lambda|a_1-a_2|}{|a_1-a_2|} + S[W(a_1, a_2-a_1, t)]\right\},$$

где через $S[\varphi(t)]$ обозначено синус-преобразование Фурье суммируемой на каждом конечном интервале функции $\varphi(t)$, понимаемое как обобщенная функция пространства $Z^{1,2}$. Таким образом,

$$<F(a_1)[\tilde{l}(\lambda, a_1)], I_2^1 F(a_2)[\tilde{l}(\lambda, a_2)]> = <\tilde{l}(\lambda, a_1),$$

$$F'(a_1) I_2^1 F(a_2)[\tilde{l}(\lambda, a_2)]> = <\tilde{l}(\lambda, a_1)\,\tilde{l}(\lambda, a_2), R(a_1, a_2)>,$$

где обобщенная функция

$$R(a_1, a_2) = 4\lambda \left\{ \frac{\sin \lambda \mid a_1 - a_2}{\mid a_1 - a_2 \mid} + S[W(a_1, a_2 - a_1, t)] \right\} \qquad (2.17)$$

принадлежит пространству $Z^{1,2}$.

Следовательно, оператор $F'(a_1) I_2^1 F(a_2)$, действующий из Z в Z', является оператором умножения на обобщенную функцию (2.17). Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\boldsymbol{L}$ — оператор, порождаемый на плотном в пространстве $\boldsymbol{L}_2(R_3^+)$ линейном многообразии $X_2(\boldsymbol{L})$ операцией Шредингера $\boldsymbol{L} = -\Delta + q(x)$, с комплексным аналитическим потенциалом и краевым условием $\left.\frac{\partial y}{\partial x^3}\right|_{x^3=0} = 0$. Каждому такому оператору соответствует обобщенная спектральная матрица $R(a_1, a_2)$ $(a_1, a_2 \in A)$, элементы которой принадлежат пространству $Z^{1,2}$, такая, что на плотном в пространстве $\boldsymbol{L}_2(R_3^+)$ линейном многообразии $X_2(A)$ выполняется обобщенное равенство Парсеваля*

$$\int_{R_3^+} f_1(x) f_2(x)\, dx = \sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} < \widetilde{f_1}(\lambda, a_1) \widetilde{f_2}(\lambda, a_2),\ R(a_1, a_2) >,$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — произвольные функции из многообразия $X_2(A)$, а $\widetilde{f_1}(\lambda, a_1)$, $\widetilde{f_2}(\lambda, a_2)$ — их F-преобразования. При этом, если функция $f(x)$ принадлежит многообразию $X_2(\lambda^2)$, плотному в области определения оператора $\boldsymbol{L}$, то $\widetilde{\boldsymbol{L}}(\widetilde{f}) = \lambda^2 \widetilde{f}(\lambda, a)$.

Обобщенная матрица $R(a_1, a_2)$ связана с функцией $W(x, \xi, t)$ формулой

$$R(a_1, a_2) = 4\lambda \left\{ \frac{\sin \lambda \mid a_1 - a_2 \mid}{\mid a_1 - a_2 \mid} + S[W(a_1, a_2 - a_1, t)] \right\}$$

и симметрична $R(a_1, a_2) = R(a_2, a_1)$ в силу (2.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. — «Мат. сб.», 1960, т. 52 (94), с. 739—788.
2. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Луивилля. Киев, «Наукова думка», 1972, с. 31—41.
3. Повзнер А. Я. О разложении произвольных функций по собственным функциям. — «Мат. сб.», 1953, т. 32 (74), с. 109—156.
4. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям. — «Тр. моск. мат. об-ва», 1955, т. 4, с. 237—290.
5. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., «Мир», 1965, с. 171—172.

Поступила 12 февраля 1974 г.