УДК 517.54

М. Т. БРОДОВИЧ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ УГЛЫ. II

Предложение 1. *Множество* $H \cap \operatorname{Fr} \overset{*}{g}_z$ *всюду плотно на множестве* $\operatorname{Fr} \overset{*}{g}_z$.

Предложение 1 доказывается аналогично утверждению 3[1].

Из утверждения 4, (16), условия $\overline{\overset{*}{g}}_z \cap \widehat{\lambda}_{n_p} = 0$, аналогично утверждению 4, следует

Предложение 2. *Имеет место включение* $\varphi(Fr\overset{*}{g}_z \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l^j)\bar{z}] \cap H) \subset \subset \bar{S} - S$

Предложение 3. *Область* $\overset{*}{g}_z$ *не имеет внутренней границы, т. е. каждая точка* $z \in \operatorname{Fr} \overset{*}{g}_z$ — *граничная для множества* $(C\overset{*}{g}_z)^0$.

Действительно, пусть точка $z \in \operatorname{Fr} \overset{*}{g}_z \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$ и пусть, согласно предложению 1, $\{z_n\}$, $\{z_n\} \subset H \cap \operatorname{Fr} \overset{*}{g}_z \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$ — последовательность точек, сходящаяся к точке $\bar{z}$. Тогда, в силу предложения 2, точки $z_n (n = 1, 2, \ldots)$ — граничные точки множества $(C\overset{*}{g}_z)^0$. Следовательно, таковой будет и точка z. Предложение 3 доказано.

Из предложений 1, 2, рассуждая аналогично доказательству утверждения 5, получаем

Предложение 4. *Область* $\overset{*}{g}_z$ *односвязна.*

Предложение 5. *Все точки границы области* $\overset{*}{g}_z$ *достижимы из области* $\overset{*}{g}_z$.

Действительно, доказательство от противного приведет к системе дуг $\{\lambda_n\}$ в области $\overset{*}{g}_z$, полученной как одноименная система дуг $\{\lambda_n\}$ (см. начало доказательства утверждения 7), точке $z \in \operatorname{Ls} \lambda_n$ и лучам $\tilde{t}_i(z)$, $\tilde{t}_j(z)$, пересекаемым всеми дугами λ_n по совокупностям точек $\lambda_n \cap \tilde{t}_i(z)$, $\lambda_n \cap \tilde{t}_j(z)$, соответственно сходящимся к точке z при $n \to \infty$. Поэтому, как в (14), имеем $d(\operatorname{Ls} \varphi(\lambda_n)) >$

---

[1] См. Бродович М. Т. «Об отображениях, сохраняющих углы. I» — В кн. : Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 25. Харьков, 1976, с. 31—48.

$> m$. В качестве круга S полагаем принять круг диаметра меньше m. Полученное противоречие доказывает предложение 5.

В силу предложения 2 и определения области $\overset{*}{g_z}$, имеем

Предложение 6. *Если точка* $z \in \mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z} \cap H$, *то в окрестности точки* z *множество* $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$ — *простая жорданова дуга.*

Предложение 7. *Множество* $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z} \cap \beta$ *не более, чем счетно.*

Доказательство. В силу предложения 5, имеем

$$\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z} = M \cup N, \tag{19}$$

где точка $z \in M$, если точка z — носитель одной достижимой точки $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$, точка $z \in N$ в противном случае.

В силу предложения 6, $N \in \beta$. Пусть $C = \mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z} - \left\{ \bigcup_p \mathrm{Fr}\, d_p \right\}$, где $\forall p = 1, 2, \ldots$, область d_p — компонента открытого множества $(C\overset{*}{g_z})^0$. Так как в силу определения множества C, $C \subset [l_l(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$, согласно предложению 2 имеем $C \subset \beta$.

В силу (19) имеем

$$\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z} \cap \beta = \bigcup_p [N \cap \mathrm{Fr}\, d_p] \cup C \cup \{M \cap \beta\}. \tag{20}$$

A) Для любого $p = 1, 2, \ldots$ множество $N \cap \mathrm{Fr}\, d_p$ не более чем счетно.

Доказательство. A). Пусть $z \in N \cap \mathrm{Fr}\, d_p$. Существуют две простые жордановые дуги, пусть $\gamma_1(\bar{z})$, $\gamma_2(z)$, определяющие две различные достижимые точки $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$, ведущие в точку z. Можно считать, что эти дуги $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ исходят из одной точки $z_0 \in \overset{*}{g_z}$ и $[\gamma_1(z) \cup \gamma_2(z)] - z \subset \overset{*}{g_z}$, $\gamma_1(z) \cap \gamma_2(z) = \{z, z_0\}$. Пусть $\gamma(z) = \gamma_1(z) \cup \gamma_2(z)$, область $D(z)$ — компонента открытого множества $\overset{*}{g_z} - \gamma(z)$, для которой $\overline{D(z)} \cap \mathrm{Fr}\, d_p = \{z\}$; $\tilde{D}(z)$ — компонента дополнения к дуге $\gamma(z)$, для которой $D(z) \subset \tilde{D}(z)$. Так как дуги $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ определяют разные достижимые точки $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$, то области $D(z)$ и $\tilde{D}(z)$ не совпадают. В силу предложений 3, 4, множество $\tilde{D}(z) - D(z) = K(z)$ — континуум, содержащий внутренние точки.

Итак, каждой точке $z \in N \cap \mathrm{Fr}\, d_p$ можно поставить в соответствие континуум $K(z)$, причем для $z_1, z_2 \in N \cap \mathrm{Fr}\, d_p$, $z_1 \neq z_2$ имеем $K(z_1) \cap K(z_2) = 0$. Следовательно, A доказано.

B). Множество C не более чем счетно.

Доказательство. Пусть точка $z \in C$ и пусть $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$, луч $\tilde{t}_i(z)$ определен как обычно.

Предположим, что точка $z \in C$ такова, что существуют два соседние луча $\tilde{t}_i(z)$, $\tilde{t}_j(z)$, на которых имеются последовательности точек $\{z_n^i\}$, $\{z_n^j\}$, соответственно, $\{z_n^i\} \cup \{z_n^j\} \subset \overset{*}{g_z}$, сходящиеся к точке z, и пусть $\forall n$ дуга l_n соединяет точки z_n^i, z_n^j, $l_n \subset g_z$, и последовательности дуг $\{l_n\}$ стягиваются к точке z. В этом случае предположение $z \in \beta$ приводит к противоречию, аналогичному противоречию доказательства предложения 5. Действительно, $d(\mathrm{Ls}\,\varphi(l_n)) > m$ и $d\varphi(\overset{*}{g}_z) < m$. Следовательно, точка $z \subset H$ и $z \in C$.

Пусть теперь точка $z \in C$ такова, что никакие два соседние луча системы $\tilde{t}_i(z)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ не соединяются в области $\overset{*}{g}_z$ системой дуг $\{l_n\}$, стягивающихся к точке z; множество точек $z \in C$ с указанным свойством обозначим через $\tilde{C}$. Пусть точка $z \in \tilde{C}$. Тогда, если на двух соседних лучах $\tilde{t}_i(z)$, $\tilde{t}_j(z)$ имеются последовательности точек $\{z_n^i\}$, $\{z_n^j\} \subset \overset{*}{g}_z$, сходящиеся к точке z (можем считать, что каждая из последовательностей $\{z_n^i\}$, $\{z_n^j\}$ сходится к достижимой точке границы $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g}_z$), последовательности $\{z_n^i\}$, $\{z_n^j\}$ сходятся к различным достижимым точкам $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g}_z$; и пусть дуги γ_1, γ_2, $\gamma_1 \cup \gamma_2 - z \in \overset{*}{g}_z$, $\gamma_1 \supset \{z_n^i\}$, $\gamma_2 \supset \{z_n^j\}$ ведут в эти различные достижимые точки $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g}_z$. В силу своего определения, дуги γ_1, γ_2 разделены некоторым континуумом множества $C\overset{*}{g}_z$ (говорят, что дуги γ_1, γ_2 разделены континуумом в области $\overset{*}{g}_z$, если в достаточно малой окрестности точки z их нельзя соединить дугой в области $\overset{*}{g}_z$).

Если же на лучах $\tilde{t}_i(z)$, $\tilde{t}_j(z)$ имеются отрезки с концом в точке z, содержащиеся в множестве $C\overset{*}{g}_z$, то тогда в угле $\left[\tilde{t}_i(z) \wedge \tilde{t}_j(z)\right]$, в силу определения множества C, имеется последовательность точек $\{z_n\}$, $\{z_n\} \subset \overset{*}{g}_z$, $z_n \to z$, т. е., в силу предложения 5, в угле $\left[\tilde{t}_i(z) \wedge \tilde{t}_j(z)\right]$ имеется дуга $\gamma \subset \overset{*}{g}_z$, ведущая в достижимую точку $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g}_z$ с носителем в точке z.

Используя сказанное выше, легко убедиться, что каждая точка $z \in \tilde{C}$ является носителем, по крайней мере, трех достижимых точек $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g}_z$. Поэтому $\forall z \in \tilde{C}$ имеются три простые жордановы дуги $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$, $\gamma_3(z)$, ведущие в три различные достижимые точки $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g}_z$ с носителем точкой z. Дуги $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$, $\gamma_3(z)$ разделены континуумами множества $C\overset{*}{g}_z$. Множество $\tilde{C} = \bigcup\limits_n C_n$, где $z \in C_n$, если три дуги $\gamma_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ разделены континуумами множества $C\overset{*}{g}_z$ диаметра $\geqslant \frac{1}{n}$.

Предположим, что множество $\tilde{C}$ несчетно, тогда существует n такое, что множество C_n — бесконечно. Пусть $\{z_p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ — последовательность точек множества C_n, $z_p \to \hat{z}$. Простые жордановы дуги $\gamma_1(z_1)$, $\gamma_2(z_1)$, $\gamma_3(z_1)$ (предположим, что они исходят из одной точки O_1, $O_1 \in \overset{*}{g_z}$) разбивают область $\overset{*}{g_z}$ на три области. Обозначим через S_1 ту единственную область из них, граница которой содержит точку $\hat{z}$, через L_1 обозначим одну из оставшихся областей. На границе области S_1 имеется точка z_{p_2}, $z_{p_2} \in \{z_p\}$, $\rho(z_{p_2}, \overline{L_1}) > 0$.

Пусть простые жордановы дуги $\gamma_1(z_{p_2})$, $\gamma_2(z_{p_2})$, $\gamma_3(z_{p_2})$, исходящие из некоторой точки $O_2 \in S_1$, ведут в различные достижимые точки границы $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$ с носителем точкой z_{p_2}, $[\gamma_1(z_{p_2}) \cup \gamma_2(z_{p_2}) \cup \cup \gamma_3(z_{p_2})] - z_{p_2} \subset S_1$. Дуги $\gamma_1(z_{p_2})$, $\gamma_2(z_{p_2})$, $\gamma_3(z_{p_2})$ разбивают область S_1 на три области. Через S_2 обозначена та единственная область из трех полученных, в границу которой входит точка $\hat{z}$, через L_2 — та из оставшихся двух областей, для которой имеем $\overline{L}_2 \subset S_2$. Очевидно, $\overline{L}_1 \cap \overline{L}_2 = 0$.

Далее, аналогично, на границе области S_2 имеется точка последовательности $\{z_p\}$, пусть z_{p_3}, $\rho(z_{p_3}, \overline{L}_2) > 0$. Пусть простые жордановы дуги $\gamma_1(z_{p_3})$, $\gamma_2(z_{p_3})$, $\gamma_3(z_{p_3})$, исходящие из точки $O_3 \in S_2$, ведут в три различные достижимые точки границы области $\overset{*}{g_z}$ с носителем точкой z_{p_3}, $[\gamma_1(z_{p_3}) \cup \gamma_2(z_{p_3}) \cup \gamma_3(z_{p_3})] - z_{p_3} \subset S_2$. Дуги $\gamma_1(z_{p_3})$, $\gamma_2(z_{p_3})$, $\gamma_3(z_{p_3})$ разбивают область S_2 на три области. Через S_3 обозначим ту единственную из них, граница которой содержит точку $\hat{z}$, через область L_3 — ту из оставшихся, для которой $\overline{L}_3 \subset \subset S_2$. Очевидно, $\overline{L}_2 \cap \overline{L}_3 = 0$.

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим последовательность взаимно-непересекающихся областей $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, $\overline{L}_i \cap \overline{L}_j = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots)$, соответствующих последовательности точек $z_1, z_{p_2}, z_{p_3}, \ldots \to \hat{z}$, $\{z_{p_i}\} \subset \{z_p\}$.

В силу включения $\{z_{p_i}\} \subset C_n$ и построения областей L_i, $\forall i$ граница области L_i содержит континуум диаметра $\geqslant \frac{1}{n}$ точек множества $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$. В силу предложения 5, множество $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$ — непрерывная дуга. Существование построенной последовательности областей L_i $(i = 1, 2, \ldots)$ противоречит тому, что множество $\mathrm{Fr}\, \overset{*}{g_z}$ — непрерывная дуга. Следовательно, множество $\tilde{C}$ не более чем счетно. B) доказано.

C) Множество $M \cap \beta$ не более чем счетно. Действительно, для точки $z \in M$, в силу определения множества M, $\mathrm{contg}_{\overline{g}_z^*}\, z$ — сектор, пусть $\mathrm{contg}_{\overline{g}_z^*}\, z \geqslant \pi$ и предположим, что точка $z \in \beta_0$. Тогда имеется система дуг $\{l_n\}$, $\{l_n\} \subset \overset{*}{g_z}$, стягивающихся к точке z, и два луча $\tilde{t}_i(z)$, $\tilde{t}_j(z)$ (i, j принимают некоторые из значений 1, 2, 3, 4, 5, лучи $\widetilde{t}_i(z)$ определены как обычно, см., например, определение функции $\varphi(z)$ (7)), пересекающие дуги $l_n (n = 1, 2, \ldots)$

Так как мы находимся в ситуации, рассматриваемой при доказательстве предложения 5, то имеем, что $d(\mathrm{Ls}\,\varphi(l_n)) > m$ и $d\varphi(\overset{*}{g_z}) < m$. Из полученного противоречия следует включение $z \in H$.

Множество точек $M \cap \{z : \mathrm{contg}_{\bar{g}^*_z} z < \pi\}$ разве что счетно. В самом деле, если $z \in M \cap \{z : \mathrm{contg}_{\bar{g}^*_z} z < \pi\}$, то точка z изолирована от точек множества $\bar{g}^*_z$ по некоторому сектору раствора $> \pi$, а таких точек, нетрудно убедиться, на множестве $\bar{g}^*_z$ разве что счетное множество. C доказано. Из A, B, C и условия (20) следует предложение 7.

Итак, множество $\beta \cap \mathrm{Fr}\,\overset{*}{g_z} = F$ — не более чем счетно. Из предложения 2 следует, что $\varphi((\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g_z} - F) \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^\circ) \subset \bar{S} - S$.

Докажем включение (18). Счетное замкнутое множество F — приводимо. Пусть $\{F_\omega\}$ $(\omega < \omega_0)$ — счетная трансфинитная последовательность производных множеств множества F, пусть $\widetilde{F}_\omega = \bigcap_{i<\omega} F_i - F_\omega$, тогда

$$F = \bigcup_{\omega<\omega_0} \widetilde{F}_\omega. \tag{21}$$

Пусть $\widetilde{F}_1 = F - F_1$. Тогда из $F \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0 \neq 0$ следует, что $\widetilde{F}_1 \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0 \neq 0$. Пусть $z \in \widetilde{F}_1 \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$. Предположим, что для точки z условие (18) не имеет места, тогда имеется достижимая точка ζ с носителем точкой z такая, что носитель соответствующего ей простого конца границы области $\overset{*}{g_w}$ содержит точки $C(\bar{S} - S)$. Так как ζ — достижимая точка $\mathrm{Fr}\,\overset{*}{g_z}$, то, согласно Каратеодори [5], в любой окрестности точки z имеется область $g \subset \overset{*}{g_z}$, отсекаемая от области $\overset{*}{g_z}$ дугой γ, $\bar{\gamma}$ — простая жорданова дуга, $z \in \bar{\gamma}$ такая, что все члены каждой последовательности точек $\{z_n\} \subset \overset{*}{g_z}$, сходящейся к достижимой точке ζ, начиная с некоторого, принадлежат области g. Так как точка $z \in \widetilde{F}_1 \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$, то можем считать, что область g такова, что $(\bar{g} - z) \subset H \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$.

Область $\varphi(g) \subset \overset{*}{g_w}$. Граница области $\varphi(g)$ состоит из точек дуги $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\gamma) \subset S$, точек, содержащихся на окружности $\bar{S} - S$, и замкнутого множества, пусть множества N, отвечающего точке z ($w \in N$, если имеется последовательность точек $\{z_n\} \subset g$, $z_n \to z$ такая, что $\varphi(z_n) \to w$). По предложению $N \cap S \neq 0$. Пусть $w' \in N \cap S$, $C(w')$ — окрестность точки w', $C(w') \subset S$. В силу условия $\gamma \in H$

и однолистности функции $\varphi(z)$ на дуге γ, можем считать, что окрестность $C(w')$ такова, что $\rho(C(w'), \varphi(\gamma)) > 0$. Тогда, в силу выбора окрестности $C(w')$ и строения границы области $\varphi(g)$, множества $C(w') \cap \operatorname{Fr}\varphi(g)$ и $C(w') \cap N$ совпадают, и для каждой последовательности точек $\{w_n\} \subset \varphi(g)$, $\operatorname{Ls} w_n \subset \operatorname{Fr}\varphi(g) \cap C(w')$ имеем $\varphi^{-1}(w_n) \to z$. На основании теоремы Lindelöf'а, (см. [6, с. 99]) заключаем, что функция $\varphi^{-1}(w)$ постоянна в области $\varphi(g)$. Полученное противоречие доказывает (18) для точек множеста $\widetilde{F}_1$.

Предположим, что для точек множества $\widetilde{F}_\omega$, $\omega < \omega_1 < \omega_0$ выполняется условие (18). Множество $\bigcap\limits_{\omega < \omega_1} F_\omega \neq 0$, и пусть F_{ω_1} — производное множество множества $\bigcap\limits_{\omega < \omega_1} F_\omega$. Тогда $\widetilde{F}_{\omega_1} = \bigcap\limits_{\omega < \omega_1} F_\omega - F_{\omega_1}$. Пусть $z \in \widetilde{F}_{\omega_1} \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$.

Пусть g — область, выбранная для достижимой точки ζ с носителем в точке $z \in \widetilde{F}_{\omega_1} \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$ таким же образом, как одноименная область в случае $z \in \widetilde{F}_1 \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$. Пусть γ — простая дуга, отсекающая область g от области $\overset{*}{g}_z$. Можем считать, в силу утверждения 7, что $\bar{\gamma} \subset H$. Рассуждая аналогично случаю $z \in \widetilde{F}_1 \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$, получаем для $z \in \widetilde{F}_{\omega_1} \cap [l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$ включение (18).

Так как (21), то согласно теореме о трансфинитной индукции, (18) доказано, т. е. утверждение 7 полностью доказано.

Утверждение 8. Множество $\operatorname{Fr} D_k \cap \beta \cap K$ — не более чем счетно.

Доказательство. В силу утверждения 7, множество $\operatorname{Fr} D_k \cap \beta = M \cup N$, где множества M и N определяются как в предложении 7.

Тогда

$$\operatorname{Fr} D_k \cap \beta = \bigcup_p [Fr\, d_p \cap N] \cup C \cup [M \cap \beta], \tag{22}$$

где область d_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ и множество C определены, как одноименные множества предложения 7.

Так как в силу утверждений 3, 4 предложение, аналогичное предложению 3 о внутренней границе, имеет место и для области D_k, то, как в предложении 7, доказывается, что $\forall p = 1, 2, \ldots$ множество $N \cap d_p$ не более чем счетно. Пусть множество $\widetilde{C}$ определено для области D_k таким же образом, как одноименное множество при доказательстве предложения 7 для области $\overset{*}{g}_z$. Аналогично, как в предложении 7, доказывается разве что счетность множества $\widetilde{C}$.

Было доказано (см. предложение 7, C), что все точки множества M, исключая разве что счетное множество, являются точками, для которых существуют два луча $\widetilde{t}_i(z)$, $\widetilde{t}_j(z)$, определенные как обычно, соединимые в области D_k системой дуг $\{l_n\}$, стягивающихся к точке z, а множество $C-\widetilde{C}$ состоит из таких точек, согласно определению. Поэтому для доказательства 8 достаточно показать, что $\forall z \in \operatorname{Fr} D_k \cap K$ с указанными свойствами принадлежит множеству H.

Итак, пусть точка $z \in \operatorname{Fr} D_k \cap K$ — носитель достижимой точки границы $\operatorname{Fr} D_k$, которая определяется системой дуг $\{l_n\}$ (см. теорию простых концов Каратеодори, например [5, 7]), стягивающейся к точке z, и пусть $\forall n$ дуга l_n пересекает два луча $\widetilde{t}_i(z)$ и $\widetilde{t}_j(z)$. В силу утверждения 3 можем считать, что $\forall n$ дуга $\bar{l}_n \subset H$. Обозначим через $\{g_n\}$ последовательность вложенных областей, отсекаемых в области D_k системой дуг $\{l_n\}$. Так как точка $z \in K$, то считаем, что $\forall n\, [\bar{g}_n \subset K]$.

Континуум $\operatorname{Ls} \varphi(l_n)$ — носитель одного простого конца, соответствующего точке z области D_k. Напомним, что

$$\{\varphi(l_n)\} \subset \left\{w : |w-w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$\varphi(z) = w \in \left\{ w : |w - w_0| < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{1000}\right\}, \ \operatorname{Ls} \varphi(l_n) > m.$$

Предположим, что $\forall n$ дуга $\varphi(l_n)$ пересекает угол $\{\Omega_{i,j}(w) - (\Omega_i(w) \cup \Omega_j(w))\}$ (случай, когда $\forall n$ дуга $\varphi(l_n)$ пересекает угол $C(\Omega_{i,j}(w))$, аналогичный).

Все точки рассматриваемого простого конца с носителем $\operatorname{Ls} \varphi(l_n)$ недостижимы из области G_k, исключая, возможно, одну точку. Поэтому на каждом луче $t(w) \in \{\Omega_{i,j}(w) - (\Omega_i(w) \cup \Omega_j(w))\}$, исключая, возможно, один, на интервале, пусть $\delta \subset t(w)$, с концом в одной из предельных точек последовательности $w_n \in \varphi(l_n) \cap t(w)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, пусть точке w_0, пересекаемом бесконечным числом дуг $\varphi(l_n)$, имеется последовательность точек $\operatorname{Fr} G_k$, сходящаяся к точке w_0.

Подобно, как при доказательстве утверждения 7, строим область $\overset{*}{g}_z$, $\bar{\overset{*}{g}}_z \cap \bar{l}_1 = 0$, $\bar{\overset{*}{g}}_z \subset g_1$, $(g_1 \in \{g_n\})$. Для построения области $\overset{*}{g}_z$, так как $g_1 \subset K$, не привлекаем угла $[l_i(z) \wedge l_j(z)]$ (см. построение области $\overset{*}{g}_z$ при доказательстве утверждения 7). Для области $\overset{*}{g}_z$ имеет место условие, аналогичное (17). Повторяя все дальнейшие рассуждения доказательства утверждения 7, относительно области $\overset{*}{g}_w$ доказываем утверждение, аналогичное (18). Полученное таким образом противоречие доказывает, что множество $M \cap \{z : \operatorname{contg}_{\overline{D}_k} z \geqslant \pi\} \subset H$ и множество $C - \widetilde{C} \subset H$ (из включения $C \subset \beta$ следует, что $C - \widetilde{C} = 0$). Так как множество $M \cap$

$\cap \{z : \mathrm{contg}_{\overline{D}_k} z < \pi\}$ — не более чем счетно, то утверждение 8 доказано.

Доказательство утверждения I. В силу утверждений 8, 4, в истинности утверждения I достаточно убедиться для точек $z \in K \cap \mathrm{Fr}\, D_k \cap \beta$. Обозначим через $F = \mathrm{Fr}\, D_k \cap \beta$. Пусть $\{F_\omega\}$ — последовательность производных множеств множества F, $\widetilde{F}_\omega = \bigcap_{i<\omega} F_i - F_\omega$. Так как множество $K \cap F$ — не более чем счетно, то из $\bigcap_{i<\omega} F_i \cap K \neq 0$ следует, что $\widetilde{F}_\omega \cap K \neq 0$.

В силу не более чем счетности множества $K \cap F$ имеем конечное или счетное трансфинитное число ω_0 такое, что $F_{\omega_0} \cap K = 0$, тогда $F \cap K = \bigcup_{\omega \leqslant \omega_0} \widetilde{F}_\omega \cap K$ Для точек последнего множества методом трансфинитной индукции на основании утверждений 3—8 о границе области D_k, аналогично доказательству (18) доказывается утверждение I (роль внутренности угла $[l_i(\bar{z}) \wedge l_j(\bar{z})]^0$ играет круг K). Лемма 3 полностью доказана.

Сформулируем лемму 3'.

Лемма 3'. *Функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества $\delta - \beta^*$ относительно множества $\delta - \beta^*$ (определения множеств δ, β^* см. определение функции $\varphi(z)$ (7)).*

3

Лемма 4. *В каждой точке $z_0 \in \beta^*$ выполняется один из случаев:*
1) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z)$ *— существует;*

2) *имеются дуги $l^i_{z_0}$, $l^i_{z_0} \subset H$, $(i = 1, 2$ или $i = 1, 2, 3)$ с концом в точке z_0, замыкания которых простые жордановы дуги, делящие круг $\{z : |z - z_0| < r\}$ $(r > 0)$ на области H_i $(i = 1, 2$ или $i = 1, 2, 3)$, в которых*
$\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in H_i \cap \beta'}} f(z)$ *— существует* $(i = 1, 2$ *или* $i = 1, 2, 3)$.

Доказательство. Лемма 4 будет следовать из ряда вспомогательных утверждений. В настоящем параграфе сохраним все обозначения параграфа 1.

Утверждение δ. Пусть точка $z_0 \in \beta^*$ такова, что два соседние угла $V_i(z_0)$, $V_{i+1}(z_0)$ не изолированы по множеству β_0, тогда

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap V_i(z_0)}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap V_{i+1}(z_0)}} f(z).$$

Доказательство. Пусть точка $z_1 \in \beta' \cap V_i(z_0)$, и $\rho(z_1, z_0)$ достаточно мало, тогда, в силу определения углов $\theta_i(z_0)$, $V_i(z_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ (см. 1), в силу *1*, *2* леммы 1, имеется такая точка $z_2 \in V_{i+1}(z_0) \cap \beta'$, для которой лучи $t_{i+2}(z_1)$, $t_{i+3}(z_2)$ пересекаются, и $\rho(z_0, z_2)$ может быть сколь угодно мало. Согласно утверждению β, можем считать, что значение $f(z_2)$ сколь угодно близко к $a = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in V_{i+1}(z_0) \cap \beta'}} f(z)$.

Пусть точка $z_0' \in \beta' \cap V_{i+1}(z_0)$ содержится в настолько малой окрестности точки z_0, что $\rho(f(z_0'), a)$ мало по сравнению с $\rho(f(z_2), a)$ и $z_1 \in [t_i(z_0')^\wedge t_{i+1}(z_0')]$, $z_2 \in [t_{i+1}(z_0')^\wedge t_{i+2}(z_0')]$. Поэтому, в силу утверждения α, $w_1 = f(z_1) \in \Omega_{i,\, i+1}(w_0')$, $w_0' = f(z_0')$, $w_2 = f(z_2) \in$ $\in \Omega_{i+1,\, i+2}(w_0')$. Согласно пункту 3 леммы 1, угол $\Omega_{i+2}(w_1)$ пересекает угол $\Omega_{i+3}(w_2)$ Из сказанного ясно, что если $\rho(w_2, w_0')$ достаточно мало, то $\rho(w_1, w_0')$ сколь угодно мало. Итак, если $\rho(z_0', z_0)$, $\rho(z_0, z_1)$ достаточно малы, то получаем $\rho(f(z_1), a)$ сколь угодно малое, и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$. Утверждение δ доказано.

Утверждение ε. Пусть точка $z_0 \in \beta^*$ такова, что углы $\theta_i(z_0)$, $V_{i+1}(z_0)$ — два соседние угла (углы $V_i(z_0)$, $\theta_{i+1}(z_0)$ изолированы в точке z_0 по множеству β_0), не изолированы в точке z_0 по множеству β_0, тогда имеем одну из двух возможностей:

1) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap V_{i+1}(z_0)}} f(z)$;

2) в угле $V_i(z_0)$ имеется дуга l_{z_0}, с концом в точке z_0 замыкание которой $\bar{l}_{z_0}$ — простая жорданова дуга такая, что

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in l_{z_0}}} f(z) \text{ — существует.}$$

Доказательство. Докажем включение

$$b \subset \Omega_{i+2}(a), \tag{23}$$

где $b = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap V_{i+1}(z_0)}} f(z)$, $a = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z)$, в силу утверждения β последние пределы существуют.

Действительно, пусть $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset \beta' \cap \theta_i(z_0)$. Рассмотрим угол $[t_{i+2}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)]$. В силу *1*, *2* леммы 1, определения углов $\theta_i(z_0)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), лучи $t_{i+2}(z_n)$, $t_{i+3}(z_n)$ пересекают, соответственно, углы $\theta_{i+1}(z_0)$, $\theta_{i+4}(z_0)$, и некоторая окрестность точки z_0 содержится в угле $[t_{i+2}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)]$. Углу $[t_{i+2}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)]$ в w-плоскости соответствует угол $\Omega_{i+2,\, i+3}(w_n)$, $w_n = f(z_n)$, и, в силу утверждения α образы точек $z \in \beta' \cap [t_{i+2}(z_n)^\wedge t_{i+3}(z_n)]$ попадают в $\Omega_{i+2,\, i+3}(w_n)$. Пусть точка $z_m \in \beta' \cap [t_{i+2,}(z_n)^\wedge (t_{i+3}(z_n)$, $z_m \in \{z_n\}$.

Рассмотрим угол $[t_{i+1}(z_m)^\wedge t_{i+2}(z_m)]$. Если $\rho(z_m, z_0)$ достаточно мало, то, в силу определения углов $\theta_i(z_0)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), произвольная, наперед заданная точка $z \in V_{i+1}(z_0)$ содержится в угле $[t_{i+1}(z_m)^\wedge t_{i+2}(z_m)]$. В силу утверждения α, образы точек $z \in \beta' \cap$ $\cap [t_{i+1}(z_m)^\wedge t_{i+2}(z_m)]$ достаточно малой окрестности z_0 содержатся в угле $\Omega_{i+1,\, i+2}(w_m)$, $w_m = f(z_m)$. Следовательно, образы точек

$z \in \beta' \cap \{[t_{i+2}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)] \cap [t_{i+1}(z_m) \wedge t_{i+2}(z_m)]\}$ достаточно малой окрестности точки z_0 содержатся в пересечении $\Omega_{i+2,\, i+3}(w_n) \cap \cap \Omega_{i+1,\, i+2}(w_m)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = a$, то из сказанного следует включение (23).

Пусть $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset \beta' \cap V_{i+1}(z_0)$. Пусть предельное положение лучей $t_i(z_n)$, $t_{i+1}(z_n)$ — лучи $\tilde{t}_i(z_0)$, $\tilde{t}_{i+1}(z_0)$ — таково, что внутренность угла $[\tilde{t}_i(z_0) \wedge \tilde{t}_{i+1}(z_0)]$ не изолирована по множеству β' в точке z_0. Тогда аналогично (23) получаем включение

$$a \subset \Omega_i(b). \tag{24}$$

В силу определения углов $\Omega_i(w)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ пункта 3 леммы 1, из включений (23), (24) следует, что $a = b$, т. е. имеем *1* утверждения ε.

Пусть имеем противное: внутренность угла $[\tilde{t}_i(z_0) \wedge \tilde{t}_{i+1}(z_0)]^0$ изолирована в точке z_0 по множеству β_0, т. е. имеется некоторый открытый сектор v угла $[\tilde{t}_i(z_0) \wedge \tilde{t}_{i+1}(z_0)]$, $v \subset H$, пусть $d(v) < \rho$. Убедимся, что в последнем случае имеет место *2* утверждения ε. Доказательство напоминает доказательство существования дуги l_{z_0} в утверждении 2. Рассмотрим в w-плоскости углы $\Omega_i(b)$, $\Omega_{i+1}(b)$. В силу утверждения 2, определения множества β^*, множество $\{[\tilde{t}_i(z_0) \cup \tilde{t}_{i+1}(z_0)] - z_0\} \cap \mathrm{Fr}\, v \cap \beta^* = 0$. Согласно лемме 3′, условия $\beta^* = 0$, и так как отрезки лучей $t_i(z_n)$, $t_{i+1}(z_n)$ (см. определение угла $[\tilde{t}_i(z_0) \wedge \tilde{t}_{i+1}(z_0)]$) диаметра меньше ρ в силу пункта 3 леммы 1 отобразятся в углы $\Omega_i(w_n)$, $\Omega_{i+1}(w_n)$, $w_n = f(z_n)$, соответственно имеем $f([\tilde{t}_i(z_0) - z_0] \cap \mathrm{Fr}\, v) \subset \Omega_i(b)$ и $f([\tilde{t}_{i+1}(z_0) - - z_0] \cap \mathrm{Fr}\, v) \subset \Omega_{i+1}(b)$. Продолжая рассуждения, аналогично доказательству утверждения 2, получим *2* утверждения ε. Утверждение ε доказано.

Утверждение λ. Пусть точка $z_0 \in \beta^*$ такова, что $\theta_i(z_0)$, $\theta_{i+1}(z_0)$ — два соседних угла (угол $V_i(z_0)$ изолирован в точке z_0 по множеству β_0), не изолированы в точке z_0 по множеству β_0; тогда

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_{i+1}(z_0)}} f(z).$$

Доказательство. Пусть, в силу утверждения β, $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z) = a$, $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_{i+1}(z_0)}} f(z) = b$.

Аналогично, как (23), получим включения

$$b \in \Omega_{i+2}(a), \quad a \in \Omega_{i+4}(b). \tag{25}$$

Действительно, пусть $\{z_n\} \subset \theta_i(z_0)$, $z_n \to z_0$. Рассмотрение углов

$t_{i+2}(z_n) \wedge t_{i+3}(z_n)$, $[t_{i+2}(z_m) \wedge t_{i+1}(z_m)]$, $m > n$, точки z_n, $z_m \subset \{z_n\}$, аналогично доказательству (23), приведет к включению $b \in \Omega_{i+2}(a)$; включение $a \in \Omega_{i+4}(b)$ получается аналогичным образом. Из (25), как и из (23) и (24), следует *1* утверждения ε; получаем $a = b$. Утверждение λ доказано.

Утверждение ν. Пусть точка $z_0 \in \beta^*$ такова, что $\theta_i(z_0)$, $\theta_{i+2}(z_0)$ — два соседних угла (углы $\theta_{i+1}(z_0)$, $V_i(z_0)$, $V_{i+1}(z_0)$ — изолированы в точке z_0 по множеству β_0), не изолированы в точке z_0 по множеству β_0; тогда имеем одну из двух возможностей:

1) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_{i+2}(z_0)}} f(z)$;

2) в одном из углов $V_i(z_0)$ или $V_{i+1}(z_0)$ имеется дуга l_{z_0}, замыкание которой дуга $\overline{l}_{z_0}$ — простая жорданова дуга, для которой $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in l_{z_0}}} f(z)$ — существует.

Доказательство. Пусть внутренность каждого из углов $[\tilde{t}_i(z_0) \wedge \tilde{t}_{i+1}(z_0)]$, $[\hat{t}_{i+1}(z_0) \wedge \hat{t}_{i+2}(z_0)]$, где лучи $\tilde{t}_i(z_0)$, $\tilde{t}_{i+1}(z_0)$ — предельное положение лучей $t_i(z_n)$, $t_{i+1}(z_n)$, $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset \theta_{i+2}(z_0) \cap \beta'$, лучи $\hat{t}_{i+1}(z_0)$, $\hat{t}_{i+2}(z_0)$ — предельное положение лучей $t_{i+1}(z_n)$, $t_{i+2}(z_n)$, $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset \beta' \cap \theta_i(z_0)$, не изолирована от точек множества β_0. Тогда аналогично включению (24) получаем включения $a \in \Omega_i(b)$, $b \in \Omega_{i+2}(a)$, где $a = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_i(z_0)}} f(z)$, $b = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap \theta_{i+2}(z_0)}} f(z)$, из которых следует равенство $a = b$, т. е. *1* утверждения ν.

В противном случае, аналогично *2* утверждения ε доказывается возможность *2* утверждения ν. Утверждение ν доказано.

Доказательство леммы 4. Пусть точка $z_0 \in \beta^*$. Случай, когда точка z_0 удовлетворяет условию утверждения γ, исключаем из рассмотрения, так как в этом случае для точки z_0 выполняется *1* леммы 4. Тогда относительно каждых двух соседних углов $\theta_i(z_0)$, $V_j(z_0)$; $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$, не изолированных в точке z_0 по множеству β_0, применимо одно из утверждений β, δ, ε, λ, ν. Следовательно, пределы функции $f(z)$, $z \to z_0$, $z \in \beta'$ вдоль названных углов совпадают или множества $\theta_i(z_0) \cap \beta'$, $V_j(z_0) \cap \beta'$ (возможно, это будут множества $\theta_i(z_0) \cap \beta'$, $\theta_j(z_0) \cap \beta'$, случай утверждения ν) разделены дугой l_{z_0} с требуемыми в пункте *2* леммы 4 свойствами. Лемма 4 доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Очевидно, что для произвольной точки $z_0 \in \beta^*$, для которой выполняется *1* леммы 4, совершенно аналогично доказательству леммы 3 доказывается существование $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, т. е. согласно определению функции $\varphi(z)$ имеем $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$.

Для произвольной точки $z \in \beta^*$, для которой выполняется *2* леммы 4, аналогично доказательству леммы 3, получаем

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in H_i}} \varphi(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in H_i \cap \beta'}} f(z) \quad (i = 1,\ 2 \text{ или } i = 1,\ 2,\ 3). \tag{26}$$

Действительно, пусть (26) не выполняется. В качестве точки w_0 леммы 3 принимаем точку $a = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta' \cap H_i}} f(z)$. Тогда пусть число $\varepsilon > 0$, открытый круг K (мы рассматриваем лишь точки области H_i) такие, как в доказательстве леммы 3. В качестве областей G_k $(k = 1,\ 2, \ldots)$ принимаем компоненты открытого множества $G = \varphi(H_i \cap K) \cap \left\{w : |w - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$; области $D_k = \varphi^{-1}(G_k)$, $D_k = \subseteq H_i$.

Для области D_k совершенно аналогично утверждению I доказывается следующие утверждение: пусть $z \in (\operatorname{Fr} D_k - \bigcup_i \bar{l}^i_{z_0}) \cap K$, то для произвольной последовательности $\{z_n\} \subset D_k$ $(z_n \to z)$ имеем $\operatorname{Ls} \varphi(z_n) \subset \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Последнее включение, как легко видеть, так как образы дуг $l^i_{z_0}$ в w-плоскости — отрезки (см. доказательство утверждения *2*), имеет место и для точки z_0, если $z_0 \in \operatorname{Fr} D_k$. Из сказанного, учитывая, что $\varphi\overline{(l^i_{z_0})} = f\overline{(l^i_{z_0})}$ — отрезки, аналогично (как из утверждения I следует лемма 3) следует (26).

Из (26) и условия $l^i_z \subset H$ для каждой точки $z_0 \in \beta^*$, для которой выполняется *2* леммы 4, следует, что $\lim_{z \to z_0} \varphi(z)$ — существует и в силу определения функции $\varphi(z)$ имеем $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$.

Итак, функция $\varphi(z)$ непрерывна в каждой точке $z \in \beta^*$. Следовательно, в силу определения функции $\varphi(z)$ она непрерывна в круге δ, определяющем порцию β_0 множества β.

Убедимся, что функции $\varphi(z)$ и $f(z)$ совпадают в круге δ. Действительно, пусть $z_0 \in \beta^*$ и пусть лучи $t_i(z_0)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ — лучи, отвечающие точке z_0, согласно условию K^{**}. Согласно определению непрерывной функции $\varphi(z)$, так как $\beta^* = 0$, $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in t_1(z_0) - \beta^*}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in t_2(z_0) - \beta^*}} f(z) = \varphi(z)$. Но так как (в силу условия K^{**}) для функции $f(z)$ в точке z_0 вдоль лучей $t_i(z_0)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ выполняется (1), то последние равенства возможны только когда $\varphi(z_0) = f(z_0)$.

Итак, функция $f(z)$ непрерывна в круге δ. Так как в каждой точке $z \in \delta$, согласно условию теоремы 1, выполняется условие K^{**}, то, в силу теоремы Меньшова, непрерывная функция $f(z)$ аналитична в круге δ, следовательно, $\delta \subset H$, т. е. $\delta \cap \beta = 0$. Последнее противоречие доказывает теорему 1.

Автор благодарен Ивану Николаевичу Песину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродович М. Т. Об условиях моногенности не непрерывных отображений. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 12. Харьков, 1970, с. 94—103.
2. Menchoff D. Sur les représentations qui conservent les angles. — «Math. Ann.», 1933, № 109, p. 101—159.
3. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М., Физматгиз, 1963. 212 с.
4. Сакс С. Теория интеграла. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
5. Carathéobory C. Über bie Begrenzung einfach zusammer — nhängender Gebiete. — «Math. Ann.», 1912, № 73, с. 323—370.
6. Каратеодори К. Конформное отображение. М., Физматгиз, 1934. 105 с.
7. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.-Л., «Наука», 1952. 96 с.

Поступила 6 апреля 1973 г.