УДК 519.21

А. И. ИЛЬИНСКИЙ

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ КОМПОНЕНТАХ НЕКОТОРЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

1°. Введение. Мы будем пользоваться терминологией, принятой в монографии Ю. В. Линника и И. В. Островского [1].

Как известно [1, с. 7], одной из основных задач теории разложений вероятностных законов является описание множества всех компонент (делителей) данного закона. Если закон P имеет неразложимые компоненты (в дальнейшем речь будет идти только о таких законах), то представляет интерес описание множества всех его неразложимых компонент. Это множество условимся в дальнейшем обозначать через $\boldsymbol{N}(P)$. Описание множества $\boldsymbol{N}(P)$ известно лишь для немногих законов [2—8], среди которых нет безгранично делимых (б. д.). В настоящей статье изучается множество $\boldsymbol{N}(P)$ для некоторых б. д. законов P таких, что $\boldsymbol{N}(P) \neq \varnothing$[1].

Введем некоторые определения и обозначения. Пусть P — произвольный вероятностный закон; q — любое действительное число, большее единицы. Обозначим через $U_q(P)$ множество тех законов Q, которые удовлетворяют условию

$$1/q < \inf Q(B)/P(B) \leqslant \sup Q(B)/P(B) < q,$$

где точные верхняя и нижняя грани берутся по множеству всех борелевских подмножеств прямой. (Условимся считать, что $0/0=1$, $a/0=+\infty$ для всякого числа $a>0$). Легко убедиться в том, что если $U_{q_1}(P_1) \cap U_{q_2}(P_2) \neq \varnothing$, то для всякого закона P_3, принадлежащего этому пересечению, существует число $q_3>1$ такое, что $U_{q_3}(P_3) \subset U_{q_1}(P_1) \cap U_{q_2}(P_2)$. Таким образом, семейство множеств $\{U_q(P)\}$ является базой некоторой топологии $\boldsymbol{T}$ (см., например, [10, с. 73]) на множестве вероятностных законов (которая, как легко видеть, является более тонкой, чем топология слабой сходимости).

[1] Основные результаты были приведены без доказательства в заметке [16].

Пусть S — произвольное замкнутое подмножество прямой; через $\boldsymbol{D}_S$ будем обозначать множество законов P, спектр $S(P)$ которых равен S; через $\boldsymbol{N}_S(P)$ — множество неразложимых компонент закона P, имеющих своим спектром S $(\boldsymbol{N}_S(P) = \boldsymbol{N}(P) \cap \boldsymbol{D}_S)$.

2°. Формулировка результатов. Пусть $G_{\lambda, \alpha}$ — геометрический закон с параметрами λ и α $(0 < \lambda < \infty,\ 0 < \alpha < 1)$, определяемый равенствами $G_{\lambda, \alpha}(\{\lambda k\}) = (1 - \alpha)\alpha^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Это б. д. закон (см., например,[1, с. 125]). Мы будем рассматривать в дальнейшем лишь такие компоненты P закона $G_{\lambda, \alpha}$, для которых $S(P) \subset \{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$ и $0 \in S(P)$. При этом мы не потеряем в общности [1, с. 87].

Геометрический закон $G_{\lambda, \alpha}$ является слабым пределом (при $n \to \infty$) своих компонент, так называемых «урезанных» геометрических законов $G_{\lambda, \alpha, n}$, которые определяются равенствами $G_{\lambda, \alpha, n}(\{\lambda k\}) = \alpha^k (1 - \alpha)(1 - \alpha^n)^{-1}$, где $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Из результатов Краснера и Ранулак [2] легко получается описание множества $\boldsymbol{N}(G_{\lambda, \alpha, n})$. Оказывается, что спектры неразложимых компонент закона $G_{\lambda, \alpha, n}$ являются конечными арифметическими прогрессиями с простым числом членов, а величины скачков образуют геометрическую прогрессию. Приводимая ниже теорема 1 показывает, что характер ограничений на спектр и величины скачков неразложимых компонент закона $G_{\lambda, \alpha}$ существенно мягче. Эта теорема содержит, в частности, полное описание спектров законов из $\boldsymbol{N}(G_{\lambda, \alpha})$.

Теорема 1. *Для всякого множества $S \subset \{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$ $(0 \in S)$, содержащего не менее двух точек, множество $\boldsymbol{N}_S(G_{\lambda, \alpha})$ обладает непустой внутренностью в топологии T.*

В частности, в качестве S можно взять двухточечное множество $\{0, n\lambda\}$, где n — натуральное число. Нами получено полное описание класса $\boldsymbol{N}_{\{0, n\lambda\}}(G_{\lambda, \alpha})$.

Предложение 1. *Для того чтобы закон Бернулли $(1 - p)\varepsilon_0 + p\varepsilon_{n\lambda}$ $(0 < p < 1)$* являлся компонентой закона $G_{\lambda, \alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $p/(1 - p) \leqslant \alpha^n$.* (Закон, спектр которого состоит из двух точек, — неразложим (см., например, [1, с. 89]).

Показательным законом H_a, где $a > 0$, называется абсолютно непрерывный закон с плотностью

$$h_a(x) = \begin{cases} a \exp(-ax), & x \geqslant 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Как известно, H_a — б. д. закон (см., например, [9, с. 645]). Можно рассматривать только такие компоненты P этого закона, для которых $S(P) \subset [0, \infty)$ и $0 \in S(P)$ [1, с. 87].

---

* Через ε_x обозначается закон, сосредоточенный в точке x.

Показательный закон H_a является слабым пределом (при $\lambda\to\infty$) своих компонент — «урезанных» показательных законов $H_{a,\lambda}$ с плотностью

$$h_{a,\lambda}(x)=\begin{cases} ae^{-ax}(1-e^{-a\lambda})^{-1}, & x\in[0,\ \lambda],\\ 0 & , x\notin[0,\ \lambda].\end{cases}$$

Опираясь на результаты Т. Льюиса [3], А. Тортра [4] получил описание множества $\boldsymbol{N}(H_{a,\lambda})$. Как и в случае урезанного геометрического закона, оказалось, что спектры неразложимых компонент закона $H_{a,\lambda}$ являются конечными арифметическими прогрессиями с простым числом членов, а величины скачков образуют геометрическую прогрессию. Теорема 2 показывает, что множество $\boldsymbol{N}(H_a)$ существенно богаче.

Теорема 2. *Для всякого замкнутого множества $S\subset[0,\ \infty)$ $(0\in S)$, содержащего не менее двух точек, множество $\boldsymbol{N}_S(H_a)$ обладает непустой внутренностью в топологии T.*

Обозначим через $F_{A,\alpha,\beta}$ абсолютно непрерывный закон с плотностью $A_0\exp(\beta x-Ae^{\alpha x})$, где A_0, $A>0$, α, $\beta<0$. Безграничную делимость этих законов, введенных в работе [13], доказал С. Г. Малошевский [14].

Следствие. *Множество $\boldsymbol{N}_s(F_{A,\alpha,\beta})$ обладает непустой внутренностью в топологии $\boldsymbol{T}$ для любого замкнутого множества $S\subset(-\infty,\ \infty)$, ограниченного слева и содержащего не менее двух точек.*

Приведем аналог предложения 1 для показательного закона.

Предложение 2. *Для того чтобы закон Бернулли $(1-p)\varepsilon_0+$ $+p\varepsilon_\beta$ $(0<p<1,\ \beta>0)$ являлся компонентой закона H_a, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $p/(1-p)\leqslant e^{-\beta a}$.*

Теорема 3. *Пусть Q — закон, характеристическая функция которого равна одной из следующих функций:*

$$\text{а) } (1+t^2)^{-1},\ \text{б) } (\operatorname{ch}(t\pi/2))^{-1},$$

$$\text{в) } \exp(-|t|^\alpha)\ (0<\alpha\leqslant1),\ \text{г) } (1+|t|)^{-\gamma}\ (\gamma>2), \tag{2}$$

а $S\subset(-\infty,\ \infty)$ — замкнутое множество, содержащее не менее двух точек. Тогда множество $\boldsymbol{N}_S(Q)$ обладает непустой внутренностью в топологии $\boldsymbol{T}$. (Законы с характеристическими функциями (х. ф.) (2) безгранично делимы [9, с. 645]).

Замечание 1. Если допускать к рассмотрению лишь *ограниченные* замкнутые подмножества прямой S, содержащие не менее двух точек, то формулировки теорем 2 и 3 можно усилить. Именно: пусть Q — один из тех б. д. законов, о которых идет речь в теоремах 2 и 3. Тогда множество $\boldsymbol{N}_S(Q)$, рассматриваемое как подмножество в $\boldsymbol{D}_S$, наделенном топологией слабой сходимости законов, обладает непустой внутренностью. Легко видеть, что если множество S бесконечно, то топология T на множестве $\boldsymbol{D}_S$

является более тонкой, чем сужение на нем слабой топологии. (Если множество S конечно, то эти топологии на $\boldsymbol{D}_S$ совпадают.)

Замечание 2. Требование ограниченности множества S существенно для справедливости утверждения, высказанного в замечании 1. Более того, множество всех неразложимых законов с заданным неограниченным спектром S может иметь пустую внутренность, если его рассматривать как подмножество в $\boldsymbol{D}_S$, наделенном топологией слабой сходимости. Так будет, например, сли $S = [0, \infty)$ или $S = \{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$*.[1]

Отметим также следующее свойство множества $\boldsymbol{N}(H_a)$. (Аналогичные утверждения можно сформулировать и для других рассматриваемых здесь б. д. законов).

Предложение 3. а) *В множестве $\boldsymbol{N}(H_a)$ существуют законы, имеющие целые х. ф. порядка $\rho=1$, с величиной типа $0 < \sigma \leqslant \infty$.* б) *Пусть S — произвольное неограниченное замкнутое подмножество в $[0, \infty)$. В $\boldsymbol{N}_S(H_a)$ существуют законы, имеющие целые х. ф. любого порядка ρ, $1 < \rho \leqslant \infty$ ($\rho = 1$), с величиной типа σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ ($\sigma = \infty$).* в) *В множестве $\boldsymbol{N}(H_a)$ имеются законы, х. ф. которых не продолжаются аналитически за границу полуплоскости $\{t: \operatorname{Im} t > -a\}$.*

3°. Используемые результаты. Нам понадобятся два достаточных признака неразложимости вероятностных законов. Первый из них (см. [11], а также [1, с. 97]), в котором рассматриваются законы с ограниченным спектром, удобно сформулировать как необходимое условие разложимости закона.

Лемма 1. *Пусть P — разложимый закон, причем $-\infty < l = \operatorname{lext} P < \operatorname{rext} P = L < +\infty$.[2] Тогда существуют две точки k и j, $l < k < L$, $l < j < L$ такие, что для всех чисел $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$P((k-2\delta,\ k+2\delta))\, P((j-2\delta,\ j+2\delta)) \geqslant$$
$$\geqslant P([l,\ l+\delta))\, P((L-\delta,\ L]).$$

Лемма 2, используемая нами в дальнейшем при $n = 1$, является усилением одного утверждения из работы Л. С. Кудиной [12] и доказывается с помощью некоторой модификации проведенных там рассуждений. Чтобы ее сформулировать, введем обозначения:

---

[1] Пусть P — неразложимый закон; $S(P)=[0, \infty)$, n — натуральное число. Обозначим через $c_j(n)$ $(j = 1, 2 \ldots)$ такие положительные числа, что $P([0, n))\times \times \left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(n)\right\} = 1$. Тогда законы Q_n, определяемые равенством $Q_n(B) = = P(B \cap [0, n)) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(n)\, P((B - jn) \cap [0, n))$, где B — любое борелевское подмножество прямой, разложимы и образуют последовательность, слабо сходящуюся к закону P ($S(Q_n) = [0, \infty)$ для всех n).

[2] $\operatorname{lext} P = \inf\{x : x \in S(P)\}$, $\operatorname{rext} P = \sup\{x : x \in S(P)\}$.

если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, то $\|x\| = (|x_1|^2) + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$, $B_r(x) = \{y \in R^n: \|y - x\| \leqslant r\}$. где $r \geqslant 0$.

Лемма 2. *Пусть P—вероятностный закон в R_n. Предположим, что существует последовательность точек $x_k \in R^n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ такая, что $x_0 = 0$, $\|x_{k+1}\| > 2\|x_k\| + 1$ для всех k, и последовательность неотрицательных чисел $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что $r_0 = 0$, $r_k \to 0$ $(k \to \infty)$, $r_{k+1} < \|x_{k+1}\| - \|x_k\| - r_k$, причем выполняются следующие условия:*

1) *числа $c_k = P(B_{rk}(x_k))$ таковы, что $c_k > 0$, $c_{k+1} \leqslant \varkappa c_0 c_k$ для некоторого $0 < \varkappa < 1/2$ и всех k;*

2) *последовательность чисел*

$$\delta_k = P(\{x: \|x_k\| + r_k < \|x\| \leqslant \|x_{k+1}\| + r_{k+1}\} \setminus B_{rk+1}(x_{k+1}))$$

монотонно убывает и $(\delta_{k-1} + \delta_k)/c_k \to 0$ $(k \to \infty)$;

3) *$c_0^2 > P(\{x\})$ для всех $x \neq 0$. Тогда закон P неразложимый.*

Замечание. Если P — одномерный закон, $\operatorname{lext} P = 0$, $\operatorname{rext} P = +\infty$, то вместо выполнения условий 1 — 3 леммы 2 достаточно потребовать, чтобы

$$1') \; c_k = P(B_{r_k}(x_k)) > 0 \text{ для всех } k,$$

$$2') \; (\delta_{k-1} + \delta_k)/c_k \to 0 \; (k \to \infty).$$

В доказательстве теоремы 3 будет использован следующий факт, доказательство которого можно найти в [9, с. 581].

Теорема Г. Полиа. *Пусть $\varphi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — неотрицательная четная ограниченная непрерывная функция, вогнутая на луче $(0, \infty)$, причем $\varphi(0) = 1$. Тогда $\varphi(t)$ является х. ф.*

Нам потребуется также

Теорема Д. А. Райкова. *Если х. ф. закона P голоморфна в полосе $\{t: a < \operatorname{Im} t < b\}$, $-\infty \leqslant a < 0 < b \leqslant \infty$, то в той же полосе голоморфна х. ф. любой его компоненты.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1, с. 77].

4° Доказательство теоремы 1. На протяжении настоящего пункта мы будем предполагать, не ограничивая этим общности, что параметр λ в определении геометрического закона равен единице, т. е. будем рассматривать закон $G_{1,\alpha} = \Sigma(1 - \alpha)\alpha^k \varepsilon_k$*

Лемма 3. *Геометрический закон $G_{1,\alpha}$ имеет своей компонентой закон $P = \Sigma c_k \varepsilon_k$, если для всех $k \geqslant 1$ выполняется условие $c_k \leqslant \alpha c_{k-1}$.*

Доказательство. Нужно показать, что возможен такой выбор неотрицательных чисел d_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, дающих в сумме 1, при котором

$$(\Sigma c_k \varepsilon_k) * (\Sigma d_k \varepsilon_k) = G_{1,\alpha}. \tag{3}$$

* В п. 4, записывая знак Σ, мы имеем в виду суммирование по индексу k от 0 до ∞.

Из (3) следует, что числа d_k должны быть определены по следующей рекуррентной формуле:

$$d_0 = c_0^{-1}(1-\alpha), \tag{4}$$

$$d_k = c_0^{-1}\left[d_{k-1}(\alpha c_0 - c_1) + \ldots + d_0(\alpha c_{k-1} - c_k)\right].$$

Из (4) в силу условия $c_k \leqslant \alpha c_{k-1}$ с помощью индукции заключаем, что $d_k \geqslant 0$ для всех k. Легко видеть, что $\Sigma d_k = 1$. В самом деле, обозначая через N множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и через Q — меру $\Sigma d_k \varepsilon_k$, мы можем написать

$$1 = G_{1,\alpha}(N) = \Sigma P(N-k)\, Q(\{k\}) = \Sigma Q(\{k\}) = \Sigma d_k.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если $0 < \beta < \alpha < 1$, p_0 — произвольное положительное число и для всех $k \geqslant 1$ выполняется*

$$0 \leqslant p_k \leqslant p_0 (\alpha - \beta)\beta^{k-1}, \tag{5}$$

то закон $(\Sigma p_k)^{-1}(\Sigma p_k \varepsilon_k)$ является компонентой закона $G_{1,\alpha}$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$b_k = (1-\beta)\beta^k \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \ (\Sigma b_k \varepsilon_k) * (\Sigma p_k' \varepsilon_k) = \Sigma c_k \varepsilon_k,$$

где $p_k' = p_k (\Sigma p_k)^{-1}$. Так как

$$c_k = \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} p_j' + b_0 p_k' \leqslant \beta c_{k-1} + b_0 p_0' (\alpha - \beta)\beta^{k-1},$$

$$c_{k-1} \geqslant b_{k-1} p_0' = b_0 p_0' \beta^{k-1},$$

то $c_k \leqslant \alpha c_{k-1}$ для всех $k \geqslant 1$, и в силу леммы 3 закон $\Sigma c_k \varepsilon_k$, а вместе с ним и закон $\Sigma p_k' \varepsilon_k$ являются компонентами $G_{1,\alpha}$. Этим следствие доказано. Используя его, а также леммы 1 и 2, уже нетрудно убедиться в справедливости теоремы 1.

Пусть задано содержащее не менее двух точек конечное множество $S \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$, $0 \in S$. Обозначив $N = \sup\{n : n \in S\}$ и взяв произвольно числа $p_0 > 0$ и $\beta\, (0 < \beta < \alpha)$, выберем числа $p_m\, (m \neq 0)$ так, чтобы удовлетворялась следующая, очевидно, непротиворечивая система условий: $p_k \neq 0 \leftrightarrow k \in S$, $0 \leqslant p_k < p_0 \times (\alpha - \beta)\beta^{k-1}$, $p_n p_m < p_0 p_N$ $(0 < n < N,\ 0 < m < N)$.

Тогда в силу леммы 1 и следствия из леммы 3 закон $P = (\Sigma p_k)^{-1}(\Sigma p_k \varepsilon_k)$ и все достаточно близкие к нему в топологии $\boldsymbol{T}$ законы (а также все законы из класса $\boldsymbol{D}_S$, достаточно близкие к P в слабой топологии) будут принадлежать множеству $\boldsymbol{N}_S(G_{1,\alpha})$.

Пусть теперь задано неограниченное множество $S \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$, $0 \in S$. Фиксируем произвольные числа $p_0 > 0$, $\beta\, (0 < \beta < \alpha)$ и последовательность точек $\{n_m\}_{m=0}^{\infty} \subset S$ такую, что $n_0 = 0$, $n_{m+1} > 2n_m + 1$. Положим $c_m = p_{n_m} = p_0(\alpha - \beta)\beta^{n_m}$ и выберем неотрицательные числа $\delta_m\, (m \geqslant 0)$ так, чтобы выполнялись условия: $\delta_m > 0$, если $S \cap \{n_m + 1, \ \ldots\ , n_{m+1} - 1\} \neq \varnothing$, $\delta_m = 0$ в противном случае; $(\delta_{m-1} + \delta_m)/c_m \to 0$ $(m \to \infty)$. Числа p_k

$(k \neq n_m)$ выберем такими, чтобы выполнялось: $p_k \neq 0 \leftrightarrow k \in S$, $0 \leqslant p_k \leqslant p_0 (\alpha - \beta) \beta^k$, $\sum\limits_{n_m < k < n_{m+1}} p_k \leqslant \delta_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда закон $(\Sigma p_k)^{-1} (\Sigma p_k \varepsilon_k)$ будет принадлежать внутренности множества $\boldsymbol{N}_S (G_{1, \alpha})$ в топологии $\boldsymbol{T}$. Теорема 1 полностью доказана.

5°. Доказательство предложения 1. Легко видеть, что $G_{\lambda, \alpha} = G_{k\lambda, \alpha^k} * G_{\lambda, \alpha, k}$. Поэтому делителем закона $G_{\lambda, \alpha}$ является всякий делитель закона $G_{k\lambda, \alpha^k}$, а таковым является в силу леммы 3 закон $(1 - p) \varepsilon_0 + p \varepsilon_{k\lambda}$ при $p/(1 - p) \leqslant \alpha^k$.

Пусть теперь, наоборот, дано, что закон $P = (1 - p) \varepsilon_0 + p \varepsilon_{k\lambda}$ является компонентой закона $G_{\lambda, \alpha}$. Так как х. ф. закона $G_{\lambda, \alpha}$, равная $\varphi(t; G_{\lambda, \alpha}) = (1 - \alpha)(1 - \exp(i t \lambda))^{-1}$, голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} t > \lambda^{-1} \ln \alpha$ и не имеет там корней, то в силу теоремы Д. А. Райкова и х. ф. $\varphi(t; P) = 1 - p + p \exp(itk\lambda)$ закона P не имеет в этой полуплоскости корней. Поэтому выполняется неравенство $p/(1 - p) \leqslant \alpha^k$.

6°. Доказательство теоремы 2 и предложения 2. Сначала мы приведем простой признак, позволяющий указывать компоненты (не обязательно неразложимые) показательного закона. Используя его, а также леммы 1 и 2, можно будет легко убедиться в справедливости теоремы 2.

Лемма 4. *Пусть F — закон, сосредоточенный на полуоси $[0, \infty)$. Если выполняются условия*

$$\int_0^\infty e^{ay} F(dy) < \infty, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant \left(2 \int_0^\infty e^{ay} F(dy)\right)^{-1}, \tag{6}$$

то закон $(1 + \delta)^{-1} (\varepsilon_0 + \delta F)$ является компонентой показательного закона H_a.

Доказательство. Положим

$$p(x) = (1 + \delta) \left\{ h_a(x) + \sum_{n=1}^\infty (-\delta)^n h_a(x) * F^{n*} \right\}, \tag{7}$$

где $h_a(x)$ — плотность показательного закона (см. формулу (1)),

$$h_a(x) * F^{n*} = \int_0^x h_a(x - y) F^{n*}(dy).$$

Покажем, что $p(x)$ есть плотность закона P, удовлетворяющего равенству $P * (\varepsilon_0 + \delta F)(1 + \delta)^{-1} = H_a$. При $x < 0$ имеем $p(x) = 0$. Так как при $x \geqslant 0$

$$|h_a(x) * F^{n*}| \leqslant a e^{-ax} \left(\int_0^\infty e^{ay} F(dy) \right)^n,$$

то в силу (6)

$$p(x) \geqslant h_a(x) - \left| \sum_{n=1}^\infty (-\delta)^n h_a(x) * F^{n*} \right| \geqslant 0$$

и

$$p(x) \in L^1(-\infty, \infty), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$$

Легко видеть, что, беря свертку закона P с законом $(1+\delta)^{-1} \times$ $\times (\varepsilon_0 + \delta F)$, мы получили показательный закон H_a. Лемма доказана.

Покажем теперь, как можно доказать теорему 2 в случае ограниченного множества S. Обозначим через $C = \sup\{x: x \in S\}$ и через F — любой закон, удовлетворяющий условиям $F(\{C\}) > 0$ и $S(F) = S$. Применяя леммы 1 и 4, видим, что при достаточно малом $\delta > 0$ закон $(1+\delta)^{-1}(\varepsilon_0 + \delta F)$ является искомым.

Случай неограниченного множества S рассматривается с помощью леммы 2. Следствие из теоремы 2 получается так. Х. ф. закона $F_{A, \alpha, \beta}$ дается равенством ([14], см. также [1, с. 73])

$$\varphi(t; F_{A, \alpha, \beta}) = A^{-it/\alpha}\Gamma\left(\frac{it+\beta}{\alpha}\right)/\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Используя представление Г-функции бесконечным произведением, получим

$$\varphi(t; F_{A, \alpha, \beta}) = \exp[-it\alpha^{-1}(\ln A + \gamma)] \times$$
$$\times \left(1 + \frac{it}{\beta}\right)^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} e^{it/(n\alpha)}\left(1 + \frac{it}{n\alpha+\beta}\right)^{-1}.$$

Так как каждая из функций $(1 + it/(n\alpha+\beta))^{-1} (n = 0, 1, \ldots)$ является х. ф. показательного закона $H_{-n\alpha+\beta}$, то, применяя теорему 2, получаем доказываемое утверждение.

Чтобы доказать достаточность в предложении 2, нужно воспользоваться предложением 1 и следующим легко проверяемым равенством: $H_a = H_{a, \lambda} * G_{\lambda, e^{-a\lambda}}$. Необходимость доказывается так же, как необходимость в предложении 1.

7°. Доказательство теоремы 3. а) Пусть Q — двусторонний показательный закон, плотность которого равна $(1/2)e^{-|x|}$, а х. ф. дается равенством $\varphi(t; Q) = (1+t^2)^{-1}$. Так как $Q =$ $= H_1 * H_1^-$, где H_1^- закон с плотностью $h_1(-x)$, то теорема 3, *а* для случая, ограниченного хотя бы с одной стороны, множества S является непосредственным следствием теоремы 2.

Если множество S неограничено с обеих сторон, то доказательство теоремы 3, *а* может быть проведено с помощью леммы 2 и следующей ниже леммы 5 аналогично тому, как было проведено доказательство теоремы 1.

Лемма 5. *Если закон F удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|y|}F(dy) < \infty,$$

а число δ таково, что

$$0 \leqslant \delta \leqslant \min\left\{\left(2\int_{-\infty}^{\infty} e^{y}F(dy)\right)^{-1},\ \left(2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}F(dy)\right)^{-1}\right\},$$

то закон $(1+\delta)^{-1}(\varepsilon_0+\delta F)$ *является компонентой двустороннего показательного закона* Q.

Доказательство леммы 5 совершенно аналогично доказательству леммы 4, и поэтому может быть опущено.

б) Пусть теперь Q — закон гиперболического косинуса с х. ф. $\varphi(t;\ Q)=(\operatorname{ch}\pi t/2)^{-1}$. Справедливость теоремы 3 в этом случае вытекает из *а* и из следующего факта.

Предложение 4. *При любом* $0 \leqslant a \leqslant 1$ *закон с х. ф.* $(1+at^2)^{-1}$ *является компонентой закона гиперболического косинуса.*

Доказательство. В силу формулы обращения для интегралов Фурье достаточно доказать, что для всех действительных x выполняется

$$I_a(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+at^2}{\operatorname{ch}(\pi t/2)}e^{-itx}dt \geqslant 0$$

и $I_a(x)\in L^1(-\infty,\ \infty)$. А это, как легко видеть, имеет место, ибо $I_a(x)$ — действительно и

$$\left|I_a(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{\operatorname{ch}(\pi t/2)}\,dt\right| =$$

$$=\left|I_a(x)-\frac{1}{\pi\operatorname{ch}x}\right|=\frac{a\,|1-\operatorname{sh}^2x|}{\pi\operatorname{ch}^3x}\leqslant\frac{a}{\pi\operatorname{ch}x}.$$

Замечание. Применение теоремы Д. А. Райкова показывает, что ни при каком $a>1$ функция $(1+at^2)(\operatorname{ch}(\pi t/2))^{-1}$ не является х. ф. Так что предложение 4 дает описание множества всех компонент закона гиперболического косинуса, принадлежащих типу двустороннего показательного закона.

в) — г). Чтобы завершить доказательство теоремы 3, достаточно заметить, что при малых $\delta>0$ функции $(1+\delta t^2)\exp\times$ $\times(-|t|^{\alpha})$, где $0<\alpha\leqslant 1$, и $(1+\delta t^2)(1+|t|)^{-\gamma}$, где $\gamma>2$, удовлетворяют условиям теоремы Г. Полиа и, значит, являются х. ф.; таким образом, всякая компонента закона P_δ с х. ф. $(1+\delta t^2)^{-1}$ (число $\delta>0$ достаточно мало) является компонентой закона с х. ф. (2), *в* и *г*.

8°. Доказательство предложения 3. а) Закон Бернулли $(1-p)\,\varepsilon_0+p\varepsilon_\sigma$ при $p/(1-p)\leqslant e^{-a\sigma}$ является искомым.

б) Возьмем произвольный закон F со спектром S, удовлетворяющий условиям леммы 2, с целой х. ф., имеющей заданный порядок ρ и величину типа σ. Такой закон можно построить, используя конструкцию, подобную приведенной в работе [12].

Тогда в силу лемм 2 и 4 при достаточно малом $\delta > 0$ закон $(1+\delta)^{-1}(\varepsilon_0 + \delta F)$ будет искомым.

в) Рассмотрим закон

$$F = C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} e^{-an!} \varepsilon_{n!},$$

где $C = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} e^{-an!} \right)^{-}$. Очевидно, он удовлетворяет условиям леммы 4; применяя ее, а также лемму 2, получим: при достаточно малом $\delta > 0$ выполняется $(1+\delta)^{-1}(\varepsilon_0 + \delta F) \in \boldsymbol{N}(H_a)$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} (n^{-2} e^{-an!})^{1/n!} = e^{-a}$, то, используя теорему Адамара о про́пусках [15, с. 253], легко получаем, что х. ф. закона $(1+\delta)^{-1}(\varepsilon_0 + \delta F)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} t > -a$ и не продолжается аналитически за ее границу.

Предложение 3 доказано.

Выражаю глубокую признательность профессору И. В. Островскому за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 478 с.
2. Krasner M., Ranulac B. Sur une propriêté des polynômes de la division du cercle.— «C. R. Acad. Sci.», 1937, t. 204, № 6, p. 397—399.
3. Lewis T. The factorisation of the rechtangular distribution. — «J. Applied. Probab.», 1967, vol. 4, p. 529—542.
4. Tortrat A. Sur une théorème de Lewis et la décomposition en facteurs premiers de la loi rechtangulaire.— «J. Applied. Probab»., 1969, Vol. 6, p. 177—185.
5. Lukacs E. On the aritmetical properties of certain entire characteristic functions.—«Proc. of 5 th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab.», 1967, vol. 2, Part 1, p. 401—414.
6. Teicher H. Sur les puissances de fonctions caractéristiques.— «C. R. Acad. Sci.», 1958, t. 246, № 5, p. 694—695.
7. Ch. Lepetit. Decomposition de distributions à support compact.— «Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb.», 1973, Bd. 26, S. 51—65.
8. Berthuet R. Factorisation des distributions de Cantor.— «Ann. Sci. Univ. Clermont Math.», 1972, № 49, fasc. 8, p. 1—9.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2, М., «Мир», 1967. 752 с.
10. Келли Дж. Общая топология. М., «Наука», 1968. 384 с.
11. Кудина Л. С. Неразложимость закона арксинуса.— ДАН СССР, 1972, т. 204, № 1, с. 25—26.
12. Кудина Л. С. Неразложимые законы с наперед заданным спектром. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 16, Харьков, 1972, с. 206—212.
13. Каган А. М., Линник Ю. В., Романовский И. В., Рухин А. Л. «Self governing» family of distributions.— «Sankhyā», Ser. A, 1971, vol. 33, № 3, p. 255—264.
14. Малошевский С. Г. Безграничная делимость одного семейства распределений.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16, Харьков, 1972, с. 212—214.

15. Титчмарш Э. Теория функций. М.— Л., ГИТТЛ, 1951. 560 с.
16. Ильинский А. И. О неразложимых компонентах некоторых безгранично делимых законов.— ДАН СССР, 1974, т. 215, № 3, с. 529—531.

Поступила 5 марта 1975 г.