УДК 517.944

В. М. БОРОК, Н. Ю. ИОХВИДОВИЧ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Настоящая работа посвящена установлению необходимых и достаточных условий единственности решения задачи Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{u}(x,\ t)}{\partial t} = Q\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{u}\,(x,\ t), \tag{1}$$

где $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $\bar{u}\,(x,\ t) = (u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — искомая вектор-функция; $P\,(w)$ и $Q\,(w)$ — матрицы размера $(n \times n)$, состоящие из дифференциальных операторов порядка $\leqslant s$ с постоянными комплексными коэффициентами, при начальном условии

$$\bar{u}\,(x,\ 0) = 0. \tag{2}$$

При этом мы будем рассматривать только решения нормального типа по t, т. е. решения системы (1), которые со всеми своими производными, входящими в систему, удовлетворяют при каком-либо $\alpha > 0$ оценке

$$\| D_x^j D_t^k \bar{u}\,(x,\ t) \| \leqslant c\,(x) \exp\{\alpha t\},\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,$$

где $c\,(x)$ — локально ограниченная функция.

Нас будет интересовать вопрос, какие оценки решения задачи (1) — (2) при $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ дают возможность заключить, что $\bar{u}\,(x,\ t) \equiv 0$.

Аналогичная задача в случае одного уравнения (произвольного порядка по t) была изучена В. М. Борок в [1], где были найдены условия единственности решения задачи Коши. Затем в [2] было получено уточнение некоторых результатов из [1].

Все рассмотрения данной работы проведены в предположении, что $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \not\equiv C$. Случай, когда $\det[\lambda P(w) - Q(w)] \equiv C$, полностью изучен и будет опубликован в дальнейшем.

1. Системы дифференциальных уравнений с комплексным параметром. Применяя к (1) — (2) преобразование Лапласа, получим систему

$$\lambda P\left(\frac{d}{dx}\right)\bar{y}(x, \lambda) = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\bar{y}(x, \lambda), \tag{3}$$

где $\bar{y}(x, \lambda) = \{y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)\}$ — преобразование Лапласа функции $\bar{u}(x, t)$, $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$.

Легко показать [3], что каждая функция $y_p(x, \lambda)$, $p = 1, \ldots, n$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\det\left[\lambda P\left(\frac{d}{dx}\right) - Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y_p(x, \lambda) \equiv \tag{4}$$

$$\equiv \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} \lambda^k P_k\left(\frac{d}{dx}\right) y_p(x, \lambda) = 0.$$

Характеристическое уравнение для (4) таково:

$$\det[\lambda P(w) - Q(w)] = 0. \tag{5}$$

Корни этого уравнения (не обязательно различные) в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид [4]

$$w_j(\lambda) = \alpha_j \lambda^{q_j}(1 + o(1)), \ \alpha_j \neq 0, \ o(1) \underset{|\lambda| \to \infty}{\to} 0 \tag{6}$$

$$\text{и } w_j(\lambda) \equiv 0, \ j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Обозначим через $z_j(x, \lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ фундаментальную систему решений уравнения (4). Тогда решение $y_p(x, \lambda)$, $p = 1, \ldots, n$ уравнения (4) имеет вид

$$y_p(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{pj}(\lambda) \cdot z_j(x, \lambda),$$

$c_{pj}(\lambda)$ — произвольные функции от λ, а решение системы (3) таково:

$$\bar{y}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{c}_j(\lambda) z_j(x, \lambda), \tag{7}$$

где $c_j(\lambda) = (c_{1j}(\lambda), \ldots, c_{nj}(\lambda))$. Отметим, что среди функций $c_{pj}(\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ есть лишь m линейно независимых, поскольку пространство решений системы (3) конечномерно и его размерность равна степени по w алгебраического уравнения (5) [5].

Лемма. *Пусть* $w(\lambda)$ — *корень характеристического уравнения* (5). *Тогда при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > a$ *и любом* $\gamma > 0$ *существует аналитическое решение системы* (3) $\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda) \exp\{w(\lambda) x\}$ *такое, что* $\|c(\lambda)\| < C|\lambda|^{-\gamma}$. Доказательство этой леммы проведено в [6].

2. Классификация систем вида (1). Обозначим

$$A = \min_{\{j: w_j(\lambda) \equiv \text{const}\}} |\operatorname{Re} w_j(\lambda)|,$$

$$a = \min_{\{j: q_j = 0\}} |\operatorname{Re} \alpha_j|, \quad |\lambda| = r.$$

Так же, как в [1], мы разобьем исследование на пять пунктов, описывающих все возможные случаи:

1) $P_N(0) = 0$; $A > 0$ или корни вида $w_j(\lambda) \equiv \text{const}$ отсутствуют;

2) $P_N(w) \not\equiv \text{const}$; $a = 0$, $A > 0$ или корни вида $w_j(\lambda) \equiv \text{const}$ отсутствуют;

3) $P_N(0) \neq 0$, $P_N(w) \not\equiv \text{const}$; $a > 0$;

4) $A = 0$;

5) $P_N(w) \equiv \text{const}$.

Используя диаграмму Ньютона, исследуем поведение корней характеристического уравнения (5) во всех указанных выше случаях.

В случае 1 из условия $P_N(0) = 0$ делаем заключение о наличии корня $w_j(\lambda)$ с $q_j < 0$.

В случае 2 для всех корней $q_j \geqslant 0$, и существует корень $w_j(\lambda) = \alpha_j + \alpha_j' \lambda^{q_j'}(1 + o(1))$, $\operatorname{Re} \alpha_j = 0$, $o(1) \to 0$, $r \to \infty$, $q_j' < 0$.

Более детально разберем случай 3. Для всех корней $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, в этом случае $q_j \geqslant 0$, и существует хотя бы один корень с $q_j = 0$, $|\operatorname{Re} \alpha_j| = a$ $(a > 0)$:

$$w_j(\lambda) = \alpha_j + \alpha_j' \lambda^{q_j'}(1 + o(1)), \quad o(1) \underset{r \to \infty}{\to} 0.$$

Обозначим $\alpha_j' \lambda^{q_j'}(1 + o(1)) = W_j(\lambda)$, т. е.

$$w_j(\lambda) = \alpha_j + W_j(\lambda). \tag{8}$$

Корень $w_j(\lambda)$ вида (8) отнесем к типу T_1, если $\operatorname{Re} \alpha_j = a$ и при достаточно большом σ_0 существуют $C_j > 0$ и $\beta_j > 0$ такие, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$

$$\operatorname{Re} W_j(\lambda) \leqslant -C_j r^{-\beta_j}, \quad \inf \beta_j = \beta_j^{(0)};$$

либо $\operatorname{Re} \alpha_j = -a$ и при достаточно большом σ_0 существуют $C_j > 0$ и $\beta_j > 0$ такие, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$

$$\operatorname{Re} W_j(\lambda) \geqslant C_j r^{-\beta_j}, \quad \inf \beta_j = \beta_j^{(0)}.$$

Корень $w_j(\lambda)$ вида (8) отнесем к типу T_2, если $W_j(\lambda) \equiv 0$. Корень $w_j(\lambda)$ вида (8) отнесем к типу T_3, если $\operatorname{Re} \alpha_j = a$ и существуют $\varkappa_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\rho_0 > 0$ такие, что при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp \times \times \{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0$, $\operatorname{Re} W_j(\lambda) > 0$; либо $\operatorname{Re} \alpha_j = -a$ и существуют $\varkappa_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\rho_0 > 0$ такие, что при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0$, $\operatorname{Re} W_j(\lambda) < 0$.

Легко показать, что каждый корень вида (8) принадлежит одному и только одному из типов T_1, T_2, T_3.

Определение. *Систему (1) в случае 3 отнесем к типу* Γ_k, $k = 1, 2, 3$, *если существует хотя бы один корень характеристического уравнения типа* T_k, *но ни один из корней не имеет типа* T_l, $1 \leqslant l < k$.

В случае *4* есть корни с $q_j < 0$, но существует корень $w_j(\lambda) = \alpha_j$, причем $\operatorname{Re} \alpha_j = 0$.

В случае *5* для всех корней уравнения (5) $q_j > 0$. Здесь мы будем различать случаи $\frac{1}{p_0} = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant m-1} q_j < 1$ и $\frac{1}{p_0} \geqslant 1$.

3. Необходимые и достаточные условия единственности. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в случаях 1 и 2 в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant C \exp\{\alpha t + |x| h(x)\}, \ \alpha > 0,$$

$k = 0, \ldots, m-1$, $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $h(x) > 0$ — *четная непрерывная функция, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_x h(x) = 0.$$

Теорема 2. *Пусть в случае 3 система (1) имеет тип* Γ_1, $h(\xi) > 0$ — *четная убывающая функция. Тогда для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant C \exp\{\alpha t + a|x| - \int_0^{|x|} h(\xi)\, d\xi\},$$

$$\alpha > 0, \ k = 0, \ldots, m-1, \ -\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(\xi)]^{1+\frac{1}{\beta}} d\xi = \infty, \ \beta = \min_{\{j : w_j(\lambda) \in T_1\}} \beta_j^{(0)}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть в случае 3 система* (1) *имеет тип* Γ_2, $h(x)$ — *четная монотонная при* $x > 0$ *функция.*

Тогда для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\| D_x^k \bar{u}(x, t) \| \leqslant h(x) \exp\{\alpha t + a|x|\},$$

$$\alpha > 0,\ k = 0,\ \ldots,\ m-1,\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\inf\limits_x h(x) = 0$.

Теорема 4. *Пусть в случае 3 система* (1) *имеет тип* Γ_3, $h(x) > 0$ *— четная непрерывная функция. Тогда для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$\| D_x^k \overline{u}(x,\ t) \| \leqslant C \exp \{\alpha t + a|x| + |x| h(x)\},$$

$$\alpha > 0,\ k = 0,\ \ldots,\ m-1,\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\inf\limits_x h(x) = 0$.

Теорема 5. *В случае 4 для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$\| D_x^k \overline{u}(x,\ t) \| \leqslant h(x) \exp \{\alpha t\},\ \alpha > 0,$$

$$k = 0,\ \ldots,\ m-1,\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,\ h(x) > 0$$

— четная монотонная при $x > 0$ *функция, необходимо и достаточно, чтобы* $\inf\limits_x h(x) = 0$.

Теорема 6. *В случае 5 при* $p_0 > 1$ *для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$\| D_x^k \overline{u}(x,\ t) \| \leqslant C \exp \{\alpha t + \int\limits_0^{|x|} h(\xi)\, d\xi\},$$

$$\alpha > 0,\ k = 0,\ \ldots,\ m-1,\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,\ h(\xi) > 0$$

— четная возрастающая при $\xi > 0$ *функция, необходимо и достаточно, чтобы* $\int\limits^{\infty} [h(\xi)]^{1-p_0} d\xi = \infty$.

Теорема 7. *Пусть в случае 5* $p_0 = 1$ *и существует корень уравнения* (5) $\omega_j(\lambda)$ *с* $q_j = 1$, *у которого* $\arg \alpha_j = k\pi$, $k = 0,1$. *Тогда в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$\| D_x^k \overline{u}(x,\ t) \| \leqslant C \exp \{\alpha t + \int\limits_0^{|x|} h(\xi)\, d\xi\},$$

$$\alpha > 0,\ k = 0,\ \ldots,\ m-1,\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,$$

решение задачи Коши (1) — (2) *есть тождественный нуль, если при каком-либо* $\varepsilon > 0$ $\int\limits^{\infty} [h(t)]^{-\varepsilon} dt = \infty$.

Теорема 8. *Пусть в случае 5 либо* $p_0 < 1$, *либо* $p_0 = 1$ *и для корней с* $q_j = 1$ $\arg \alpha_j \neq k\pi$, $k = 0,\ 1$. *Тогда задача Коши* (1) — (2) *может иметь лишь тривиальное решение.*

Доказательство теорем 1—8. Если $\overline{y}(x,\ \lambda)$ — преобразование Лапласа решения $\overline{u}(x,\ t)$ задачи (1) — (2), то требуется установить, что данные в формулировках теорем условия на функцию $h(x)$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы система (3) имела лишь тривиальное решение $y(x, \bar{\lambda}) \equiv 0$, аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ и удовлетворяющее соответствующей оценке, например, в случае теоремы 2:

$$\|\bar{y}^{(k)}(x, \lambda)\| \leqslant C \exp\{a|x| - \int_0^{|x|} h(\xi)\, d\xi\}; \qquad (10)$$

$$k = 0, \ldots, m-1, \ -\infty < x < \infty.$$

Достаточность во всех случаях доказывается аналогично [1] или [2] с использованием представления (7) для решений системы (3). Для доказательства необходимости во всех случаях строится аналитическое при достаточно больших значениях $\operatorname{Re}\lambda$ решение системы (3) в виде

$$\bar{y}(x, \lambda) = \bar{c}(\lambda) \exp\{\omega_j(\lambda) x\}. \qquad (11)$$

При этом для выбора $\bar{c}(\lambda)$ используется лемма, а корень характеристического уравнения (5) подбирается в каждом случае, исходя из классификации системы. Так, для доказательства теоремы 1 в случае *1* выбирается $\omega_j(\lambda)$ с $q_j < 0$, а в случае *2* $\omega_j(\lambda) = \alpha_j + \alpha_j' \lambda^{q_j'}(1 + o(1))$, $\operatorname{Re}\alpha_j = 0$, $\alpha_j' \neq 0$, $q_j' < 0$.

Для доказательства теоремы 2 выбирается корень уравнения (5), имеющий тип T_1 с $\beta_j^{(0)} = \beta$, для теоремы 3 и для теоремы 5 — корень, имеющий тип T_2, т. е. $\omega_j(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, $|\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)| = a$, а в случае теоремы 4 — корень $\omega_j(\lambda)$, имеющий тип T_3. Для доказательства теорем 6—8 выбирается корень $\omega_j(\lambda)$ уравнения (5) с $q_j = \frac{1}{p_0}$. Такой выбор корня $\omega_j(\lambda)$ позволяет во всех случаях получить нужные оценки $\bar{y}(x, \lambda)$.

Проведем детальное доказательство лишь одной из теорем, например, теоремы 2. В этом случае функция $\bar{c}(\lambda)$ в (11) выбирается из условия $\|\bar{c}(\lambda)\| < C$ $(\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0)$. Пусть условие (9) не выполняется:

$$\int^{\infty} [h(\xi)]^{1+\frac{1}{\beta}} d\xi < \infty. \qquad (12)$$

Оценим выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leqslant k \leqslant m-1}} \|y^{(k)}(x, \lambda)\| \exp\{-a|x| + \int_0^{|x|} h(\xi)\, d\xi\}.$$

Поскольку корень $\omega_j(\lambda)$ имеет тип T_1, то либо

$$\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) = a + \operatorname{Re} W_j(\lambda), \text{ где } \operatorname{Re} W_j(\lambda) \leqslant -C_j r^{-\beta}, \ C_j > 0,$$

либо $\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) = -a + \operatorname{Re} W_j(\lambda)$, где

$$\operatorname{Re} W_j(\lambda) \geqslant C_j r^{-\beta}, \ C_j > 0.$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant C_1 \sup_x \exp\{a|x| - C_j r^{-\beta}|x| - a|x| + \\ + \int_0^{|x|} h(\xi)\,d\xi\} = C_1 \sup_x \exp\left\{\int_0^{|x|} [h(\xi) - C_j r^{-\beta}]\,d\xi\right\}.$$

Определим функцию $g(r)$ из условия

$$h(g(r)) = C_j r^{-\beta}.$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant C_1 \exp\left\{\int_0^{g(r)} [h(\xi) - C_j r^{-\beta}]\,d\xi \leqslant \\ \leqslant C_1 \exp\left\{\int_0^{g(r)} h(\xi)\,d\xi\right\} \overset{\text{def}}{\equiv} f_1(r).$$

Отсюда, интегрируя по частям и используя (12), получим

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln|f_1(r)|}{r^2}\,dr < \infty.$$

Тогда, в силу критерия Карлемана [7], существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что $|f(\lambda) F(\lambda)| < C_2$. Отсюда следует, что

$$\| F(\lambda)\,\bar{y}^{(k)}(x, \lambda) \| < C_2 \exp\{a|x| - \int_0^{|x|} h(\xi)\,d\xi\},$$
$$k = 0, \ldots, m-1, \ -\infty < x < \infty.$$

Очевидно, что функция $\bar{z}(x, \lambda) = F(\lambda)\bar{y}(x, \lambda) \not\equiv 0$ является решением системы (3), аналитическим при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, и удовлетворяет оценке (10).

Отметим в заключение, что результаты работ [1] и [2] можно получить из итогов настоящей статьи, если записать рассматривавшиеся там уравнения в виде системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борок В. М. О задаче Коши для общих линейных уравнений. — «Докл. АН СССР», 1967, т. 177, № 4, с. 759—762.
2. Левин П. Е. К вопросу о классах единственности решения задачи Коши для общих линейных уравнений в частных производных. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 10, Харьков, 1969, с. 120—126.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 11. М., изд-во иностр. лит., 1954. 415 с.
4. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М. — Л., «Наука», 1948. 396 с.
5. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. — Л., Гостехиздат, 1939. 717 с.

6. Иохвидович Н. Ю. Классы единственности решения задачи Коши для общей системы дифференциальных уравнений в частных производных.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 25, Харьков. 1975, с. 146—157.
7. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., изд-во иностр. лит., 1957. 267 с.

Поступила 19 января 1973 г.