УДК 517.535.4

В. С. АЗАРИН. канд. физ.-мат. наук

О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ЛОГАРИФМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Введение. Пусть F_ρ — класс целых функций порядка ρ и нормального типа. Обозначим для $f \in F_\rho$

$$F(r, k, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi d\varphi, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{0.1}$$

$$F(r, k, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r\,e^{i\varphi})| \sin k\varphi d\varphi,\quad k = \overline{-\infty, -1} \qquad (0.2)$$

коэффициенты Фурье $\ln|f(r\,e^{i\varphi})|$.

Связь между асимптотическим поведением коэффициентов Фурье и асимптотическим поведением самой целой функции изучалась в работах [1—3] (см. также [4, с. 85]).

Введем характеристики роста коэффициентов при $r\to\infty$:

$$\overline{F}[k, f] = \varlimsup_{r\to\infty} F(r, k, f)\, r^{-\rho}, \qquad (0.3)$$

$$\underline{F}[k, f] = \varliminf_{r\to\infty} F(r, k, f)\, r^{-\rho}. \qquad (0.4)$$

Рассмотрим следующие свойства, которыми могут обладать функции $f\in F_\rho$:

$$(R_k)\quad \overline{F}[k, f] = \underline{F}[k, f]. \qquad (0.5)$$

Эти свойства характеризуют регулярность роста отдельных коэффициентов Фурье.

Напомним, что $f\in F_\rho$ называется функцией вполне регулярного роста, если существует равномерный по φ предел:

$$h[f, \varphi] = \lim \ln|f(r\,e^{i\varphi})|\, r^{-\rho}, \qquad (0.6)$$

когда $r\,e^{i\varphi}\to\infty$, не принимая значений из некоторого C_0-множества, т. е. множества кружков K_j на плоскости, радиусы δ_j и центры z_j которых удовлетворяют условию

$$\varlimsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{|z_j|<R} \delta_j = 0. \qquad (0.7)$$

Теорема 1. *Для того чтобы $f\in F_\rho$ была функцией вполне регулярного роста, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись свойства R_k для всех $k = \overline{-\infty, \infty}$.*

Теорема 1 показывает, что свойств R_k «достаточно много» для того, чтобы они в некотором смысле полностью определяли асимптотическое поведение целой функции. Следующая теорема показывает, что набор свойств R_k, $k = \overline{-\infty, \infty}$ «не избыточен».

Теорема 2. *Свойства R_k независимы в совокупности в классе F_ρ.*

Это означает следующее: для любого разбиения множества индексов $Z = \{0, \pm 1, \ldots\}$ на два подмножества A и $Z\setminus A$ найдется такая целая функция $f\in F_\rho$, что свойства R_k для нее выполняются при всех $k\in A$ и не выполняются при $k\in Z\setminus A$. В 1 приведены вспомогательные предложения и конструкции, которые затем используются в 2 для доказательства теоремы 1, а в 3, 4 — для доказательства теоремы 2.

1. Обозначим через $J(z, \mu, p)$ — канонический интеграл:

$$J(z, \mu, p) = \int\limits_{R^2} H\left(\frac{z}{\xi}, p\right) d\mu_\xi, \tag{1.1}$$

где $H(u, p)$ — логарифм модуля канонического множителя Вейерштрасса:

$$H(u, p) = \ln|1-u| - \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{u^k}{k}\right\}. \tag{1.2}$$

Обозначим

$$\delta(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \mu, p) = \operatorname{Re}\left\{\int\limits_{|\xi|<r} \frac{e^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}{|\xi|^p} d\mu_\xi\right\}. \tag{1.3}$$

Эти величины определены не только для неотрицательных мер, но и для любых мер, удовлетворяющих условиям: $\mu \equiv 0$ в окрестности начала координат, если интеграл $J(z, |\mu|, p)$ — сходится. Леммы 1 и 2 характеризуют рост $J(z, \mu, p)$ при медленно растущих $|\mu|(R)$.

Лемма 1. *Пусть* $\rho > 0$ — *нецелое число и*

$$|\mu|(r) = o(1)\, r^\rho. \tag{1.4}$$

Тогда

$$J(z, \mu, p) = o(r^\rho) \tag{1.5}$$

при $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \to \infty$ *вне некоторого* C_0-*множества.*

Лемма 2. *Пусть* $\rho = p$ — *целое число, выполняются условия* (1.4) *и*

$$\delta(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \mu, p) = o(1). \tag{1.6}$$

Тогда выполняется утверждение леммы 1.

Доказательство опускаем. Аналогичные утверждения для случая, когда $J = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — мероморфная функция, могут быть получены из теорем 4.2 и 4.3 в [4, с. 81, 82].

При доказательстве и формулировке дальнейших вспомогательных предложений будут использованы следующие обозначения и определения.

Пусть E — множество на положительном луче. Величина

$$\overline{\operatorname{mes}}\, E = \varlimsup_{r\to\infty} \operatorname{mes}\{E \cap (0, r)\}\, r^{-1} \tag{1.7}$$

называется верхней относительной мерой множества E. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция. Обозначим

$$h(r, u, \varphi) = u(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\, r^{-\rho}. \tag{1.8}$$

Если $f(z)$ — целая функция, а $\ln|f|$ — соответственно субгармоническая, то будем писать

$$h(r, \varphi, f) = \ln|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\, r^{-\rho}. \tag{1.9}$$

Теорема А. (В. Бернштейн [5] или [6, с. 99]). *Пусть* $f \in F_\rho$ *и* φ *фиксировано. Тогда для всех* $\varepsilon > 0$ *и* $0 < \omega < 1$ *найдутся* $\delta > 0$ *и последовательность* $R'_k \to \infty$ *такая, что неравенство*

$$h(r, \varphi, f) > h[f, \varphi] - \varepsilon \tag{1.10}$$

выполняется для всех r, *удовлетворяющих условию*

$$|r - R'_k| < R'_k \delta, \tag{1.11}$$

кроме множества $E_{k,\omega}$, *мера которого не превосходит* $\omega\delta R'_k$.

Теорема В. (Б. Я. Левин [4, с. 128]). *Пусть* $f \in F_\rho$. *Для любого* $\eta > 0$ *найдется множество* $E_\eta \subset (0, \infty)$ *такое, что*

$$\operatorname{mes} E_\eta < \eta \tag{1.12}$$

и семейство $h(r, \varphi, f)$ *равномерно непрерывно по* φ *для всех* $r \in (0, \infty) \diagdown E_\eta$.

Лемма С ([7, с. 58]). *Пусть* $f(z)$ *не является функцией вполне регулярного роста на луче* $\{\arg z = \varphi\}$. *Тогда* $\exists \eta > 0, \delta > 0$ *и такая последовательность* $R_k \to \infty$, *что неравенство*

$$h(r, \varphi, f) < h[\varphi, f] - \eta \tag{1.13}$$

выполняется при всех r, *удовлетворяющих условию*

$$|r - R_k| < \delta R_k. \tag{1.14}$$

Лемма 3. *Если* $f(z)$ *не является функцией вполне регулярного роста на луче* $\{\arg z = \varphi\}$, *то* $\exists \varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ *и такие последовательности* $r_k \to \infty$, $r'_k \to \infty$, *что*

$$h(r_k, \varphi, f) < h[\varphi, f] - \lambda \tag{1.15}$$

для $\varphi \in (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$;

$$h(r'_k, \varphi, f) > h[\varphi, f] - \frac{\lambda}{2} \tag{1.16}$$

для $\varphi \in (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$.

Доказательство. Найдем $\eta = \frac{5}{4}\lambda$, $\delta > 0$ и R'_k по лемме C. Тогда в интервале вида (1.14) выполняется неравенство

$$h(r, \varphi_0, f) < h[\varphi_0, f] - \frac{5}{4}\lambda. \tag{1.17}$$

Полагаем в теореме А $\varepsilon = \frac{\lambda}{4}$, $\omega = \frac{1}{4}$. Тогда $\exists \delta' > 0$ такое, что неравенство

$$h(r, \varphi_0, f) > h[\varphi_0, f] - \frac{\lambda}{4} \tag{1.18}$$

выполняется на интервале вида (1.11) вне множества E_k, ω, причем

$$\operatorname{mes} E_{k,\omega} < \frac{\delta' R'_k}{4}. \tag{1.19}$$

Полагаем в теореме В $\eta = \frac{\delta}{2}$ и найдем ε так, чтобы в интервале $\varphi \in (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$ выполнялись неравенства

$$|h(r, \varphi, f) - h(r, \varphi_0, f)| < \frac{\lambda}{8}; \ |h[\varphi, f] - h[\varphi_0, f]| < \frac{\lambda}{8} \quad (1.20)$$

для $r \notin E_\eta$.

Тогда в каждом интервале вида (1.11) найдется точка такая, что выполняются неравенства (1.18) и (1.20), т. е. выполняется (1.16). В каждом интервале вида (1.14) найдется точка r_k, где выполняются неравенства (1.17) и (1.20), т. е. (1.15), что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция конечного порядка ρ и нормального типа. Тогда*

$$r^{-\rho-1} \int_{C_{0r}} |u(re^{i\varphi})| \, ds = o(1) \quad (r \to \infty),$$

где C_{0r} — пересечение C_0-множества с окружностью

$$C_r = \{z : |z| = r\}.$$

Доказательство опускаем. Если $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, утверждение леммы легко следует из одной теоремы в [4, теорема 7.3, с. 58].

Лемма 5. *Пусть $u(re^{i\varphi})$ — субгармоническая функция, а $v(re^{i\varphi})r^{-\rho}$ — ограниченная функция при всех r и φ. Пусть*

$$[u(re^{i\varphi}) - v(re^{i\varphi})]\, r^{-\rho} = o(1) \quad (1.21)$$

при $re^{i\varphi} \to \infty$ вне некоторого C_0-множества. Тогда для любой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции $F(\varphi)$ верно соотношение

$$r^{-\rho} \int_\alpha^\beta F(\varphi)\, [u(re^{i\varphi}) - v(re^{i\varphi})] \, d\varphi = o(1) \quad (r \to \infty).$$

Доказательство. Обозначим

$$u_1(re^{i\varphi}) = [u(re^{i\varphi}) - v(re^{i\varphi})]\, F(\varphi). \quad (1.22)$$

Пусть C_{0r} — пересечение C_0 с дугой окружности

$$C_{\alpha, \beta, r} = \{z : |z| = r, \ \arg z \in [\alpha, \beta]\}.$$

Тогда имеем по условию

$$r^{-\rho-1} \int_{C_{\alpha, \beta, r} \setminus C_{0r}} u_1 \, ds = o(1). \quad (1.23)$$

Из ограниченности $F(\varphi)$ и $v(re^{i\varphi})r^{-\rho}$ получаем

$$r^{-\rho-1} \int_{C_{0r}} |F(\varphi)\, v(re^{i\varphi})| \, ds = o(1). \quad (1.24)$$

Из леммы 4 имеем

$$r^{-\rho-1} \int\limits_{C_{0r}} |F(\varphi)\, u(r\,e^{i\varphi})|\, ds = o(1). \tag{1.25}$$

Из соотношений (1.22), (1.23), (1.24), (1.25) следует

$$r^{-\rho} \int\limits_{\alpha}^{\beta} u_1(r\,e^{i\varphi})\, d\varphi = r^{-\rho-1} \int\limits_{C_{\alpha,\beta,r}} u_1(r\,e^{i\varphi})\, ds = o(1),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 6. *Для того чтобы $f(z)$ была вполне регулярного роста, необходимо, чтобы для любой непрерывной функции $F(\varphi)$ существовал предел*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \int\limits_{0}^{2\pi} F(\varphi) \ln|f(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} F(\varphi)\, h[\varphi, f]\, d\varphi.$$

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 5.

Лемма 7. (А. А. Гольдберг). *Для того чтобы $f(z)$ была вполне регулярного роста, необходимо и достаточно, чтобы для любых α, β $(0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant 2\pi)$ существовал предел*

$$S[\alpha, \beta] = \lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \ln|f(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi. \tag{1.26}$$

Достаточность. Допустим, что на луче $\{\arg z = \varphi_0\}$ $f(z)$ не является функцией вполне регулярного роста. Выберем по лемме 3 $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} \int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \ln|f(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi \geqslant \int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \left[h[\varphi, f] - \frac{\lambda}{2}\right] d\varphi >$$

$$> \int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} [h[\varphi, f] - \lambda]\, d\varphi \geqslant \underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} \int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \ln|f(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi, \tag{1.27}$$

т. е. предел (1.26) не существует при $\alpha = \varphi_0 - \varepsilon$, $\beta = \varphi_0 + \varepsilon$.

Необходимость. Непосредственно следует из леммы 5, в которой

$$u(z) = \ln|f(z)|,\ v(z) = h[\varphi, f]\, r^{\rho},\ F(\varphi) \equiv 1.$$

Следующие две леммы образуют ядро конструкции, применяющейся при доказательстве теоремы 2. Пусть α_k — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\alpha_{k+1}/\alpha_k \geqslant 8$. Выберем в каждом интервале α_k, α_{k+1} подинтервал (x_k, x_k') так, чтобы выполнялись условия

$$x_k = 2\alpha_k - x_{k-1}',\quad x_k' = 2x_k.$$

Полагаем для

$$x \in \left(\frac{x'_{i-1}+x_{i-1}}{2};\ \frac{x'_i+x_i}{2}\right]$$

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(\dfrac{x'_{i-1}+x_{i-1}}{2};\ x'_{i-1}\right]; \\ 1, & x \in \left(x_i;\ \dfrac{x_i+x'_i}{2}\right]; \\ \varepsilon_i (x-x'_{i-1})^2, & x \in (x'_{i-1};\ \alpha_i]; \\ 1-\varepsilon_i (x_i-x)^2, & x \in (\alpha_i;\ x_i], \end{cases}$$

где

$$\varepsilon_i = 2/(x_i - x'_{i-1})^2$$

Иначе говоря, на первом и втором из перечисленных интервалов функция равна соответственно 0 и 1, а на остальных осуществляется достаточно плавный переход от нуля к единице. Полагаем

$$\lambda(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \in \left[\dfrac{x'_{i-1}+x_{i-1}}{2};\ \dfrac{x'_i+x_i}{2}\right],\ i=2k, \\ 1-\nu(x), & x \in \left[\dfrac{x'_{i-1}+x_{i-1}}{2};\ \dfrac{x'_i+x_i}{2}\right],\ i=2k+1. \\ & k=0,\ 1\ \ldots \end{cases}$$

Лемма 8. *Функция $\lambda(x)$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$; 2) $\left|\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{5}{x_k^2}, \left|\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2}{x_k}$. Утверждение непосредственно следует из определения $\lambda(x)$.

Лемма 9. *Пусть $A \subset Z = \{0,\ \pm 1,\ \ldots\}$* и ρ — *нецелое число. Тогда существуют две гладкие ρ-тригонометрические выпуклые функции $h_1(\varphi)$, $h_2(\varphi)$ такие, что их коэффициенты Фурье удовлетворяют условиям*

$$F[k,\ h_2] = F[k,\ h_2],\ k \in A;\ F[k,\ h_1] \neq F[k,\ h_2],\quad k \in Z \setminus A. \tag{1.28}$$

Доказательство. Пусть ρ — нецелое число. Обозначим периодическое продолжение функции $\cos\rho\varphi$, $\varphi \in (-\pi,\ \pi)$ через $\widetilde{\cos}\,\rho\varphi$. Тогда для любой $\rho =$ т. в. ф. верно представление [6, с. 84]

$$h(\varphi) = C(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\cos}\,\rho(\varphi-\psi)\, d\Delta(\psi), \tag{1.29}$$

где $\Delta(\psi)$ — неотрицательная мера на окружности; $C(\rho)$ — постоянная.

Пусть $\Delta'(\psi)$ — произвольная функция на окружности (т. е. периодическая с периодом 2π,) удовлетворяющая условию

$$F[k, \Delta'] = 0, \ k \in A; \ F[k, \Delta'] \neq 0, \ k \in Z \setminus A.$$

Ее можно представить в виде

$$\Delta' = \Delta_1' - \Delta_2',$$

где Δ_1', Δ_2' — неотрицательные функции. Тогда имеем

$$F[k, \Delta_1'] = F[k, \Delta_2'], \ k \in A; \ F[k, \Delta_1'] \neq F[k, \Delta_2'], \ k \in Z \setminus A. \quad (1.30)$$

Пусть Δ_1 — мера на окружности, порожденная функцией Δ_i'. Обозначим $h_i(\varphi)$ -ρ-т. в. ф., полученные из Δ_i по формуле (1.29). Переходя к коэффициентам Фурье в соотношении (1.29), получаем

$$F[k, h_i] = \frac{(-1)^k \rho \sin \pi\rho}{\pi(\rho^2 - k^2)} F[k, \Delta_i] C(\rho). \quad (1.31)$$

Поэтому из (1.30) следует (1.28).

Лемма 9'. *Пусть $\rho = p$ — целое число. Пусть $Z' = Z \setminus \{p, -p\}$. Существуют две гладкие ρ-т. в. функции h_1, h_2, удовлетворяющие условиям*

$$F[k, h_1] = F[k, h_2], \ k \in A \cap Z';$$

$$F[k, h_1] \neq F[k, h_2], \ k \in Z' \setminus A; \quad (1.32)$$

$$F[\pm p, h_1] = F[\pm p, h_2] = 0. \quad (1.33)$$

Доказательство. Найдем функцию $f(\varphi)$ так, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли условиям (1.32), и представим ее в виде разности неотрицательных функций f_1 и f_2. Рассмотрим функции

$$\tilde{f}_i(\varphi) = f_i(\varphi) - a_i \cos p\varphi - b_i \sin p\varphi + C, \ i = 1, 2$$

и подберем коэффициенты a_i, b_i так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} e^{i p\varphi} \tilde{f}_i(\varphi) \, d\varphi = 0, \ i = 1, 2, \quad (1.34)$$

а коэффициент C так, чтобы

$$\tilde{f}_i(\varphi) > 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.35)$$

Очевидно, это возможно, так как постоянная C не нарушает условия (1.34).

Обозначим через Δ_1, Δ_2 меры на окружности, соответствующие функциям $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$. Их коэффициенты Фурье удовлетворяют условиям (1.32) и (1.33). Рассмотрим ρ-т. в функции

$$h_i(\varphi) = \int_0^{2\pi} \widetilde{(\varphi - \psi) \sin \rho (\varphi - \psi)} \, d\Delta_i,$$

где $\widetilde{\psi \sin \rho\psi}$ — периодическое продолжение функции $\psi \sin \rho\psi$, $\psi \in (0, 2\pi)$. Коэффициенты Фурье $h_i(\varphi)$ удовлетворяют условиям (1.32), (1.33).

2. Доказательство теоремы 1. Первоначальное доказательство теоремы 1 было основано на общей теории характеристик роста субгармонических функций, изложенной в [8] и [9]. Здесь мы приводим прямое доказательство теоремы, идея которого принадлежит А. А. Гольдбергу.

Достаточность. Пусть

$$\ln |f(re^{i\varphi})| \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k, r, f)\, e^{ik\varphi}, \tag{2.1}$$

где

$$C(k, r, f) = F[k, r, f] - iF(-k, r, f) \tag{2.2}$$

— формальный ряд Фурье для $\ln |f(re^{i\varphi})|$.

Пусть $q\ (q > \rho)$ — целое число. Тогда выполняется неравенство [4, с. 87]

$$|C(k, r, f)| \leqslant \frac{r^k}{2} \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{k+1}}\, dt \tag{2.3}$$

при $k \geqslant q+1$, где $n(t)$ число нулей $f(z)$ в круге $\{|z| < t\}$. Из нормальности типа $f(z)$ следует, что

$$n(t) \leqslant At^{\rho}, \tag{2.4}$$

поэтому (см. [3; 4, с. 87])

$$|C(k, r, f)| \leqslant \frac{A}{2(k-q)} r^{\rho}. \tag{2.5}$$

Как известно, [10, с. 74, теорема 2.5]

$$\int^{\varphi} \ln |f(re^{i\psi})|\, d\psi - C(0, r, f)\,\varphi \sim C + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{C(k, r, f)}{ik} e^{ik\varphi} \tag{2.6}$$

(штрих означает, что опущен член при $k = 0$). Из неравенств (2.3) следует, что ряд (2.6) сходится равномерно и, значит,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C(k, r, f)}{ik} [e^{i\beta k} - e^{i\alpha k}] + C(0, r, f)(\beta - \alpha).$$

Разделим обе части равенства (2.7) на r^{ρ} и перейдем к пределу при $r \to \infty$.

Так как полученный ряд сходится равномерно по r, как это следует из (2.5), то можно переходить к пределу почленно. Из условий теоремы следует, что существует

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho} C(k, r, f)\ \forall k.$$

Поэтому существует и

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \int_{\alpha}^{\beta} \ln|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

для любых α, β. По лемме 7 отсюда следует, что $f(z)$ вполне регулярного роста. Необходимость непосредственно следует из леммы 6. Из теоремы 1 следует, что в лемме 6 «необходимо» можно заменить на «необходимо и достаточно».

3. Доказательство теоремы 2. При доказательстве теоремы 2 будет использована следующая теорема об асимптотической аппроксимации субгармонических функций целыми.

Теорема D [11, с. 464). *Для любой субгармонической в плоскости функции $u(z)$ конечного порядка ρ найдется целая функция $f(z)$ такая, что соотношение $u(z) - \ln|f(z)| = o(|z|^{\rho})$ выполняется при $z\to\infty$ и не принадлежащих некоторому C_0-множеству.*

Сначала мы построим субгармоническую функцию $u(z)$, удовлетворяющую утверждениям теоремы 2, т. е. такую, что

$$\overline{F}[k, u] = \underline{F}[k, u], \quad k\in A, \tag{3.1}$$

$$\overline{F}[k, u] \neq \underline{F}[k, u], \quad k\in Z\setminus A. \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) по теореме D и лемме 5 непосредственно следует утверждение теоремы 2. Рассмотрим случай нецелого $\rho > 0$. Пусть

$$\eta(r) = \lambda(\ln r), \tag{3.3}$$

где $\lambda(x)$ — из леммы 8. Рассмотрим функцию

$$v(re^{i\varphi}) = \eta(r)\, h_1(\varphi)\, r^{\rho} + (1-\eta(r))\, h_2(\varphi)\, r^{\rho}, \tag{3.4}$$

где h_1 и h_2 из леммы 9.

Вычисляя оператор Лапласа от нее, получаем

$$\Delta v = \eta(r)\,\Delta\{h_1 r^{\rho}\} + [1-\eta(r)]\,\Delta\{h_2 r^{\rho}\} + $$
$$+ (h_1 - h_2)\, r^{\rho-2}\left[\frac{\partial^2}{(\partial \ln r)^2}\eta(r) + 2\rho\,\frac{\partial}{\partial(\ln r)}\eta(r)\right]. \tag{3.5}$$

Оценим слагаемое в квадратных скобках. По определению $\eta(r)$ имеем

$$|[\ldots]| \leqslant \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\lambda(x)\right| + 2\rho\left|\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right| \leqslant \frac{4\rho+5}{x_k} \tag{3.6}$$

для

$$x = \ln r \in (x'_{k-1},\ \alpha_{k+1}).$$

Обозначим

$$p(r,\varphi) = (h_1 - h_2)\, r^{\rho-2}\left[\frac{\partial^2}{(\partial \ln r)^2}\eta + 2\rho\,\frac{\partial}{\partial \ln r}\eta\right];$$

$$p^{+}(r,\varphi) = \max(p,\ 0); \quad p^{-}(r,\varphi) = \max(-p,\ 0). \tag{3.7}$$

Тогда

$$|p(r, \varphi)| = p^{+}(r, \varphi) + p^{-}(r, \varphi).$$

Пусть μ^{+}, μ^{-} распределения масс с плотностями p^{+} и p^{-}. Оценим

$$|\mu|(R) = \mu^{+}(R) + \mu^{-}(R)$$

— массу круга $\{|z| < R\}$. Имеем для $\ln R \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$

$$|\mu|(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R |p(r, \varphi)|\, r dr =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{e^{x_{k-1}}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{e^{x_{k-1}}}^{R}\right\} |p(r, \varphi)|\, r dr.$$

Используя неравенство (3.6), получаем

$$|\mu(R)| \leqslant C\left(e^{x_{k-1}} + \frac{R^{\rho}}{x_k}\right) = o(R^{\rho}) \tag{3.8}$$

при $R \to \infty$, т. е. распределение масс имеет нулевую плотность. Обозначим теперь через $J(z, \mu^{+})$ и $J(z, \mu^{-})$ канонические интегралы, соответствующие распределениям μ^{+} и μ^{-}, а

$$J(z, \mu) = J(z, \mu^{+}) - J(z, \mu^{-}).$$

Рассмотрим функцию

$$u(z) = v(z) - J(z, \mu). \tag{3.9}$$

Из соотношения (3.9) следует, что ее лапласиан удовлетворяет соотношению

$$\Delta u = \Delta v - \Delta J = \eta(r)\,\Delta\{h_1 r^{\rho}\} + [1 - \eta(r)]\,\Delta\{h_2 r^{\rho}\} \geqslant 0,$$

т. е. $u(z)$ — субгармоническая функция.

Из леммы 1 следует, что

$$u(re^{i\varphi}) = v(re^{i\varphi}) + o(r^{\rho}) \tag{3.10}$$

при $re^{i\varphi} \to \infty$ вне C_0-множества. Тогда по лемме 5 получаем

$$r^{-\rho}F(k, r, u) = r^{-\rho}F(k, r, v) + o(1). \tag{3.11}$$

Непосредственное вычисление дает

$$r^{-\rho}F(k, r, v) = \eta(r)\,F[k, h_1] + (1 - \eta(r))\,F[k, h_2]. \tag{3.12}$$

Пусть теперь $k \in A$. Тогда по определению v

$$F[k, h_1] = F[k, h_2].$$

Следовательно, $r^{-\rho}F(k, r, v)$ не зависит от r и, значит, из (3.12) следуют соотношения (3.1).

Пусть $k \in Z \setminus A$. Тогда по условию

$$F[k, h_1] \neq F[k, h_2]. \tag{3.13}$$

Найдется последовательность $r_n' \to \infty$ такая, что $\eta(r_n') = 0$ и, значит,

$$\lim_{r_n' \to \infty} (r_n')^{-\rho} F(k, r_n', u) = F[k, h_2].$$

Найдется последовательность $r_n'' \to \infty$, для которой $\eta(r_n'') = 1$ и, значит,

$$\lim_{r_n'' \to \infty} (r_n'')^{-\rho} F(k, r_n'', u) = F[k, h_1].$$

Из (3.13) следуют тогда соотношения (3.2). Теорема 2 доказана для ρ нецелого.

4. В этом параграфе мы кратко рассмотрим случай целого $\rho = p$, который имеет некоторые особенности. Пусть сначала

$$\{p, -p\} \subset A. \tag{4.1}$$

Возьмем ρ-тригонометрически выпуклые функции h_1 и h_2, построенные в лемме 9′, и рассмотрим, как и в случае нецелого ρ, функцию $v(r e^{i\varphi})$, определенную формулой (3.4). Ее лапласиан представим в виде (3.5). Из соотношений (1.33) леммы 9′ следует, что мера, порожденная вторым слагаемым в (3.5)

$$d\mu = (h_1 - h_2) r^{\rho-2} \left[\frac{\partial^2}{(\partial \ln r)^2} \eta(r) + 2\rho \frac{\partial}{\partial \ln r} \eta(r)\right] \frac{r dr d\varphi}{2\pi}, \tag{4.2}$$

удовлетворяет условиям леммы 2, и поэтому соответствующий канонический интеграл $J(z, \mu, p)$ есть $o(r^p)$. Все дальнейшие рассуждения дословно переносятся на этот случай. Таким образом, при условии (4.1) теорема 2 также доказана. Пусть теперь условие (4.1) не выполняется, например,

$$\{p, -p\} \subset Z \setminus A. \tag{4.3}$$

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма Е. *Обозначим для заданных монотонных функций μ_1 и μ_2, совпадающих в окрестности нуля:*

$$Y(\mu_1, \mu_2, r) = \int_0^r \frac{d\mu_1}{t^p} - \int_0^r \frac{d\mu_2}{t^p}.$$

Пусть $\eta(r) = \lambda(\ln r)$, где λ — из леммы 8. Для любых вещественных чисел a_1, b_1, a_2, b_2 существуют такие две пары монотонных функций μ_{1a}, μ_{1b}, μ_{2a}, μ_{2b}, что выполняются следующие условия:

1) *все эти функции $o(t^p)$, а их производные $o(t^{p-1})$;*

2) *точка в четырехмерном пространстве*

$$D(r) = \{Y(\mu_{1a}, \mu_{2a}, r);\ Y(\mu_{1b}, \mu_{2b}, r);\ \eta(r);\ 1 - \eta(r)\}$$

для всех r, начиная с некоторого, лежит в окрестности отрезка, соединяющего точки $(a_1, b_1, 1, 0)$ и $(a_2, b_2, 0, 1)$;

3) *когда* $r \to \infty$ *так, что* $\ln r \in (x_{2k+1}, x'_{2k+1})$, $k = \overline{0, \infty}$, *то* $\lim D(r) = (a_1, b_1, 1, 0)$; *когда* $r \to \infty$ *так, что* $\ln r \in (x_{2k}, x'_{2k})$, $k = \overline{0, \infty}$, *то* $\lim D(r) = (a_2, b_2, 0, 1)$.

Рассмотрим лучи

$$\arg z = 0;\ \arg z = \frac{\pi}{\rho};\ \arg z = \frac{\pi}{2\rho};\ \arg z = \frac{3\pi}{2\rho}$$

и распределим на них массы с помощью функций соответственно μ_{1a}, μ_{2a}, μ_{1b}, μ_{2b}, полученных по лемме E. Это распределение масс обозначим $\nu_{\text{доп}}$.

Используя свойство 1 функций $\mu_{1a} \ldots$ и определение $\nu_{\text{доп}}$, можно показать, что

$$J(z, \nu_{\text{доп}}) = \delta(r e^{i\varphi}, \nu_{\text{доп}}, p) + o(r^\rho), \tag{4.4}$$

где $\delta(\ldots)$ определено соотношением (1.3). Вычисляя $\delta(r e^{i\varphi}, \nu_{\text{доп}}, p)$, получаем $(p = \rho)$

$$\delta(r e^{i\varphi}, \nu_{\text{доп}}, \rho) = V(\mu_{1a}, \mu_{2a}, r)\cos\rho\varphi + V(\mu_{1b}, \mu_{2b}, r)\sin\rho\varphi. \tag{4.5}$$

Пусть теперь $\{-p, p\} \in Z \diagdown A$. Возьмем h_1 и h_2 из леммы 9' и зададим функцию $v(r e^{i\varphi})$ соотношением (3.4). Сумма

$$u(r e^{i\varphi}) = v(r e^{i\varphi}) + \delta(r e^{i\varphi}, \nu_{\text{доп}}, \rho) r^\rho$$

отличается от субгармонической функции на $o(r^\rho)$, как это следует из (4.4) и предыдущего замечания относительно v в случае (4.1). Выберем $a_1, b_1 \neq 0$; $a_2, b_2 = 0$ и вычислим коэффициенты Фурье $u(r e^{i\varphi})$. Непосредственная проверка, подобная проведенной в 3, показывает, что для $u(r e^{i\varphi})$ выполняются соотношения (3.1), (3.2). Таким образом, теорема доказана и для случая целого $\rho = p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rubel L. A. Fourier series method for entire functions.— «Duke math. J.», 1963, vol. 30, p. 437—442.
2. Ахіезер Н. І. Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядка до певного типу.— «Зап. фіз.-мат. від. АН УРСР», 1927, т. 2, № 3, с. 29—33.
3. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorfic and entier functions.— «Bull. Soc. math. France», 1968, vol. 96, № 1, p. 53—96.
4. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., ФМЛ, 1970. 591 с.
5. Bernstein V. Sopra una proposizione relativa alla crescenza delle funzioni holomorfe.— «Ann. scuola norm. sup. Pisa (2)», 1933, № 2, p. 381—399.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., «Наука», 1956. 632 с.
7. Азарин В. С. Об одном характеристическом свойстве функций вполне регулярного роста внутри угла.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 2. Харьков, 1966, с. 55—66.

8. Азарин В. С. О регулярности роста функционалов на целых функциях.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16. Харьков, 1972, с. 109—137.
9. Азарин В. С. Об экстремальных задачах на целых функциях.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 18. Харьков, 1973, с. 17—50.
10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М., «Мир», 1965. 50 с.
11. Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции.— «Мат. сб.», 1969, т. 79 (124), с. 465—476.

Поступила 12 декабря 1974 г.