УДК 519.46

*Д. Н. АХИЕЗЕР*

# НЕПРИВОДИМЫЕ СИСТЕМЫ КОРНЕЙ И НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Введение. В работе [1] М. Я. Блинкин доказал, что многообразие флагов простой комплексной группы Ли $G$ нельзя разложить в произведение многообразий меньшей размерности. Было бы интересно доказать этот факт для более широкого класса компактных однородных пространств. Автор настоящей статьи заметил, что метод М. Я. Блинкина можно применить для доказательства неразложимости многообразий вида $M = G/P$, где $P$ — параболическая подгруппа группы $G$. При этом возникают некоторые трудности. Однако с помощью формулы А. Бореля — Ф. Хирцебруха [2] они сводятся к одному вопросу о системах корней. Ответ на этот вопрос дается следствием 2 п. 3 и может представить самостоятельный интерес. В п. 2 собраны определения и некоторые известные факты о системах корней. Их подробное изложение имеется в лекциях Ж.-П. Серра [3] и в книге Н. Бурбаки [4]. В п. 4 доказывается основная теорема.

**2. Системы корней (определения и известные факты).** Пусть $V$ — евклидово пространство, $R \subset V$ — его конечное подмножество. Оно называется системой корней в $V$, если выполнены следующие условия:

1) $R$ порождает $V$ и не содержит нулевого вектора;

2) для каждого $\alpha \in R$ отражение $s_\alpha$ в гиперплоскости, ортогональной $\alpha$, переводит $R$ в себя;

3) для любых $\alpha, \beta \in R$ число $n(\beta, \alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ — целое.

Так как $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$, условие *3* означает, что вектор $s_\alpha(\beta) - \beta$ отличается от $\alpha$ на целочисленный множитель. Элементы $R$ называются корнями, а размерность $V$ — рангом системы корней. Из *2* следует, что $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$. Система $R$ называется приведенной, если выполнено условие:

4) $\alpha \in R$, $c\alpha \in R$ ($c$ — действительное число) $\Rightarrow c = \pm 1$. Дальше мы будем рассматривать только приведенные системы. Система $R$

называется неприводимой, если $R$ нельзя разбить на два непустых подмножества так, что каждый элемент первого подмножества ортогонален каждому элементу второго.

Из условия *3* следует, что при $\alpha, \beta \in R$, $4\cos^2(\widehat{\alpha, \beta}) = n(\alpha, \beta) \times \times n(\beta, \alpha)$ — целое число. Оно может быть равно 0, 1, 2, 3, 4. Отсюда легко вывести, что угол $(\widehat{\alpha, \beta})$ и число $n(\beta, \alpha)$ могут принимать лишь конечное число значений. Число $n(\beta, \alpha)$ может быть равно 0, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$.

Базисом системы корней $R$ называется такое подмножество $S \subset R$, что а) $S$ — базис $V$; б) все корни $\beta \in R$ записываются в виде $\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha$, где $m_\alpha$ — целые числа одного знака (либо все $m_\alpha \geqslant 0$, либо все $m_\alpha \leqslant 0$). Можно доказать, что базисы существуют.

Зафиксируем какой-нибудь базис $S$. Введем частичное упорядочение в пространстве $V$: вектор $v_1 \in V$ больше вектора $v_2 \in V$ $(v_1 > v_2)$, если $v_1 - v_2 = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha \alpha$, где $c_\alpha \geqslant 0$ и хотя бы одно $c_\alpha \neq 0$. В частности, получаем частичное упорядочение системы корней. Кроме того, положим $R^+ = \{\beta \in R \mid \beta > 0\}$. Элементы $R^+$ назовем положительными корнями. Корень $\beta$ назовем максимальным, если не существует $\beta' \in R$ такой, что $\beta' > \beta$. Максимальный корень, очевидно, существует. Доказывается, что в неприводимой системе корней он ровно один. Заметим, что в этом случае все элементы базиса входят в максимальный корень с ненулевыми коэффициентами. В самом деле, иначе мы бы имели: $S = S' \cup S''$, $S' \cap S'' = \varnothing$, и максимальный корень равен $\beta = \sum_{\alpha \in S'} c_\alpha \alpha$, где $c_\alpha > 0$. Требование *б* в определении базиса $S$ показывает, что $(\alpha', \alpha'') \leqslant 0$ при $\alpha'$, $\alpha'' \in S$. В силу неприводимости существуют $\alpha' \in S'$, $\alpha'' \in S''$ такие, что $(\alpha', \alpha'') < 0$. Тогда $(\beta, \alpha'') < 0$, откуда $s_{\alpha''}(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha'')\alpha'' > \beta$, что невозможно.

**3. Системы корней (продолжение). Предложение 1.** *Пусть* $\alpha, \beta \in R^+$, *причем* $\beta = \alpha + k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m$, *где* $k_i > 0$, $\alpha_i \in S$. *Тогда существуют* $\beta_j \in R^+ \left(0 \leqslant j \leqslant N = \sum_{i=1}^{m} k_i\right)$ *такие, что* $\beta_0 = \alpha$, $\beta_N = \beta$, $\beta_{j+1} = \beta_j + \alpha_{i(j)}$ $(1 \leqslant i(j) \leqslant m)$.

Доказательство. Проведем индукцию по $N$. Пусть $N > 0$. Так как $\beta - \alpha = \sum k_i \alpha_i$, то существует $\alpha_i$ такой, что $(\beta - \alpha, \alpha_i) > 0$. В противном случае мы имели бы $(\beta - \alpha, \beta - \alpha) = \sum k_i(\beta - \alpha, \alpha_i) \leqslant 0$, откуда $\beta = \alpha$, что мы исключили. Для найденного $\alpha_i$ либо $(\beta, \alpha_i) > 0$, либо $(\alpha, \alpha_i) < 0$. Рассмотрим первую возможность. Оба числа $n(\beta, \alpha_i)$ и $n(\alpha_i, \beta)$ положительны. Если $n(\beta, \alpha_i) = 1$, то $\beta - \alpha_i = \beta - n(\beta, \alpha_i)\alpha_i = s_{\alpha_i}(\beta) \in R$. Если $n(\alpha_i, \beta) = 1$, то $\beta - \alpha_i = -(\alpha_i - \beta) = -(\alpha_i - n(\alpha_i, \beta)\beta) = -s_\beta(\alpha_i) \in R$. Если же $n(\beta, \alpha_i) > 1$ и $n(\alpha_i, \beta) > 1$, то оба эти числа равны 2, откуда $\beta$ коллинеарен

$\alpha_i$, что невозможно. Итак, при $(\beta, \alpha_i) > 0$ мы доказали, что $\beta - \alpha_i \in R$ и, значит, $\beta - \alpha_i \in R^+$. Аналогично, в случае $(\alpha, \alpha_i) < 0$ доказывается, что $\alpha + \alpha_i \in R^+$. В первом случае напишем $\beta - \alpha_i = \alpha + k_1\alpha_1 + \ldots + (k_i - 1)\alpha_i + \ldots + k_m\alpha_m$ и применим предположение индукции к паре $\alpha$, $\beta - \alpha_i$. Во втором случае напишем $\beta = (\alpha + \alpha_i) + k_1\alpha_1 + \ldots + (k_i - 1)\alpha_i + \ldots + k_m\alpha_m$ и применим предположение индукции к паре $\alpha + \alpha_i$, $\beta$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть корень $\alpha \in R^+$ не максимален. Тогда существует $\gamma \in S$ такой, что $\alpha + \gamma \in R$.*

Доказательство. Возьмем $\beta \in R$, $\beta > \alpha$. Тогда $\beta - \alpha = \sum k_i\alpha_i$, где $k_i > 0$, $\alpha_i \in S$. Остается применить предложение 1 и положить $\gamma = \alpha_{i(0)}$.

**Предложение 2.** *Пусть $\alpha \in R^+$. Либо корень $\alpha$ максимален, либо существует $\beta \in R$, $\beta > \alpha$, такой что $(\alpha, \beta) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ не максимален. Найдем $\gamma \in S$ так, чтобы $\alpha + \gamma \in R$. Если $(\alpha + \gamma, \alpha) \neq 0$, то полагаем $\beta = \alpha + \gamma$, и доказательство закончено.

Пусть теперь $(\alpha + \gamma, \alpha) = 0$. Тогда $(\alpha, \gamma) = -(\alpha, \alpha) < 0$. Целое число $n(\alpha, \gamma) = 2\frac{(\alpha, \gamma)}{(\gamma, \gamma)}$ может принимать значения $-1$, $-2$, $-3$. Разберем все возможности.

а) $n(\alpha, \gamma) = -3$. Тогда $s_\gamma(\alpha + \gamma) = \alpha + \gamma - 2\frac{(\alpha + \gamma, \gamma)}{(\gamma, \gamma)}\gamma = \alpha + \gamma - n(\alpha, \gamma)\gamma - 2\gamma = \alpha + 2\gamma > \alpha$ и $(\alpha + 2\gamma, \alpha) = (\alpha + \gamma, \alpha) + (\alpha, \gamma) < 0$. Полагаем $\beta = \alpha + 2\gamma = s_\gamma(\alpha + \gamma)$.

б) $n(\alpha, \gamma) = -2$. Этот случай на самом деле невозможен, так как мы должны иметь $(\alpha + \gamma, \alpha) = 0$, что вместе с равенством $n(\alpha, \gamma) = -2$ дает противоречие: $\alpha + \gamma = 0$.

в) $n(\alpha, \gamma) = -1$. В этом случае находим: $(\alpha, \alpha) - \frac{1}{2}(\gamma, \gamma) = (\alpha, \alpha) + \frac{n(\alpha, \gamma)}{2}(\gamma, \gamma) = (\alpha, \alpha) + (\alpha, \gamma) = (\alpha + \gamma, \alpha) = 0$, откуда $n(\gamma, \alpha) = 2\frac{(\alpha, \gamma)}{(\alpha, \alpha)} = n(\alpha, \gamma)\frac{(\gamma, \gamma)}{(\alpha, \alpha)} = -2$. Следовательно, $s_\alpha(\gamma) = \gamma - n(\gamma, \alpha)\alpha = \gamma + 2\alpha > \alpha$ и $(\gamma + 2\alpha, \alpha) = (\gamma + \alpha, \alpha) + (\alpha, \alpha) = (\alpha, \alpha) > 0$.

Полагаем $\beta = \gamma + 2\alpha = s_\alpha(\gamma)$. Предложение доказано.

Следствие 2. *Для каждого положительного корня $\alpha$ можно найти цепочку положительных корней $\{\alpha_i\}_{i=0}^N$ такую, что: $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_N$ максимален, $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \neq 0$.*

Следствие 3. *Пусть $S' \subset S$ — произвольное подмножество, а $R'$ — множество тех корней, которые выражаются только через элементы $S'$. Пусть $\Phi = R \setminus R'$; $\Phi^+ = \Phi \cap R^+$; $\Phi_i \subset \Phi^+$; $\Phi_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$. Если система корней $R$ неприводима и $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$, то $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi^+$.*

Доказательство. Единственный максимальный корень $\beta$ лежит в $\Phi^+$, согласно последнему замечанию п. 2. Допустим, что $\beta \in \Phi_1$ и $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi^+$. Возьмем $\alpha \in \Phi_2$ и построим цепочку, ведущую от $\alpha$ к $\beta$, как в следствии 2. В этой цепочке найдется пара соседей $\alpha_i$, $\alpha_{i+1}$: $\alpha_i \in \Phi_2$, $\alpha_{i+1} \in \Phi_1$. Это противоречит условию $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$.

**4. Комплексные однородные пространства.** Речь идет о фактор-пространствах вида $M = G/P$, где $G$ — полупростая комплексная группа Ли; $P$ — ее параболическая подгруппа. Эти пространства являются проективными алгебраическими многообразиями и, кроме того, односвязны. Известно, что, обратно, всякое односвязное однородное проективное алгебраическое многообразие имеет такой вид.

**Теорема.** *Если $G$ проста, то $M = G/P$ нельзя представить в виде произведения $M = M_1 \times M_2$, где $M_1$, $M_2$ — вещественные многообразия меньшей размерности.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{g}$ — алгебра Ли группы $G$; $\boldsymbol{s}$ — ее картановская подалгебра; $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{s} \dotplus \sum\limits_{\alpha \in R} \boldsymbol{g}_\alpha$ — корневое разложение; $R$ — система корней (линейных форм на $\boldsymbol{s}$). Роль $V$ играет некоторая вещественная форма пространства $\boldsymbol{s}^*$. Скалярное произведение индуцировано формой Киллинга.

Известно, что можно выбрать базис $S$ системы корней $R$ и подмножество $S' \subset S$ так, что в обозначениях следствия 3 алгебра Ли $\boldsymbol{p}$ подгруппы $P$ имеет вид $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} \dotplus \sum\limits_{\alpha \in R'} \boldsymbol{g}_\alpha \dotplus \sum\limits_{\alpha \in \Phi^+} \boldsymbol{g}_\alpha$. В работе А. Бореля и Ф. Хирцебруха [2] доказано, что $H^2(M, R)$ можно описать следующим образом: $H^2(M, R) = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0, \alpha \in S'\}$, причем значение $v^m$ $(m = \dim_c M)$ на фундаментальном классе многообразия $M$ равно

$$v^m [M] = \text{const} \prod_{\alpha \in \Phi^+} (v, \alpha). \qquad (*)$$

Выберем $v \in H^2(M, R)$ так, что $\alpha \in R$, $(v, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in R'$.

Если $M = M_1 \times M_2$, то $H^*(M, R) = H^*(M_1, R) \times H^*(M_2, R)$, и найдутся элементы $v_1, v_2 \in H^2(M, R)$ такие, что $v_1 + v_2 = v$, $v_1^m = v_2^m = 0$. Положим $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi^+ \mid (v_i, \alpha) = 0\}$ $(i = 1, 2)$. В силу (*) имеем $\Phi_1 \neq \varnothing$ (иначе $v_1^m \neq 0$) и, аналогично, $\Phi_2 \neq \varnothing$.

Покажем, что $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi^+$. Допуская противное, найдем такой корень $\alpha \in \Phi^+$, что $(v_1, \alpha) \neq 0$, $(v_2, \alpha) \neq 0$. Мы имеем $v^m = (v_1 + v_2)^m = \binom{m}{k} \times v_1^k v_2^{m-k}$ при некотором $k$, $0 < k < m$. В силу выбора $v$ и формулы (*), $v^m \neq 0$. Следовательно, $(\lambda v_1 + \mu v_2)^m = \binom{m}{k} \lambda^k \mu^{m-k} v_1^k v_2^{m-k} = \lambda^k \mu^{m-k} v^m \neq 0$ при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Полагая $\lambda = (v_2, \alpha)$, $\mu = -(v_1, \alpha)$, получим противоречие с (*).

Покажем, наконец, что $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Пусть $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Phi_2$. Тогда $(\alpha, v_1) = 0$, но $(\alpha, v_2) \neq 0$, так как $(\alpha, v) \neq 0$. Аналогично, $(\beta, v_1) \neq 0$, $(\beta, v_2) = 0$. Мы имеем $(s_\alpha(\beta), v_1) = (\beta, v_1) - n(\beta, \alpha)(\alpha, v_1) = (\beta, v_1) \neq 0$. Следовательно, $s_\alpha(\beta) \notin S'$, $s_\alpha(\beta) \in \Phi$.

По доказанному, $0 = (s_\alpha\ (\beta),\ v_2) = (\beta,\ v_2) - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}(\alpha,\ v_2)$. Так как $(\alpha,\ v_2) \neq 0$, $(\beta,\ v_2) = 0$, получаем, что $(\alpha,\ \beta) = 0$. Мы пришли к противоречию со следствием 3. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Блинкин М. Я. О невозможности борелевских многообразий. — «Мат. сб»., 1972, т. 88: 3, с. 442—446.
2. Borel A., Hirzebruch F. Characteristic classes and homogeneous spaces II. — «Amer. J. Math.», 1959, vol 81 : 2, p. 315—382.
3. Серр Ж.-П. Группы Ли и алгебры Ли. М., «Мир», 1969, с. 293—319.
4. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М., «Мир», 1972, с. 177—274.


*Поступила 20 марта 1975 г.*