УДК 519.25

И. М. СЛИВНЯК

ПРОВЕРКА ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ В СИСТЕМАХ С УПРАВЛЯЮЩИМ ПАРАМЕТРОМ

1. Постановка задачи

Рассматривается система Σ, содержащая неизвестный параметр θ и управляющий параметр δ. Оба параметра двузначны и принимают значения ± 1.

Ставится задача проверки пары простых гипотез

$$H:\Theta=-1,\ K:\Theta=1.$$

Наблюдаемая случайная величина x имеет плотность распределения $p(x, \Theta)$, $\Theta=\pm 1$ относительно некоторой меры μ.

С помощью параметра δ осуществляется переключение Θ: при $\delta=-1$ параметр Θ изменяет свое значение, при $\delta=1$ сохраняет его. Поэтому плотность распределения x с учетом наличия δ может быть записана в виде $p(x, \Theta\delta)$.

Производится серия из n измерений, перед каждым из которых допускается переключение θ. Пусть δ_i — значение δ перед i-м измерением. Стратегия управления S задается набором условных распределений $\pi^{(s)}(\delta_i/\delta_{\overline{1,i-1}}, x_{\overline{1,i-1}})$, являющихся измеримыми функциями полученных ранее результатов измерений $x_{\overline{1,i-1}}$ и значений $\delta_{\overline{1,i-1}}$ параметра δ*.

В частности, нерандомизованная стратегия задается набором функций $\delta_i(x_{\overline{1,i-1}})$, $i\geqslant 1$.

Пусть для $k\leqslant n$

$$X_h=x_{\overline{1,k}},\ \mu_k(dX_k)=\prod_{i=1}^{k}\mu(dx_i),$$

$\hat{\mu}_k$ — считающая мера в пространстве $\delta_{\overline{1,k}}$. Тогда для заданной стратегии s плотность вектора $(x_{\overline{1,k}}, \delta_{\overline{1,k}})$ относительно меры $\mu_k\times\hat{\mu}_k$ имеет вид

$$p_\theta^{(s)}(X_n, \delta_{\overline{1,n}})=\prod_{i=1}^{n}p(x_i, \theta\delta_i)\,\pi^{(s)}(\delta_i/\delta_{\overline{1,i-1}},\ x_{\overline{1,i-1}}),$$

и задача проверки гипотез H, K сводится к различению плотностей $p_{\pm 1}^{(s)}(X_n, \delta_{\overline{1,n}})$.

Для нерандомизованной стратегии s получаем вместо них плотности

$$p_\theta^{(s)}(X_n)=\prod_{i=1}^{n}p\,[x_i, \theta\delta_i(x_{\overline{1,i-1}})]$$

относительно меры $\mu_n(dX_n)$.

По окончании измерений принимается решение $\gamma=\gamma_{-1}$ — — верна гипотеза H или $\gamma=\gamma_1$ — верна гипотеза K. Выбор решения производится при помощи теста $\varphi(X_n, \delta_{\overline{1,n}})$ — измеримой функции, представляющей собой вероятность принятия при данных $X_n, \delta_{\overline{1,n}}$ решения γ_1.

Пара (s, φ) образует решающее правило задачи.

Рассматривается байесовская постановка задачи с функцией потерь

---

* Здесь и ниже символ $a_{\overline{j,k}}$ означает вектор $(a_j,\ldots, a_k)$ при $k\geqslant j$ и пустое множество при $k<j$.

$$C(\theta, \gamma) = \begin{cases} c_i, \ \theta = i, \ \gamma = \gamma_{-i}, \ i = \pm 1, \\ 0, \ \theta = i, \ \gamma = \gamma_i, \ i = \pm 1. \end{cases}$$

Параметр Θ считается случайной величиной с заданными априорными вероятностями

$$P\{\theta = i\} = \pi_i, \ i = \pm 1.$$

Критерием качества решающего правила (s, φ) служит риск — среднее значение функции потерь

$$R_n(S, \varphi) = MC(\theta, \gamma).$$

Требуется найти байесовское решающее правило (s^*, φ^*), для которого

$$R_n(s^*, \varphi^*) = \inf_{(s, \varphi)} R_n(s, \varphi).$$

Как известно, при заданной стратегии s оптимальный тест $\varphi(s)$ имеет вид

$$\varphi(s) = \varphi^* = \begin{cases} 1, \ (X_n, \ \delta_{\overline{1,n}}) \in \Delta, \\ 0, \ (X_n, \ \delta_{\overline{1,n}}) \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

где

$$\Delta = \{p_1^{(s)}(X_n, \delta_{\overline{1,n}}) \geqslant \lambda p_{-1}^{(s)}(X_n, \delta_{\overline{1,n}})\} =$$

$$= \left\{ \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \delta_i) \geqslant \lambda \prod_{i=1}^{n} p(x_i, -\delta_i) \right\}, \ \lambda = c_{-1}\pi_{-1}(c_1\pi_1)^{-1}.$$

При этом

$$R_n(s) = R_n(s, \varphi^*) = \inf_{\varphi} R_n(s, \varphi) = c_1\pi_1 [\lambda \int_{\Delta} p_{-1}^{(s)}(X_n, \delta_{\overline{1,n}})\, d(\mu_n \times \hat{\mu}_n) +$$

$$+ \int_{\overline{\Delta}} p_1^{(s)}(X_n, \delta_{\overline{1,n}})\, d(\mu_n \times \hat{\mu}_n)]. \tag{1}$$

Таким образом, дело сводится к отысканию оптимальной стратегии s^*, определяемой условием

$$R_n(s^*) = \inf_{s} R_n(s). \tag{2}$$

Данная постановка задачи возникла под влиянием работ А. А. Фельдбаума по дуальному управлению (см. [1]) и может рассматриваться как частный случай задачи оценивания неизвестного параметра при наличии управляющего параметра, описанной в [2, гл. 10].

В 2 выясняется структура оптимальной стратегии s^* и указано выражение для риска $R_n(s^*)$.

Следуя А. А. Фельдбауму, назовем систему Σ нейтральной, если риск $R_n(s)$ не зависит от выбора стратегии s.

Прежде чем приступить к отысканию оптимальной стратегии, естественно решить вопрос о нейтральности рассматриваемой системы. Основной задачей настоящей работы и является характеризация нейтральных систем. В 3 получены некоторые условия такого типа. В частности, рассмотрен случай, когда распределение отношения правдоподобия (4) абсолютно непрерывно относительно меры Лебега.

Пусть N — класс систем, нейтральных при данном числе измерений n. В 4 установлены соотношения между классами N_n при различных n. Показано, что при выполнении условия (40) из нейтральности системы для некоторого n вытекает ее нейтральность для любого меньшего n.

В 5 полученные соотношения уточняются для случая, когда логарифмы отношений правдоподобия (4) имеют решетчатые распределения. В частности, показано, что при $\lambda = 1$ и выполнении (40) нейтральность системы не зависит от числа измерений n.

Параграф 6 посвящен стратегиям с пассивным накоплением информации (см. [1]), не использующим наличия обратной связи в системе: для таких стратегий распределения $\pi^{(s)}(\delta_i/\delta_{\overline{1,i-1}})$ не зависят от полученных ранее результатов измерений $x_{\overline{1,i-1}}$.

Пусть N_n^p — класс систем, нейтральных относительно пассивного управления при данном числе измерений n. Очевидно, $N_n^p \supseteq N_n$. Как показано в 6, при любом n $N_n^p \neq N_n$. В то же время, как следует из результатов 3, если система принадлежит N_n^p для бесконечной последовательности значений n то она принадлежит N_n при всех n.

2. Структура оптимальной стратегии s^*

Обозначим

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 1, & \alpha > 1; \end{cases} \tag{3}$$

$$y_\theta = p(x, -\theta)\,[p(x, \theta)]^{-1}, \quad \theta = \pm 1, \tag{4}$$

где случайная величина x имеет плотность распределения $p(x, \theta)$ относительно меры $\mu(dx)$;

$$z_0^{(s)} \equiv 1, \quad z_k^{(s)} = \prod_{i=1}^{k} p(x_i, \delta_i) \left[\prod_{i=1}^{k} p(x_i, -\delta_i)\right]^{-1}, \quad k > 0.$$

Введем также операторы

$$L_\theta f(\alpha) = Mf(\alpha y_\theta), \quad \theta = \pm 1;$$

$$Lf(\alpha) = \min\{L_{-1}f(\alpha), L_1 f(\alpha)\} \tag{5}$$

на измеримых функциях $f(\alpha) \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$.

Теорема 1. *Существует нерандомизованная стратегия*

$$s^* = (\delta_i^*(X_{i-1}),\ i = 1, n).$$

Значения δ_i^* *определяются последовательно, начиная с* $i=1$, *формулами*

$$\delta_i^* = \delta_i^*(z_{i-1}^{(s^*)}) = \begin{cases} 1, L_{-1} L^{n-i}\Gamma(\lambda^{-1} z_{i-1}^{(s^*)}) < L_1 L^{n-i}\Gamma(\lambda^{-1} z_{i-1}^{(s^*)}) \\ -1 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

При этом

$$R_n(s^*) = c_{-1}\pi_{-1} L^n \Gamma(\lambda^{-1}). \tag{7}$$

Для областей

$$D_i^{(k)}(\lambda) = \{z : \delta_i^*(z) = k\},\ i = \overline{1,n},\ k = \pm 1$$

выполняются соотношения

$$D_i^{(k)}(\lambda) = \{z : z\lambda^{-1} \in D_i^{(k)}(1)\}, \tag{8}$$

и если $z \in D_i^{(-1)}(1)$, *то* $z^{-1} \in D_i^{(1)}(1)$, *и наоборот.*

Доказательство. Для произвольной стратегии s запишем риск (1) в виде

$$R_n(s) = c_{-1}\pi_{-1} \sum_{\delta_{\overline{1,n-1}}} \int p_{-1}^{(s)}(X_{n-1}, \delta_{\overline{1,n-1}})\, \mu_{n-1}(dX_{n-1}) \times$$

$$\times \sum_{\delta_n} \pi^{(s)}(\delta_n | \delta_{\overline{1,n-1}}, x_{\overline{1,n-1}})\, r_n(x_{\overline{1,n-1}}, \delta_{\overline{1,n}}), \tag{9}$$

где

$$r_n(X_{n-1}, \delta_{\overline{1,n}}) = \int_\Delta p(x_n, -\delta_n)\, \mu(dx_n) + \frac{1}{\lambda} z_{n-1}^{(s)} \int_{\overline{\Delta}} p(x_n, \delta_n)\, \mu(dx_n) =$$

$$= L_{-\delta_n} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} z_{n-1}^{(s)}\right). \tag{10}$$

Для минимизации (9) путем выбора $\pi^{(s)}(\delta_n / \delta_{\overline{1,n-1}}, X_{n-1})$ нужно положить $\delta_n^* = 1$ при

$$L_{-1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} z_{n-1}^{(s)}\right) < L_1 \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} z_{n-1}^{(s)}\right)$$

и $\delta_n^* = -1$ в противном случае. При этом

$$r_n(X_{n-1}, \delta_{\overline{1,n-1}}, \delta_n^*) = L\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} z_{n-1}^{(s)}\right). \tag{11}$$

Используя (11), можно записать (9) в виде

$$R_n(s) = c_{-1}\,\pi_{-1} \sum_{\delta_{\overline{1,n-2}}} p_{-1}^{(s)}(X_{n-2}, \delta_{\overline{1,n-2}}) + \mu_{n-2}(dX_{n-2}) \times$$

$$\times \sum_{\delta_{n-1}} \pi^{(s)}(\delta_{n-1}/\delta_{\overline{1,n-2}},$$

$$X_{n-2})\, L_{-\delta_{n-1}} L\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} z_{n-2}^{(s)}\right),$$

что приводит к (6) при $i = n-1$. Продолжая аналогично, получаем (6) при всех $i = \overline{1, n}$, а также (7). Формула (8) следует из (6). Остается доказать утверждение теоремы относительно областей $D_i^{(k)}$ (1). Пусть функция $f(\alpha)$ удовлетворяет условиям

$$f(\alpha) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right),\ \alpha > 0;\ f(0) = 0. \tag{12}$$

Тогда для любого i функция $L^i f(\alpha)$ обладает теми же свойствами. Действительно, согласно (4), (5)

$$L_{-1} f(\alpha) = \int_G f\left[\alpha \frac{p(x, 1)}{p(x, -1)}\right] p(x, -1)\,\mu(dx) = \alpha \int_G f\left[\frac{p(x, -1)}{\alpha p(x, 1)}\right] \times$$

$$\times\, p(x, 1)\,\mu(dx) = \alpha L_1 f\left(\frac{1}{\alpha}\right), \tag{13}$$

где $G = \left\{x : 0 < \dfrac{p(x, 1)}{p(x, -1)} < \infty\right\}$. Поэтому, если

$$L_j f(\alpha) < L_{-j} f(\alpha),\ \text{то}\ L_{-j} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < L_j f\left(\frac{1}{\alpha}\right),\ \text{откуда}$$

$$Lf(\alpha) = L_j f(\alpha) = \alpha L_{-j} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha L f\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{14}$$

Согласно (3) функция $\Gamma(\alpha)$ удовлетворяет (12) и, следовательно, в силу (13), (14) для любых j, i, z

$$L_j L^i \Gamma(z) = z L_{-j} L^i \Gamma\left(\frac{1}{z}\right). \tag{15}$$

Поэтому, если

$$L_j L^i \Gamma(z) < L_{-j} L^i \Gamma(z),$$

то

$$L_{-j} L^i \Gamma\left(\frac{1}{z}\right) < L_j L^i \Gamma\left(\frac{1}{z}\right),$$

что и требовалось доказать.

Как следует из (8), значение λ, по существу, не влияет на вид стратегии s^*.

Отметим также, что для нерандомизованных стратегий s формулы (6) представляют собой процедуру Беллмана отыскания оптимальной стратегии для управляемой марковской последовательности $\{z_k^{(s)}\}$ с моментом обрыва $\tau=n$ (см. [3, с. 380]), где

$$z_k^{(s)} = \prod_{i=1}^{k} p(x_i, \delta_i) \left[\prod_{i=1}^{k} p(x_i, -\delta_i) \right]^{-1},$$

а случайный вектор $x_{\overline{1,n}}$ имеет плотность $\sum\limits_{\theta} p_\theta^{(s)}(X_n)\pi_\theta$ относительно меры $\mu_n(dX_n)$. Представляет интерес выделение систем, для которых стратегии s^* обладают простой структурой. В частности, пусть T — класс систем, для которых при любом m

$$L^{m+1}\Gamma(x) = \begin{cases} L_{-1} L^m \Gamma(x), & x \leqslant 1, \\ L_1 L^m \Gamma(x), & x > 1. \end{cases} \tag{16}$$

Вводя апостериорные вероятности $\pi_{\mp 1}^{(i)}$ параметра Θ перед i-м измерением и используя (6) и формулу

$$\pi_{-1}^{(i)} = \left(1 + \frac{c_{-1}}{c_1 \lambda} z_{i-1}^{(s)} \right)^{-},$$

можно записать (16) в виде

$$\delta_i^* = \begin{cases} 1, & \pi_{-1}^{(i)} \geqslant c_1 (c_{-1} + c_1)^{-1}, \\ -1, & \pi_{-1}^{(i)} < c_1 (c_{-1} + c_1)^{-1}. \end{cases}$$

Как показано ниже, класс T не пуст.

Теорема 2. *Пусть отношение правдоподобия y_{-1} имеет распределение (46), подчиненное условию (47), и пусть $p_k = 0$ при $k < -1$. Тогда $\Sigma \in T$.*

Доказательство. Обозначим для произвольной функции $f(x)$

$$f(a^n) = f_n.$$

В силу (15) достаточно доказать, что при $n<0$ и любом m

$$L_{-1} L^m \Gamma_n \leqslant L_1 L^m \Gamma_n. \tag{17}$$

Пусть $n < 0$. Тогда в силу (48)

$$L_1 \Gamma_n = \sum_{i \leqslant 1} a^{n+i} a^{-i} p_{-1} = a^n,$$

$$L_{-1} \Gamma_n = \sum_{i=-1}^{-n} a^{n+i} p_i + \sum_{i=-n+1}^{\infty} p_i = a^n - \sum_{i=-n+1}^{\infty} (a^{n+i} - 1) p_i \leqslant L_1 \Gamma_n.$$

Пусть теперь (16) выполняется при некотором m. Тогда в силу перестановочности операторов L_{-1}, L_1

$$L_1 L^{m+1}\Gamma_n = \sum_{i\leqslant 1} L_{-1} L^m \Gamma_{n+i} a^{-i} p_{-i} = L_1 L_{-1} L^m \Gamma_n = L_{-1} L_1 L^m \Gamma_n$$

и

$$L_{-1} L^{m+1}\Gamma_n = \sum_{i=-1}^{-n} L_{-1} L^m \Gamma_{n+i} p_i + \sum_{i=-n+1}^{\infty} L_1 L^m \Gamma_{n+i} p_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=-1}^{-n} L_1 L^m \Gamma_{n+1} p_i + \sum_{i=-n+1}^{\infty} L_1 L^m \Gamma_{n+1} p_i = L_{-1} L_1 L^m \Gamma_n = L_1 L^{m+1}\Gamma_n.$$

Таким образом, (17) выполняется при любом m.

3. Характеризация нейтральных систем

Нейтральность системы Σ тесно связана с условием равнораспределенности величины (4), которое будем называть условием (А).

Это условие достаточно для включения $\Sigma \in N_n$ при любом n. Действительно, согласно (5) условие (А) равносильно совпадению операторов L_{-1}, L_1, что в силу (9), (10) означает при любом n независимость риска $R_n(s)$ от выбора стратегии s.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из включения $\Sigma \in N_n$ при некотором n не следует выполнение условия (А). Пусть, например, для некоторого $\varepsilon > 0$

$$p\{y_{-1} < \varepsilon\} + p\{y_1 < \varepsilon\} = 0 \tag{18}$$

и $\lambda < \varepsilon^2$. Покажем, что тогда $\Sigma \in N_2$. В силу (9), (10) достаточно доказать, что почти везде по мере $p_{y_{-1}}(dy) + p^{y_1}(dy)$

$$L_{-1}\Gamma\left(\frac{y}{\lambda}\right) = L_1\Gamma\left(\frac{y}{\lambda}\right). \tag{19}$$

Согласно (5)

$$L_j\Gamma\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \frac{y}{\lambda}\int_0^{\lambda/y} \Phi_j(t)\,dt,\ j = \pm 1, \tag{20}$$

где

$$\Phi_j(y) = p\{y_i > y\}.$$

В силу (18) при $y_1 < \varepsilon\, \Phi_j(y_1) = 1$ и, следовательно, (19) выполняется при всех $y > \varepsilon$, а значит и почти везде по мере $p_{y_{-1}} + p_y$. Таким образом, $\Sigma \in N_2$, хотя условие (A) из (18), очевидно, не вытекает.

Однако, как показано ниже, если система нейтральна (даже в некотором ослабленном смысле) для бесконечной последовательности значений n, то условие (А) выполняется.

Рассмотрим пассивную стратегию $s_\nu (0 \leqslant \nu \leqslant n)$, которая заключается в том, что перед каждым из ν заранее выбранных измерений, и только перед ними, производится переключение параметра Θ^*. Как следует из (9), (10), соответствующий риск равен

$$R_n(s_\nu) = R_n(\nu) = c_{-1}\pi_{-1} L_{-1}^{\nu} L_1^{n-\nu} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{21}$$

Теорема 3. *Пусть при некотором n n-кратная свертка функции $p\{\ln y_{-1} < t\}$ имеет абсолютно непрерывную относительно меры Лебега компоненту. Тогда если для некоторого ν_0 и бесконечной последовательности значений n*

$$R_n(\nu_0 + 1) = \frac{1}{2}[R_n(\nu_0) + R_n(\nu_0 + 2)], \tag{22}$$

то выполнено условие (А).

Доказательство. Обозначим

$$F_j(t) = p\{\ln y_j < t\};$$

$$\psi_j(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\, dF_j(t),\; w = u + iv, \tag{23}$$

$$A_j = p\{y_j > 0\} = \psi_j(0),\; j = \pm 1. \tag{24}$$

При $0 \leqslant v \leqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iwt}|\, dF_j(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^t)\, dF_j(t) \leqslant 1 + My_j \leqslant 2,$$

т. е. интегралы в (23) сходятся абсолютно и равномерно в полосе $0 \leqslant v \leqslant 1$, и функции $\psi_j(w)$ аналитичны внутри этой полосы. При этом

$$\psi_j(w) = \int_G \exp\left[-iw \ln \frac{p(x, -j)}{p(x, j)}\right] p(x, j)\, \mu(dx) =$$

$$= \int_G \exp\left[(1 + iw) \ln \frac{p(x, j)}{p(x, -j)}\right] P(x, -j)\mu(dx) = \psi_{-j}(i - w), \tag{25}$$

где

$$G = \left\{ x : 0 < \frac{p(x, 1)}{p(x, -1)} < \infty \right\}.$$

Пусть аналогично (4)

$$y_\theta^{(k)} = \frac{p(x_k, -\theta)}{p(x_k, \theta)},\; \theta = \pm 1,\; k = \overline{1, n},$$

---

* Очевидно, при данном n набором $s_{\overline{0,n}}$ исчерпываются все нерандомизованные пассивные стратегии.

где случайные величины x_k независимы в совокупности и одинаково распределены с плотностью $p(x, \Theta)$. Тогда в силу (21)

$$c_1^{-1}\pi_1^{-1}R_n(\nu)=\lambda\, p\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\ln y_1^{(k)}+\sum_{k=\nu+1}^{n}\ln y_{-1}^{(k)}\geqslant \ln\lambda\right\}+$$

$$+p\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\ln y_{-1}^{(k)}+\sum_{k=\nu+1}^{n}\ln y_1^{(k)}>-\ln\lambda\right\}.$$

Применяя к функциям распределения

$$\Phi_\nu^{(j)}=p\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\ln y_j^{(k)}+\sum_{k=\nu+1}^{n}\ln y_{-j}^{(k)}<t\right\},\quad j=\pm 1$$

формулу обращения

$$\frac{1}{2}\left[\Phi_\nu^{(j)}(t+0)+\Phi_\nu^{(j)}(t-0)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi_\nu^{(j)}(+\infty)+\Phi_\nu^{(j)}(-\infty)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left[e^{itu}\varphi(u)-e^{-itu}\varphi(-u)\right]\frac{du}{iu},$$

где

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itu}\,d\Phi_\nu^{(j)}(t),$$

и используя очевидные соотношения

$$\Phi_\nu^{(j)}(+\infty)=1,\ \Phi_\nu^{(j)}(+\infty)-\Phi_\nu^{(j)}(-\infty)=[\psi_j(0)]^\nu[\psi_{-j}(0)]^{n-\nu}=$$
$$=A_j^\nu A_{-j}^{n-\nu},$$

получаем

$$R_n(\nu)=\frac{1}{2}\sum_{j=\pm 1}c_{-j}\pi_{-j}\left[A_j^\nu A_{-j}^{n-\nu}-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jiu\ln\lambda}[\psi_j(u)]^\nu[\psi_{-j}(u)]^{n-\nu}\frac{du}{iu}\right].$$

В силу (22) это дает для бесконечной последовательности значений n

$$R_{n+\nu_0+2}(\nu_0)-2R_{n+\nu_0+2}(\nu_0+1)+R_{n+\nu_0+2}(\nu_0+2)=\frac{1}{2}\sum_{j=\pm1}\times$$

$$\times\, c_{-j}\pi_{-j}\left[A_j^{\nu_0}A_{-j}^{n}(A_1-A_{-1})^2-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jiu\ln\lambda}[\psi_j(u)]^{\nu_0}\times\right.$$

$$\left.\times[\psi_{-j}(u)]^n[\psi_1(u)-\psi_{-1}(u)]^2\frac{du}{iu}\right]=0. \qquad (26)$$

Обозначим

$$I_j(v) = \int\limits_{-\infty+iv}^{+\infty+iv} e^{jiw\ln\lambda}\,[\psi_j(w)]^{\nu_0}\,[\psi_{-j}(w)]^n[\psi_1(w)-\psi_{-1}(w)]^2\,\frac{dw}{iw},\ j=\pm 1.$$

При $0 \leqslant v \leqslant 1$ интеграл $I_j(v)$ не зависит от v.
Действительно, при $0 \leqslant v \leqslant 1$

$$|\psi_j(u+iv)| \leqslant \psi_j(iv), \tag{27}$$

причем функция $\psi_j(iv)$ выпукла и положительна. Следовательно, в силу (24), (25)

$$|\psi_j(u+iv)| \leqslant \max\{\psi_j(0),\ \psi_j(i)\} = \max\{A_{-1},\ A_1\},$$

откуда и следует наше утверждение.
Докажем, что $A_{-1}=A_1$. Пусть $A_{-1}\neq A_1$, например, $A_1 > A_{-1}$. Оценим интеграл в (26). Согласно (25)

$$I_{-1}(0) = I_{-1}(1) = \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iu\ln\lambda}\,[\psi_1(u)]^{\nu_0}\,[\psi_{-1}(u)]^n\,[\psi_1(u)-\psi_{-1}(u)]^2 \times$$

$$\times\frac{du}{i(i-u)},$$

откуда

$$\sum_{j=\pm1} c_{-j}\pi_{-j}I_j(0) = c_{-1}\pi_{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iw\ln\lambda}\,[\psi_1(w)]^{\nu_0}\,[\psi_{-1}(w)]^n[\psi_1(w)-\psi_{-1}(w)]^2\times$$

$$\times\frac{dw}{w(i-w)}, \tag{28}$$

где интегрирование производится по прямой $v=0$. Подобно предыдущему, последний интеграл имеет одно и то же значение по любой прямой $v=v_1$, $0\leqslant v_1\leqslant 1$. Зададим $v_1\in(0,1)$. В силу (27) и выпуклости функции $\psi_j(iv)$ при $0\leqslant v\leqslant 1$, для любого u

$$|\psi_j(u+iv_1)| \leqslant \psi_j(iv_1) < A_1.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{j=\pm1} c_{-j}\pi_{-j}I_j(0)\right| \leqslant 4A_1^2\,c_{-1}\pi_{-1}\,\lambda^{-v_1}[\psi_1(iv_1)]^{\nu_0}[\psi_{-1}(iv_1)]^n\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[(u^2+(1-v_1)^2)(u^2+v_1^2)\right]^{-\frac{1}{2}}du = o(A_1^n).$$

Следовательно, при $n>>1$ (26) имеет вид

$$c_1\pi_1(A_1-A_{-1})^2A_{-1}^{\nu_0}A_1^n + o(A_1^n) = 0,$$

что невозможно. Таким образом,

$$A_1 = A_{-1} = A.$$

При этом, согласно (26), (28),

$$\int e^{iw\ln\lambda} [\psi_1(w)]^{\nu_0} [\psi_{-1}(w)]^n [\psi_1(w) - \psi_{-1}(w)]^2 \frac{dw}{w(i-w)} = 0, \quad (29)$$

где интегрирование производится по любой прямой $v = v_1$, $0 \leqslant v_1 \leqslant 1$. Оценим этот интеграл при $n \gg 1$ по методу перевала. При $0 < v < 1$

$$\psi_{-1}(iv) > 0,\ \psi_{-1}(0) = \psi_{-1}(i) = A,$$

$$[\psi_{-1}(iv)]''_{vv} > 0,\ [\ln \psi_{-1}(iv)]''_{vv} > 0.$$

Поэтому уравнение перевала

$$\psi'_{-1}(w) = 0$$

имеет на интервале $w = iv$, $0 < v < 1$ единственный корень $w = iv_0$, и наискорейший спуск из точки перевала происходит по прямой $w = u + iv_0$. Интегрируя в (29) по этой прямой и используя (25), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{nh(u)}\, du = 0, \quad (30)$$

где

$$g(u) = e^{i(u+iv_0)\ln\lambda} [-u + i(1 - v_0)]^{-1} (u + iv_0)^{-1} [\psi_{-1}(-u + i(1 - v_0))]^{\nu} \cdot [\psi_{-1}(-u + i(1 - v_0)) - \psi_{-1}(u + iv_0)]^2, \quad (31)$$

$$h(u) = \ln \psi_{-1}(u + iv_0) - \ln \psi_{-1}(iv_0).$$

По условиям теоремы n-кратная свертка функции $F_1(t)$ имеет при некотором n абсолютно непрерывную относительно меры Лебега компоненту. Можно показать, что тогда для любого v, $0 \leqslant v \leqslant 1$ функция

$$\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{vt}\, dF_{-1}(t)$$

обладает тем же свойством и, следовательно,

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} |\psi_{-1}(u + iv)| = \overline{\lim_{u\to\infty}} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\, d\Phi(t) \right| < \psi_{-1}(iv).$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$ при $|u| > \delta$

$$|\psi_{-1}(u + iv_0)| \leqslant A' < \psi_{-1}(iv_0),$$

т. е. $\operatorname{Re} h(u) \leqslant q < 0$. Поэтому в (30) можно ограничиться интегралом $\int\limits_{-\delta}^{\delta} g(u)\, e^{nh(u)}\, du$ с произвольным $\delta > 0$. Для малых u

$$g(u) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k u^k,$$

$$h(u)=\sum_{k=2}^{\infty} h_k u^k, \; h_2<0.$$

Обозначим $nu^3=z$ и запишем функцию $g(u)e^{nh(u)}$ в виде

$$g(u)e^{nh(u)}=e^{nh_2u^2}\sum_{r,s=0}^{\infty} c_{r,s} z^r u^s.$$

Тогда имеет место асимптотическое разложение (см. [4, с. 92])

$$\int_{-\delta}^{\delta} g(u)e^{nh(u)}\,du \sim \sum_{t=0}^{\infty} d_t(-h_2 n)^{-\frac{1}{2}-t},$$

где

$$d_t=\sum_{m=0}^{2t} c_{m,2t-m}(-h_2)^m\left(m+t-\frac{1}{2}\right)! \tag{32}$$

В силу (30)

$$d_t=0, \; t\geqslant 0. \tag{33}$$

В частности,

$$d_0=c_{0,0}=g(0)=0,$$

т. е. в силу (31)

$$\psi_{-1}(i(1-v_0))=\psi_{-1}(iv_0).$$

Отсюда $v_0=\frac{1}{2}$, и (31) принимает вид

$$g(u)=-e^{-iu\ln\lambda}\left(u^2+\frac{1}{4}\right)^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}\left[\psi_{-1}\left(-u+\frac{i}{2}\right)-\psi_{-1}\left(u+\frac{i}{2}\right)\right]^2. \tag{34}$$

При этом

$$\psi'_{-1}(w)\Big|_{w=\frac{i}{2}}=0,$$

и потому для $|u|<\frac{1}{2}$

$$\psi_{-1}\left(-u+\frac{i}{2}\right)-\psi_{-1}\left(u+\frac{i}{2}\right)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j u^{2j+1}. \tag{35}$$

Следовательно, $c_{r,s}=0$, $s<6$, что в силу (32), (33) дает $d_3=c_{0,6}=0$. Но при всех s $c_{0,s}=g_s$. Поэтому $g_6=0$, и согласно (34), (35) $a_1=0$. Продолжая аналогично, получаем

$$a_j = 0, \ j \geqslant 1. \tag{36}$$

Функция

$$f(w) = \psi_{-1}\left(-w + \frac{i}{2}\right) - \psi_{-1}\left(w + \frac{i}{2}\right)$$

аналитична в полосе $|\mathrm{Im}\, w| < \frac{1}{2}$. Следовательно, в силу (35), (36) в этой полосе $f(w) \equiv 0$, т. е. согласно (25)

$$\psi_{-1}\left(w + \frac{i}{2}\right) = \psi_{-1}\left(-w + \frac{i}{2}\right) = \psi_1\left(w + \frac{i}{2}\right).$$

В частности, на всей оси u

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} e^{\frac{t}{2}} dF_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} e^{\frac{t}{2}} dF_1(t),$$

откуда и вытекает условие (А).

В заключение рассмотрим частный случай, когда отношение правдоподобия $\boldsymbol{y}_{-1}$ имеет при $y > 0$ плотность распределения $q(y)$ по мере Лебега. Условие (А) записывается тогда в виде

$$q(y) = y^{-3} q(y^{-1}), \tag{37}$$

т. е. определяет плотность $q(y)$ при $y > 1$ по ее значениям на интервале (0, 1). К этому нужно добавить условия нормировки

$$\int_0^{\infty} q(y)\, dy = p\{\boldsymbol{y}_{-1} > 0\} = A,$$

$$\int_0^{\infty} yq(y)\, dy = p\{\boldsymbol{y}_1 > 0\} = A,$$

которые в силу (37) сводятся к следующему:

$$\int_0^1 (1 + y)\, q(y)\, dy = A, \ 0 \leqslant A \leqslant 1. \tag{38}$$

Таким образом, в указанном частном случае системам, нейтральным при любом n (или, что равносильно, удовлетворяющим (22)), отвечают плотности $q(y)$, подчиненные на интервале (0, 1) единственному условию (38) и продолжаемые на интервал $(1, \infty)$ с помощью (37).

К таким $q(y)$ приводит, например, любая пара плотностей $p(x, -1)$, $p(x, 1)$ по мере Лебега, для которых при некотором a

$$p(a - x, -1) = p(a + x, 1)$$

4. Соотношения между классами N_n

Теорема 4. *Для любого* n

$$N_n \supseteq N_{n+2}. \tag{39}$$

Если при всех $\delta > 0$

$$p\{1-\delta < \boldsymbol{y}_{-1} < 1+\delta\} \neq 0, \tag{40}$$

то для любого n

$$N_n \supseteq N_{n+1}. \tag{41}$$

Условие (40) *отброшено быть не может.*

Доказательство. Пусть $\Sigma \overline{\in} N_n$, т. е. согласно (7)

$$(\widetilde{L}^n - L^n)\,\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 0, \tag{42}$$

где

$$\widetilde{L} f(\alpha) = \max\ \{L_{-1} f(\alpha),\ L_1 f(\alpha)\}.$$

Зададим $\alpha_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$

$$p\{\alpha_0 - \varepsilon < \boldsymbol{y}_{-1} < \alpha_0 + \varepsilon\} \neq 0. \tag{43}$$

Функции $L^n \Gamma(\alpha)$, $\widetilde{L}^n \Gamma(\alpha)$ непрерывны при всех $\alpha > 0$, причем $L^n \Gamma(\alpha) \leqslant \widetilde{L}^n \Gamma(\alpha)$. Поэтому в силу (42), (43)

$$L_1 L^n \Gamma\left(\frac{\alpha_0}{\lambda}\right) = M L^n \Gamma\left(\frac{\alpha_0}{\lambda}\boldsymbol{y}_1\right) < M \widetilde{L}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_0}{\lambda}\boldsymbol{y}_1\right) = L_1 \widetilde{L}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_0}{\lambda}\right).$$

Отсюда

$$L^{n+1}\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{\lambda}\right) < \widetilde{L}^{n+1}\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{\lambda}\right) \tag{44}$$

и

$$L^{n+2}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqslant L_{-1} L^{n+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) < L_{-1}\widetilde{L}^{n+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqslant \widetilde{L}^{n+2}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{45}$$

т. е. $\Sigma \overline{\in} N_{n+2}$.

При выполнении (40) включение (41) следует из (44) при $\alpha_0 = 1$. Пусть (40) не выполнено. Как следует из теоремы 5, *ii*, существует система $\Sigma \in N_3 - N_2$. Таким образом, (41) не имеет места.

5. Решетчатый случай

Пусть для некоторого $\alpha > 1$ отношение правдоподобия $\boldsymbol{y}_{-1}$ имеет распределение

$$p\{\boldsymbol{y}_{-1} = a^k\} = p_k,\ k = \overline{-\infty, \infty}, \tag{46}$$

где

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k p_k = 1 \tag{47}$$

и общий наибольший делитель значений k, при которых $p_k \neq 0$, равен 1. При этом величина y_1 имеет распределение

$$p\{y_1 = a^k\} = a^{-k} p_{-k}, \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \tag{48}$$

Пусть, далее, $\lambda = a^{k_0}$, где k_0 — целое.

Теорема 3. *Если для некоторого ν_0 и бесконечной последовательности значений n имеет место (22), то выполнено условие (A).*

Доказательство в основном совпадает с доказательством теоремы 3.

Следующая теорема показывает, что случай $\lambda = 1$ является в некотором смысле исключительным.

Теорема 5. *i). При $\lambda = 1$ классы N_{2k}, $k \geqslant 1$* совпадают и

$$\lim_{k \to \infty} N_{2k+1} \supseteq N_2. \tag{49}$$

i i). При $\lambda = 1$, $p_0 \neq 0$ классы N_k, $k \geqslant 2$ совпадают. Условие $p_0 \neq 0$ отброшено быть не может. i i i). При $\lambda \neq 1$ классы N_{2k}, вообще говоря, различны и включение (49) *нарушается, даже если $p_0 \neq 0$.*

Доказательство. *i*). Пусть $\lambda = 1$. Для произвольной функции $f(x)$ обозначим $f(a^n) = f_n$. Тогда, согласно (5),

$$L_{-1} f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n+k} p_k,$$

$$L_1 f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n+k} a^{-k} p_{-k}.$$

В частности,

$$L_{-1} \Gamma_n = 1 + \sum_{k \leqslant -n} (a^{n+k} - 1)\, p_k; \tag{50}$$

$$L_1 \Gamma_n = 1 + \sum_{k \leqslant -n} (a^{n+k} - 1)\, a^{-k} p_{-k}.$$

Пусть

$$V = \{n : p_n + p_{-n} \neq 0\}.$$

Докажем, что если

$$L_{-1} \Gamma_n = L_1 \Gamma_n, \; n \in V, \tag{51}$$

то это верно и при всех n. Обозначим $\pi_k = p_k - a^{-k} p_{-k}$. Согласно (50)

$$F_n = (L_{-1} - L_1)\, \Gamma_n = a^n \sum_{k < -n} a^k \pi_k - \sum_{k < -n} \pi_k. \tag{52}$$

Пусть

$$n_1, n_2 \in V, \; 0 \leqslant n_1 < n_2; \; (n_1, n_2) \cap V = 0.$$

В силу (51) $F_{n_2} = 0$. Поэтому, согласно (52), если хотя бы одна из сумм $\sum\limits_{k\leqslant -n_2} a^k \pi_k$, $\sum\limits_{k\leqslant -n_2} \pi_k$ не равна нулю, то обе они не равны нулю. Но тогда

$$F_{n_1} = a^{n_1-n_2} a^{n_2} \sum_{k\leqslant -n_2} a^k \pi_k - \sum_{k\leqslant -n_2} \pi_k \neq 0,$$

что противоречит (51). Следовательно,

$$\sum_{k\leqslant -n_2} a^k \pi_k = \sum_{k\leqslant -n_2} \pi_k = 0,$$

т. е. $F_n = 0$ при всех $n \in (n_1, n_2)$. В силу (13) из $F_n = 0$ следует $F_{-n} = 0$. Таким образом, $F_n = 0$ для всех n из внутренней части дополнения к V. Если V—ограниченное множество и $n_0 = \max\limits_{n\in V} n$, то $F_n = 0$ при $n > n_0$, так как

$$\pi_k = 0, \ |k| > n_0.$$

Таким образом, $L_{-1}\Gamma_n \equiv L_1 \Gamma_n$.

Покажем теперь, что из (51) следует $\Sigma \in N_n$ при всех n. Обозначим

$$\sum_{k=n}^{\infty} \pi_k = \Phi_n.$$

Из (52) и равенств

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi_k = 0, \ L_{-1}\Gamma_n \equiv L_1 \Gamma_n$$

получаем при всех n

$$\sum_{k\leqslant -n} a^{k-1} \Phi_k = 0.$$

Отсюда $\Phi_k \equiv O$, т. е. $\pi_k \equiv O$, что означает выполнение условия (A). Следовательно, $\Sigma \in N_n$ при всех n.

Наконец, установим, что из $\Sigma \in N_2$ следует (51). Пусть (51) не выполнено, т. е. для некоторого $k_0 \in \mathbf{V}$.

$$L\Gamma_{k_0} < \tilde{L}\Gamma_{k_0}.$$

Существует i_0, для которого $p\{y_{i_0} = a^{k_0}\} \neq 0$. При этом аналогично (45)

$$L^2\Gamma_0 \leqslant L_{i_0} L\Gamma_0 < L_{i_0}\tilde{L}\Gamma_0 \leqslant \tilde{L}^2\Gamma_0,$$

значит, $\Sigma \overline{\in} N_2$. Таким образом, если $\Sigma \in N_2$, то $\Sigma \in N_n$ при всех n, откуда в силу (39) следует i.

ii). Пусть $\lambda=1$, $p_0\neq 0$. В силу (41) при этом все классы N_k, $k\geqslant 2$ совпадают.

Докажем, что требование $p_0\neq 0$ нельзя отбросить. Зададим $0<i<j<k<2i$, и пусть

$$V=(-k,-j,-i,i,j,k).$$

Вероятности p_n, $n\in V$ подчиним условиям (47) и

$$a^{-k}p_{-k}+a^{-j}p_{-j}+a^{-i}p_{-i}=p_i+p_j+p_k,\ p_i\neq a^{-i}p_{-i}.$$

Непосредственно проверяется, что $\Sigma\overline{\in}N_2$, но $\Sigma\in N_3$. Таким образом, при $\lambda=1$, $p_0=0$ получаем $N_2\neq N_3$.

Более того, как следует из рассмотрения этой же системы для $i=3$, $j=4$, $k=5$ и $i=4$, $j=5$, $k=6$ при $\lambda=1$, $p_0=0$

$$N_3\neq N_5\neq N_2.$$

iii). Пусть $\lambda\neq 1$ и при некотором $k_1>0$

$$p_k=0,\ |k|>k_1.$$

Пусть также $|k_0|\geqslant 2k_1$. В силу (50), (15)

$$L_j\Gamma_k=\Gamma_k,\ j=\pm 1,\ |k|\geqslant k_1,$$

т. е.

$$L\Gamma_k=\widetilde{L}\Gamma_k=\Gamma_k,\ |k|\geqslant k_1,$$

откуда

$$(\widetilde{L}^2-L^2)\Gamma_{-k_0}=0.$$

Таким образом, в силу (7) $\Sigma\in N_2$.

В то же время, если сосредоточить распределение $\{p_k\}$ в точках $k=-1,0,2$, то как непосредственно проверяется,

$$L_{-1}\widetilde{L}\,\Gamma_0\neq L_1L\Gamma_0. \tag{53}$$

Это означает, что начиная с некоторого n, система Σ не принадлежит ни к одному из классов N_n, так как иначе по теореме 3 было бы выполнено условие (А), что противоречит (53).

6. Соотношения между классами N_n и N_n^p.

Теорема 6. *Для любого n*

$$N_n\neq N_n^p.$$

Доказательство. Зададим n. Пусть в обозначениях (24) $A_{-1}=A_1$. Тогда аналогично (29) при $\nu=0,n-1$

$$I_\nu=R_n(\nu+1)-R_n(\nu)=c\int e^{iw\ln\lambda}[\Psi_1(w)]^\nu[\Psi_{-1}(w)]^{n-1-\nu}-$$

$$-\Psi_{-1}(w)]\,w^{-1}(i-w)^{-1}\,dw,$$

где интегрирование производится по прямой $v=0$. Переходя к интегрированию по прямой $w=u+\frac{i}{2}$, как и в доказательстве теоремы 3, получаем

$$I_\nu = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\ln\lambda} [\Psi(u)]^\nu [\Psi(-u)]^{n-1-\nu} [\Psi(u) - \Psi(-u)] \frac{du}{1+4u^2}, \quad (54)$$

где согласно (23)

$$\Psi(u) = \frac{\Psi_{-1}\left(-u + \frac{i}{2}\right)}{\Psi_{-1}\left(\frac{i}{2}\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dF(t),$$

$$dF(t) = e^{\frac{t}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{2}}\, dF_{-1}(t) \right]^{-1} dF_{-1}(t). \quad (55)$$

Пусть

$$dF(t) = p(t)\, dt. \quad (56)$$

Тогда условие $A_{-1} = A_1$ принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{t}{2}\, p(t)\, dt = 0, \quad (57)$$

и

$$I_\nu = c \sum_{j=\pm 1} j \int_{D_j} \operatorname{sh} \frac{1}{2} (t_{\nu+1, n-1} - t_{1,\nu} + jt_n - \ln\lambda) \prod_{i=1}^{n} p(t_i)\, dt_i, \quad (58)$$

где

$$t_{r,s} = t_r + \ldots + t_s,$$

$$D_j = \{t_{\overline{1, n}} : t_{\nu+1,n-1} - t_{1,\nu} + jt_n > \ln\lambda\}, \ j = \pm 1.$$

Зададим $\Delta \gg \alpha > 0$ и пусть

$$p(t) = 0, \ |t| > \Delta; \ \ln\lambda = n\Delta - \alpha. \quad (59)$$

В силу (54), (58) включение $\Sigma \in N_n^p$ равносильно выполнению условий

$$\int_D \operatorname{sh} \frac{\alpha - \tau_{1,n}}{2} \prod_{i=\nu+1}^{n-1} p(\Delta - \tau_i) \sum_{k=1}^{\nu} p(\tau_k - \Delta) [p(\Delta - \tau_n) - p(\tau_n - \Delta)] \times$$

$$\times d\tau_1 \ldots d\tau_n = 0, \ \nu = \overline{0, n-1},$$

т. е.

$$\int_D \operatorname{sh} \frac{\alpha - \tau_{1,n}}{2} \prod_{i=1}^{\nu} h(\tau_i) \prod_{j=\nu+1}^{n} g(\tau_j)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n = 0, \ \nu = \overline{0, n-1}, \quad (60)$$

где

$$D = \{\tau_{\overline{1,n}}: \tau_{1,n} < \alpha\},\ g(\tau) = p(\Delta - \tau) - p(\tau - \Delta),\ h(\tau) = \\ = p(\Delta - \tau) + p(\tau - \Delta).$$

Зададим

$$\varepsilon > 0,\ \beta_i \in \left(\left(1 - \frac{n-i+1}{2n}\right)\alpha,\ \left(1 - \frac{n-i}{2n}\right)\alpha\right),\ i = \overline{1, n}$$

и будем искать $g(t)$, $h(t)$ в виде

$$h(t) = h_0(t) + h_1(t),\ g(t) = g_0(t) + g_1(t),$$

где

$$h_1(t) = g_1(t) = 0,\ t < \alpha,$$

$$h_0(t) = 1(t) + 1\left(t - \frac{\alpha}{2n}\right), g_0(t) = \varepsilon\left[1(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i 1(t - \beta_i)\right],$$

$$1(t) = \begin{cases} 1,\ t > 0, \\ 0,\ t < 0. \end{cases}$$

Покажем, что подбором $a_{\overline{1,n}}$ можно удовлетворить условиям (60). Вводя преобразования Лапласа $G_i(p)$, $H_i(p)$ функций $\frac{1}{\varepsilon} g_i(t)$, $h_i(t)$ и обратное преобразование Лапласа $\chi_j(t)$ функции

$$[H_0(p) + H_1(p)]^j [G_0(p) + G_1(p)]^{n-j},$$

получаем вместо (60)

$$\int_0^\alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha - u}{2} \chi_j(u)\, du = 0,\ j = \overline{0, n-1}. \tag{61}$$

Нетрудно показать, что для $0 \leqslant u \leqslant \alpha$

$$\chi_j(u) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{j} C_j^k \left(u - \frac{k\alpha}{2n}\right)^{n-1} 1\left(u - \frac{k\alpha}{2n}\right) + (n-j) \sum_{i=1}^{n} a_i \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=0}^{\min\{j, n-i\}} C_j^k \left(u - \beta_i - \frac{k\alpha}{2n}\right)^{n-1} 1\left(u - \beta_i - \frac{k\alpha}{2n}\right)\right]$$

и (61) преобразуется к виду

$$\frac{1}{n-j} \sum_{k=0}^{j} C_j^k F\left(\frac{k\alpha}{2n}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{\min\{j, n-i\}} C_j^k F\left(\beta_i + \frac{k\alpha}{2n}\right) = 0,\ j = \overline{0, n-1}, \tag{62}$$

где

$$F(z) = \int_z^\alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha - u}{2} (u - z)^{n-1}\, du.$$

Для определения $a_{\overline{1,n}}$ получена система уравнений (62), определитель которой

$$\prod_{i=1}^{n} F\left(\beta_i + (n-i)\frac{\alpha}{2n}\right) \neq 0.$$

Таким образом, эта система однозначно разрешима относительно $a_{\overline{1,n}}$, и функция $\frac{1}{\varepsilon} g_0(\tau)$ найдена, причем для достаточно малых ε

$$h(\tau) - |g(\tau)| > 0,\ 0 < \tau < \alpha.$$

Остается доопределить плотность $p(t)$ при $|t| < \Delta - \alpha$ так, чтобы выполнялись условие нормировки и (57):

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} p(t)\, dt = 1,\ \int_{-\Delta}^{\Delta} \operatorname{sh} \frac{t}{2} p(t)\, dt = 0$$

или, в других обозначениях,

$$\int_0^{\Delta - \alpha} h_2(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_0^\alpha h(t)\, dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\Delta - \alpha} \operatorname{sh} \frac{t}{2} g_2(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha - t}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} g(t)\right] dt = 0,$$

где

$$h_2(t) = \frac{1}{2}[p(t) + p(-t)],$$

$$g_2(t) = \frac{1}{2}[p(t) - p(-t)].$$

Это достигается подбором функций $h_2(t)$, $g_2(t)$ при $0 < t < \Delta - \alpha$. При этом $\inf h_2(t) > 0$ и можно считать ε настолько малым, что

$$h_2(t) - |g_2(t)| > 0,\ t \in (0, \Delta - \alpha).$$

Таким образом, получена некоторая система $\Sigma_0 \in N_n^p$. Покажем, что $\Sigma_0 \overline{\in} N_n$. Если $\Sigma_0 \in N_n$, то в силу (9), (10) почти везде по мере $p_{z_{n-1}}$

$$L_{-1} \Gamma\left(\frac{z_{n-1}}{\lambda}\right) = L_1 \Gamma\left(\frac{z_{n-1}}{\lambda}\right),$$

т. е. согласно (20)

$$\int\limits_{0}^{\frac{\lambda}{z_{n-1}}} [\Phi_{-1}(y) - \Phi_1(y)]\, dy = 0, \tag{63}$$

где

$$\Phi_j(y) = p\{y_j > y\}.$$

Построенная выше плотность $p(t)$ строго положительна при $|t| < \Delta$. Поэтому согласно (55), (56), (23) плотности распределения по мере Лебега величин y_{-1}, z_{n-1} строго положительны соответственно на интервалах $(e^{-\Delta}, e^{\Delta})$ и $(e^{-(n-1)\Delta}, e^{(n-1)\Delta})$. Следовательно, в силу (59), (63) функции $\Phi_j(y)$ должны совпадать на интервале $(0, e^{(2n-1)\Delta-\alpha})$. Но

$$\Phi'_{-1}(y) = cy^{-\frac{3}{2}} p(\ln y), \ \Phi'_1(y) = cy^{-\frac{3}{2}} p(-\ln y), \ y \in (e^{-\Delta}, e^{\Delta}),$$

причем функция $p(t)$ не является четной. Следовательно,

$$\Phi_{-1}(y) \not\equiv \Phi_1(y), \ y \in (e^{-\Delta}, e^{\Delta}),$$

т. е. условие (63) не выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., «Наука», 1966. 628 с.
2. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., «Наука», 1972. 304 с.
3. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей (СМБ). М., «Наука», 1973. 494 с.
4. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 247 с.

Поступила 6 ноября 1973 г.