УДК 513.88

О. С. СЕМИГУК, Н. И. СКИБА

ОБЩИЕ БАЗИСЫ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Пусть D — односвязная область на комплексной плоскости, $K \subset D$ — континуум. В [1] В. Д. Ерохин построил общий базис в пространствах $A(D)$ и $A(K)$. В. П. Захарюта [2] предложил другой метод построения общего базиса в этих пространствах, который будет применяться в данной работе. Н. Т. Ван [3] обобщил результат В. Д. Ерохина на случай регулярных областей и компактов на плоскости, причем для получения этого факта автор использовал схему доказательства основной теоремы из [2] в неизмененном виде. Последний результат в этом направлении был получен В. П. Захарютой [4, теорема 4. 5], где доказывается теорема о существовании общего базиса в пространствах $A(K_D)$ и $A(D)$ для C^n -регулярного компакта K на многообразии Штейна размерности n и усиленно псевдовыпуклой окрестности D компакта K.

Основным результатом настоящей статьи является теорема о существовании общего базиса в некоторых пространствах аналитических функций на римановых поверхностях, сформулированная и доказанная в 2. Эта теорема дает ответ на один из вопросов, поставленных в [5], и при $n=1$ усиливает упомянутый выше результат из [4]. В 1 собраны некоторые вспомогательные сведения о пространствах аналитических функций на римановых поверхностях, необходимые в последующем изложении.

1. Обозначения и предварительные рассмотрения

1. Пусть Ω — открытая (т. е. некомпактная) риманова поверхность над C, $\pi:\Omega \to C$ — проекция (определения см. в [6, с.

383—384]). Как и в случае плоскости, относительно компактную область $D \subset \Omega$ назовем регулярной, если для любой непрерывной функции $f(p)$, заданной на границе ∂D области D, существует функция, гармоническая в D и непрерывная в $\overline{D}$, совпадающая на ∂D с f, т. е. разрешима задача Дирихле. Открытое множество $G \subset \Omega$ регулярно, если каждая его компонента — регулярная область. Компакт K назовем регулярным, если для любого открытого регулярного множества $G(K < G \subset \Omega)$ $G \setminus K$ регулярно.

2. Беенке и Штейн [7] доказали существование на Ω обобщенного ядра Коши, а именно функции $A(p, q)$ со следующими свойствами:

а) $A(p, q)$ определена и однозначна на $\Omega \times \Omega$;

б) $A(p, q)$ мероморфна на $\Omega \times \Omega$;

в) пусть $p = p(t) \in \Omega$, где t — локальный параметр в окрестности точки $p_0 \in \Omega$, $q = q(\tau) \in \Omega$, где τ — локальный параметр в окрестности точки $q_0 \in \Omega$; тогда в окрестности точки (p_0, q_0) справедливо представление

$$A(p(t), q(\tau)) \frac{d\pi(p(t))}{dt} = \begin{cases} S(t, \tau), \ p_0 \neq q_0 \\ \dfrac{1}{t-\tau} + R(t, \tau), \ p_0 = q_0, \end{cases}$$

где $S(t, \tau)$; $R(t, \tau)$ — функции, аналитические в окрестности точки (о, о).

Эту функцию называют элементарной функцией 1-го порядка.

3. Пусть $F \subset \Omega$. Функцию $f(p)$ называют «бианалитической» в $F^* = \Omega \setminus F$ относительно ядра $A(p, q)$, если: 1) $f(p)$ аналитична в дополнении некоторого компактного подмножества M из F и 2) $f(p)$ можно представить с помощью «формулы Коши»:

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(q) A(p, q)\, dq,$$

где Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, ограничивающая множество N такое, что $N \subset M$ и $p \overline{\in} N$ (см. [8].

4. Рассматриваются следующие функциональные пространства (см. [8]:

а) пусть $F \subset \Omega$ — область или совершенный компакт. Во множестве ростков функций, аналитических на F («бианалитических» на F^*), вводим норму

$$\|f\|_F = \sup_{p \in F} |f(p)| \ (\|f\|_{\partial F^*} = \sup_{p \in \partial F^*} |f(p)|).$$

Пополнение полученного пространства обозначим через

$$AC(F)(\widetilde{A}\, C(F^*)).$$

Пусть $D \subset \Omega$ — открытое множество и D_s — открытые множества такие, что $\overline{D}_s \subset D_{s+1}$, $\bigcup D_s = D$, $s = 1, 2, \ldots$ Пусть, далее, $K \subset \Omega$ — компакт, G_s — открытые множества, $G_s \supset \overline{G}_{s+1}$, $\bigcap\limits_{s} G_s = K$,

$s=1,2,\ldots$ Тогда обозначим через:

$A(D)(\widetilde{A}(K^*))$ — пространство всех аналитических („бианалитических") функций в D (в K^* с топологией проективного предела

$$A(D)=\operatorname{limpr}\ AC(D_s)\ (\widetilde{A}(K^*)=\operatorname{limpr}\ \widetilde{A}C(G_s^*));$$

б) $A(K)\ (A(D^*))$ — пространство всех ростков аналитических («бианалитических») функций в K (в D^*) с топологией индуктивного предела

$$A(K)=\operatorname{limind} AC(G_s)\,(\widetilde{A}(D^*)=\operatorname{limind}\widetilde{A}C(D_s^*)).$$

5. Следующий результат, полученный Тильманом в [8], является обобщением двойственности в C (Гротендик, Кете, Себастьян-и-Сильва, см. [9]) на случай открытых римановых поверхностей.

Теорема [8, с. 90]. *Пусть Ω — открытая риманова поверхность, $F\subset\Omega$ — открытое множество или компакт. Пространство $A(F)^*$, сопряженное пространству $A(F)$, изоморфно пространству $A(F^*)$, $F^*=\Omega\diagdown F$. При этом изоморфизм задается некоторым соответствием $u^*\to u'$, таким, что*

$$u^*[f]=\int\limits_{\Gamma}u'(p)f(p)\,dp,$$

$u^*\in A(F)^*$, $f(p)\in A(F)$, $u'(p)\in\widetilde{A}(F^*)$, Γ — *произвольный спрямляемый жорданов контур, разделяющий особенности функций $f(p)$ и $u'(p)$.*

2. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть D — относительно компактная регулярная область открытой римановой поверхности Ω, $K\subset D$ — регулярный компакт такой, что $K^*=D\diagdown K$ — связно. Тогда существует общий базис в пространствах $A(D_\alpha)$, $(0<\alpha\leqslant 1)$ и $A(\overline{D}_\alpha)(0\leqslant\alpha<1)$, где $D_\alpha=\{p{:}u(K,D,p)<\alpha\}\cup K$, $\overline{D}_0=K$, $D_1=D$, $u(K,D,p)$ — решение задачи Дирихле в области $D\diagdown K$ относительно функции*

$$f(p)=\begin{cases}1, & p\in\partial D\\ 0, & p\in\partial(D\diagdown K).\end{cases}$$

1. Доказательство. Пусть H_0 и H_1 — гильбертовы пространства такие, что справедливы следующие включения с естественными вложениями:

$$A(K)\subset H_0\subset AC(K), \tag{1}$$

$$\widetilde{A}(D^*)\subset H_1'\subset\widetilde{A}C(D^*), \tag{2}$$

где H_1'' — естественная реализация пространства, сопряженного к H_1. Существование пространств H_0 и H_1 с включениями (1) и (2) следует, например, из [10, предложение 3а].

Из ядерности пространств $A(D)$ и $A(K)$ следует, что оператор вложения H_1 в H_0 ядерный. Далее, $H_1 \subset H_0$ и без ограничения общности предполагаем, что H_1 плотно в H_0. Тогда по паре (H_0, H_1) можно построить гильбертову шкалу пространств $H_\alpha = (H_0)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, включающую пространства H_0 и H_1 [11, с. 251].

Известно [10, предложение 15], что существует ортонормированный базис $\{e_k\}$ в H_0, являющийся ортогональным базисом в H_1, а также в пространствах H_α. Пусть $\|e_k\|_{H_1} = \mu_k$, можно считать, что $\mu_k \uparrow \infty$. При этом $\|e_k\|_{H_\alpha} = \mu_k^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, а из ядерности пространства $A(D)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_k \mu_k^{-\varepsilon} < \infty$.

Следующий шаг доказательства выделим в отдельную лемму.

2. ***Лемма 1.*** *Пусть H_0, H_1 — гильбертовы пространства, удовлетворяющие непрерывным вложениям*

$$H_1 \subset A(D) \subset H_0 \subset AC(K), \tag{3}$$

и H_1 плотно в H_0. Тогда справедливы непрерывные вложения

$$H_\alpha \subset A(D_\alpha), \ 0 < \alpha < 1, \tag{4}$$

где $H_\alpha = (H_0)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha$ — гильбертова шкала, натянутая на пару (H_0, H_1).

Доказательство. Действительно, из правой части вложения (3) следует $|e_k|_k \leqslant C_0 \|e_k\|_{H_0} \leqslant C_0$, где $\{e_k\}$ — общий ортогональный базис в пространствах H_0 и H_1. Так как область D относительно компактная и регулярная, то $\overline{D_\beta} \subset D_\gamma$ при $\beta < \gamma$ и $D = \cup D_\beta$. Таким образом, справедлива формула

$$A(D) = \operatorname*{limpr}_{\beta \uparrow 1} AC(D_\beta). \tag{5}$$

Из левой части (3) и формулы (5) следует

$$|e_k|_{D_\beta} \leqslant C_1(\beta) \|e_k\|_{H_1} = C_1(\beta) \mu_k.$$

Теперь по теореме о двух константах имеем

$$|e_k|_{D_\alpha} \leqslant C_2(\alpha, \varepsilon) \mu_k^{\alpha+\varepsilon}, \ \varepsilon > 0, \ 0 < \alpha < 1.$$

Таким образом, получаем следующую оценку:

$$|x|_{D_{\alpha-2\varepsilon}} = |\sum_k c_k e_k|_{D_{\alpha-2\varepsilon}} \leqslant C_2(\alpha - 2\varepsilon, \varepsilon) (\sum_k |c_k| \mu_k^\alpha \mu_k^{-\varepsilon}) \leqslant C_3(\alpha, \varepsilon) \|x\|_{H_\alpha}.$$

Из последних неравенств вытекает (4). Лемма доказана. Аналогично устанавливается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть H_0, H_1 — гильбертовы пространства, удовлетворяющие непрерывным вложенцям*

$$H_0' \subset \widetilde{A}(K^*) \subset H_1' \subset \widetilde{A}C(D^*), \tag{6}$$

и H_0' плотно в H_1'. Тогда справедливы непрерывные вложения

$$H_\alpha' = (H_1')^\alpha (H_0')^{1-\alpha} \subset \widetilde{A}(\overline{D}_\alpha^*), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{7}$$

3. Следствие. *Если гильбертовы пространства удовлетворяют условиям* (1) *и* (2), *то справедливы непрерывные вложения*

$$A(\bar{D}_\alpha) \subset H_\alpha \subset A(D_\alpha),\ 0 < \alpha < 1. \tag{8}$$

Действительно, правое вложение получено в лемме 1. Докажем левое. Переходя к сопряженным пространствам в левой части (1) и используя соотношения двойственности Тильмана (1, п. 5), получаем непрерывное вложение $H_0' \subset \tilde{A}(K^*)$, где H_0' — естественная реализация пространства, сопряженного к H_0. Учитывая правое включение (2) и плотность вложения H_0' в H_0', видим, что выполняются условия леммы 2, т. е. имеем непрерывные вложения (7). Переходя в (7) к сопряженным пространствам и учитывая рефлексивность $\tilde{A}\ (\bar{D}^*_\alpha)$, получим левое вложение (8).

Заметим, что из вложений (8) вытекают неравенства

$$M_1(\alpha, \varepsilon)\, \mu_k^{\alpha-\varepsilon} \leqslant |e_k|_{D_\alpha} \leqslant M_2(\alpha, \varepsilon)\, \mu_k^{\alpha+\varepsilon}. \tag{9}$$

4. Обратимся теперь к доказательству теоремы. Из следствия вытекает, что

$$A(D_\alpha) = \operatorname*{limpr}_{\beta \uparrow \alpha} H_\beta,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{10}$$

$$A(\bar{D}_\alpha) = \operatorname*{limind}_{\beta \downarrow \alpha} H_\beta,\ \ 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{11}$$

где $D_1 = D$, $\bar{D}_0 = K$, т. е. $\{e_k\}$ — общий базис для пространств $A(\bar{D}_{\alpha_1})$ и $A(D_{\alpha_2})$, $0 \leqslant \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 \leqslant 1$, в частности, базис $\{e_k\}$, общий для $A(K)$ и $A(D)$.

Теорема доказана полностью.

5. Пусть $K \subset \Omega$ — компакт. Открытое множество $D \subset \Omega$ назовем окрестностью Рунге компакта K, если $K \diagup D$ и $A(D)$ плотно в $A(K)$.

Заметим, что теорема 1 останется справедливой, если в ней вместо требования $D \setminus K$ — связно, потребовать, чтобы область D была окрестностью Рунге компакта K.

6. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть D — открытое относительно компактное множество открытой римановой поверхности Ω. Для изоморфизма $A(D) \simeq A_1$, необходимо и достаточно, чтобы D было регулярным и состояло из конечного числа связных компонент (здесь A_1 — пространство функций, аналитических внутри единичного круга на плоскости).*

Необходимость этой теоремы в более общем виде доказана в [4, теорема 4. 3]. Достаточность можно получить двумя способами. Во-первых, так как ввиду (10) $A(D)$ есть конечный центр гильбертовой шкалы, то достаточность теоремы вытекает из леммы 2. 1а [12, с. 110]. Во-вторых, так как в $A(D)$ есть базис, что доказано в теореме 1, то применяя теорему 4.3 из [4], получим требуемое.

Теорема 2 обобщает результаты работы [13, теорема 4] на случай открытых римановых поверхностей, а также усиливает при $n=1$ теорему 4.3 из [4].

В заключение выражаем искреннюю благодарность В. П. Захарюте за руководство работой.

В заключение выражаем искреннюю благодарность В. П. Захарюте за руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерохин В. Д. О конформных преобразованиях колец и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности произвольного континуума. — «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 5, с. 949—952.
2. Захарюта В. П. О продолжаемых базисах в пространствах аналитических функций одного и многих переменных. — «Сиб мат. журн.», 1967, т. 8, № 2, с. 277—292.
3. Nguyen Thanh Van. Bases de Schauder dans espaces de function holomorphes. — «Ann. Inst. Fourier», 1972, vol. 22, № 2, p. 169—253.
4. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизмы пространств аналитических функций многих переменных. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 19, Харьков, 1974, с. 133—157.
5. Драгилев М. М., Захарюта В. П., Хапланов М. Г. О некоторых проблемах базиса аналитических функций. — Сб. «Актуальные проблемы науки», Ростов-на-Дону, 1967, с. 91—102.
6. Гурвиц А., Курант Р. — «Теория функций», пер. с. англ., М., «Наука», 1968. 648 с.
7. Behnke H., Stein K. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. — «Math. Ann», 1949, vol. 120, p. 430—461.
8. Tilmann H. Dualität in Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen. — «J. reine und angew. Math.», 1956, vol. 195, № 1—2, p. 76—101.
9. Хавин В. П. Двойственность пространств аналитических функций и некоторые ее применения. — Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций». М., «Наука», с. 311—314.
10. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах. — «Усп. мат. наук», 1961, т. 16, № 4, с. 63—132.
11. Бирман М. Ш. Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1972. 251 с.
12. Митягин Б. С., Хенкин Г. М. Линейные задачи комплексного анализа. — «Усп. мат. наук», 1971, т. 26, № 4, с. 93—152.
13. Захарюта В. П. Пространства функций одного переменного, аналитических в открытых множествах и на компактах. — «Мат. сб.», 1970, т. 82, № 1, с. 84—98.

Поступила 23 июня 1973 г.