УДК 513.83

Е. Е. ОЛЬБИНСКИЙ

О СОПРЯЖЕННОСТИ РОСТКОВ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ

Пусть $F,\ G:(R^m, 0) \to (R^m, 0)$ — ростки диффеоморфизмов в начале координат. Ростки F и G называются сопряженными в классе C^s, если существует такой росток C^s-диффеоморфизма $\Phi:(R^m, 0) \to (R^m, 0)$, что $\Phi(F) = G(\Phi)$. Будем говорить, что $\varphi \in C^{k,\alpha}$, если φ имеет k-ю производную, принадлежащую Lip α. В [1] установлено, что росток $C^{k,1}$ -диффеоморфизма

$$G(x) = \Lambda x + g(x); \quad g(x) = O(\|x\|^k) \tag{1}$$

сопряжен с Λ в классе $C^{\left[\frac{k}{m}\right]}$, если Λ — линейный оператор со спектром вне единичной окружности. Другими словами, диффеоморфизм (1) приводится к нормальной форме в классе $C^{\left[\frac{k}{m}\right]}$. В статье рассматривается вопрос о приведении к нормальной форме ростков негиперболических диффеоморфизмов, т. е. допускается наличие спектра на единичной окружности.

Пусть $\Lambda: R^m \to R^m$ — линейный невырожденный оператор. Пусть, кроме того,

$$R^m = \sum_{i=1}^{r} L^{(i)} + \sum_{j=1}^{q} L_j$$

— разложение R^m в прямую сумму таких инвариантных относительно Λ подпространств, что сужение Λ на L_j имеет постоянный по абсолютной величине спектр, лежащий вне единичной окружности, а спектр сужения Λ на $L^{(i)}$ лежит целиком на единичной окружности. Обозначим через $P^{(i)}$ (соответственно P_j) ортопроектор на $L^{(i)}$ (соответственно на L_j). Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $\| P^{(i)} \Lambda \| = 1$, $(i=1, \ldots, r)$. Это означает, что сужение Λ на $L^{(i)}$ является диагонализуемым оператором.

Пусть теперь $F: (R^m, 0) \to (R^m, 0)$ — росток в начале координат C^∞-диффеоморфизма $F(x) = \Lambda x + f(x)$ с линейным приближением Λ, причем подпространства $L^{(i)}$ и L_j инвариантны относительно F. Пусть, кроме того, существуют такие целые $n_i > 0$, что

$$D_i(F) \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{x \to 0} \frac{\|P^{(i)} \Lambda - P^{(i)} F'(x)\|}{\|P^{(i)} x\|^{2n_i}} < \infty,$$

$$d_i(F) \overset{\text{def}}{=} \varliminf_{x \to 0} \frac{1 - \|P^{(i)} F'(x)\|}{\|P^{(i)} x\|^{2n_i}} > 0.$$

Положим $\gamma(F) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \dfrac{D_i(F)}{d_i(F)}$; $\quad N = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i$.

Справедлива

Теорема. *Пусть* $G: (R^m, 0) \to (R^m, 0)$ — *росток в начале координат* $C^{k,\alpha}$-*диффеоморфизма*

$G(x) = F(x) + g(x)$, $g(x) = 0(\|x\|^{k+\alpha})$, $\alpha > 0$,

где для k *выполняется условие*

$$s \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{k - 2(N+r)}{q+r} \right] > \gamma(F).$$

Тогда G *сопряжен с* F *в классе* C^s.

Доказательство. Сначала будем считать, что все $L^{(i)}$ и $L_j (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, q)$ одномерны и $P^{(i)} x = \xi_i$, $P_j x = \eta_j$, если $x \in R^m$ и $x = (\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_q)$.

Мы будем искать $\Phi(x)$ в виде $\Phi(x) = x + \varphi(x)$. Тогда условие сопряженности ростков F и G запишется в виде уравнения относительно φ:

$$\varphi(F(x)) + F(x) = F(x + \varphi(x)) + g(x + \varphi(x)). \tag{2}$$

Пусть $Q = (q_1, \ldots, q_m)$ — мультииндекс и $\psi: R^m \to R^m$.

Положим

$$\psi^{(Q)}(x) = \frac{\partial^Q \psi(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_m^{q_m}},$$

если эта частная производная существует. Пусть $T=(t_1, \ldots, t_m)$ — мультииндекс. Будем говорить, что $\psi \in C^{T,\alpha}$, если существуют и непрерывны частные производные $\psi^{(Q)}(x)$ для всех* $Q \leqslant T$ и $\psi^{(T)}(x)$ принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Пусть $M=(k_1, \ldots, k_r, p_1, \ldots, p_q)$ — — такой мультииндекс, что $\sum_{i=1}^{r} k_i + \sum_{j=1}^{q} p_j = k$, Так как $g \in C^{k,\alpha}$, то тем более $g \in C^{M,\alpha}$.

Пусть $u=(u^1, \ldots, u^r, u_1 \ldots, u_q)$, $v=(v^1, \ldots, v^r, v_1, \ldots, v_q)$ —такие мультииндексы, что v^i и v_j могут принимать только два значения: 0 или 1; $u \leqslant M$ и, кроме того, u^i (соответственно u_j) может быть отлично от нуля только в том случае, когда $v^i=0$ (соответственно $v_j=0$). Будем писать $(\tilde{u}, \tilde{v}) < (u, v)$, если $\tilde{v} \leqslant v$ и $\tilde{v} \neq v$ или $\tilde{v}=v$, но $\tilde{u} \leqslant u$ и $\tilde{u} \neq u$.

Пусть $x \in R^m$, $x=(\xi_1, \ldots \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_q)$. Положим $x_v=(\xi_1', \ldots, \xi_r', \eta_1', \ldots, \eta_q')$, где $\xi_i'=\xi_i$ (соответственно $\eta_j'=\eta_j$), если $v^i=1$ (соответственно $v_j=1$), и $\xi_i'=0$ (соответственно $\eta_{j-}'=0$,) если $v^i= =0$ (соответственно $v_j=0$). Положим далее $\overline{x}_v = x - x_v$.

Обозначим через $J^M_{(u,v)}$ пространство ростков отображений вида

$$\varphi(x)=x^u \psi(x_v),\ x^u=\xi_1^{u^1} \xi_r^{u^r} \eta_1^{u_1} \eta_q^{u_q},$$

причем $\psi^{(Q)}(x_v)$, $(Q \leqslant M)$ обращается в нуль как только какая-нибудь из фактически входящих в x_v координат равна нулю. Тогда сумма

$$J^M = \sum_{(u,v) < (\overline{u}, \overline{v})} J^M_{(u,v)},\quad \overline{v^i}=\overline{v}_j=1 \quad (i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, q)$$

прямая и совпадает с пространством ростков таких C^M-отображений $\varphi:(R^m, 0) \to (R^m, 0)$, что $\varphi^{(Q)}(0)=0$, $Q \leqslant M$. Проекторы $P_{(u,v)} : J^M \to J^M_{(u,v)}$ действуют по формуле:

$$(P_{(u,v)}\varphi)(x) = x^u \left\{ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^u} \left[\varphi(x) - \sum_{(u',v') < (u,v)} (P_{(u',v')}\varphi)(x) \right] \right\} \Bigg|_{\overline{x}_v=0}.$$

Положим

$$(A\varphi)(x) = \varphi(F(x)) - [F(x+\varphi(x)) - F(x)] - [g(x+\varphi(x)) - g(x)]$$

Покажем, что уравнение

$$A\varphi = \nu \tag{3}$$

---

* Мы считаем, что множество всех мультииндексов естественно упорядочено: $Q \leqslant T$ тогда и только тогда, когда $q_i \leqslant t_i$ $(i=1 \ldots m)$.

имеет решение $\varphi \in J^M$ при любом ν класса $C^{M,\alpha}$, принадлежащем J^M. Для этого достаточно, в свою очередь, доказать, что уравнение

$$P_{(u,v)} A (\varphi + \psi) = \sigma, \ (u, v) < (\bar{u}, \bar{v}) \tag{4}$$

разрешимо относительно φ при любом $\sigma \in C^{M,\alpha}$, принадлежащем $J^M_{(u,v)}$, и любом $\psi \in J^M$.

Решим сначала уравнение (4) для того случая, когда $v_j = 0$ ($j = 1, \ldots, q$). Решение уравнения (4) мы сразу будем искать в пространстве $J^{\ M}_{(u,\ v)}$. Пусть для определенности

$$(P_{(u,v)} \psi)(x) = \eta_1^{r_1} \ldots \eta_l^{r_l} \psi_1 (\xi_1, \ldots, \xi_h), \quad l \leqslant q, \ h \leqslant r$$

уравнение (4) запишем в виде

$$\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l} \varphi ((Fx)_v) - \Lambda \varphi (x_v) + (H\varphi)(x) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — собственные значения сужения Λ на $L_1, \ldots, L_l$ соответственно. Уравнение (5) перепишем в координатной форме в виде двух групп уравнений. Первая группа:

$$\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l} \varphi_i (\mu_1 \xi_1 + f_1 (x_v), \ldots, \mu_h \xi_h + f_h (x_v)) - \mu_i \varphi_i (x_v) + (H\varphi)_i (x) = 0, \quad (i \leqslant r). \tag{6}$$

Здесь $\mu_i = \pm 1$ — собственное значение сужения Λ на $L^{(i)}$, а

$$f_n (x_v) = (P^{(n)} f)(x_v), \ (n = 1, \ldots, h).$$

Вторая группа:

$$\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l} \varphi^j (\mu_1 \xi_1 + f_1 (x_v), \ldots, \mu_h \xi_h + f_h (x_v)) - \lambda_j \varphi^j (x_v) + \\ + (H\varphi)^j (x) = 0, \quad (j \leqslant q). \tag{7}$$

Если $|\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l}| \leqslant 1$, то группу уравнений (6) запишем так:

$$\varphi_i (x_v) = \mu_i^{-1} \lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l} \varphi_i (\mu_1 \xi_1 + f_1 (x_v), \ldots, \\ \ldots, \mu_h \xi_h + f_h (x_v)) + (H\varphi)_i (x), \ (i = 1, \ldots, r). \tag{8}$$

Если же $|\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l}| > 1$, то после замены переменной

$$\mu_n \xi_n + f_n (x_v) \to \xi_n, \ (n = 1, \ldots, h)$$

группу уравнений (6) перепишем в виде

$$\varphi_i (x_v) = \mu_i \lambda_1^{-r_1} \ldots \lambda_l^{-r_l} \varphi_i (\mu_1^{-1} \xi_1 + \tilde{f}_1 (x_v), \ldots, \mu_h^{-1} \xi_h + \tilde{f}_h (x_v)) + \\ + (\tilde{H}\varphi)_i (x), \ (i \leqslant r). \tag{9}$$

С группой уравнений (7) поступим аналогично: если $|\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l} \lambda_j^{-1}| \leqslant \leqslant 1$, то j-е уравнение из группы уравнений (7) перепишем так:

$$\varphi^j (x_v) = \lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_l^{r_l} \lambda_j^{-1} \varphi^j ((Fx)_v) + (H\varphi)^j (x). \tag{10}$$

Если же $|\lambda_1^{r_1}\ldots\lambda_l^{r_l}\lambda_l^{-1}| > 1$, то i-е уравнение после замены переменной

$$\mu_n \xi_n + f_n(x_v) \to \xi_n, \ (n = 1, \ldots, h)$$

будет иметь вид

$$\varphi^j(x_v) = \lambda_j \lambda_1^{-r_1} \ldots \lambda_l^{-r_l} \varphi^j (\mu_1^{-1} \xi_1 + \tilde{f}_1(x_v), \ldots, \mu_h^{-1} \xi_h + \tilde{f}_h(x_v)) +$$

$$+ (\tilde{H}\varphi)^j (x). \tag{11}$$

Получившуюся таким образом систему уравнений (8) (или (9)), а также (10) и (11) запишем таким образом:

$$\varphi = B\varphi. \tag{12}$$

Пусть $V(\delta)$ — замкнутая δ-окрестность начала координат. Пусть далее $\tau\ (x_v) - C^\infty$ -функция, равная нулю вне $V(\delta)$ и единице в некоторой окрестности U, содержащейся в $V(\delta)$. Тогда уравнение

$$\varphi(x_v) = \tau((Fx)_v) \cdot (B\varphi)(x_v) \tag{13}$$

совпадает с уравнением (12) в некоторой окрестности U', содержащейся в U. Введем обозначения:

$$\omega_h(\bar{\xi}_n, \xi_1, \ldots, \xi_h) = L|\xi_n - \bar{\xi}_n| \cdot \prod_{j \neq n} |\xi_j|^{t_j},\ t_j = k_j - 2(n_j + 1);\ (n \leqslant h; j \leqslant h)$$

$$\rho_j(\xi_1, \ldots, \xi_h) = C|\xi_j|^{2n_j+1},\ (j \leqslant h);\ \rho(\xi_1, \ldots, \xi_h) = \min_{1 \leqslant j \leqslant h} \rho_j.$$

Обозначим через $K(\delta, L, C)$ выпуклый компакт отображений $\psi: V(\delta) \to R^m$, определенный условиями

1. $\psi^{(Q)}(0) = 0,\ Q \leqslant T = (t_1, \ldots t_h)$, где $t_j = k_j - 2(n_j + 1)$.
2. $\|\psi^{(T)}(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_h) - \psi^{(T)}(\xi_1, \ldots, \bar{\xi}_j, \ldots, \xi_h)\| \leqslant \omega_j(\bar{\xi}_j, \xi_1, \ldots, \xi_h),$ $(j \leqslant h)$,
3. $\|\psi^{(T)}(x_v)\| \leqslant \rho(x_v)$.

Непосредственное вычисление показывает существование таких δ, L, C, что компакт $K(\delta, L, C)$ оператором, стоящим в правой части уравнения (13), переводится в себя. В силу принципа неподвижной точки [2] уравнение (13) имеет решение. Следовательно, уравнение (4) для указанных (u, v) имеет решение класса C^T.

Пусть теперь в уравнении (4) v содержит некоторые $v_j = 1$. Положим для определенности

$$(P_{(u,v)}\psi)(x) = \xi_1^{r_1} \ldots \xi_l^{r_l} \eta_1^{s_1} \ldots \eta_t^{s_t} \psi_1(\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+d}, \eta_{t+1}, \ldots, \eta_{t+h}).$$

Перепишем уравнение (4) в координатной форме в виде двух групп уравнений:

$$\lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_t^{s_t} \varphi_i(\mu_{l+1}\xi_{l+1} + f_{l+1}(x_v), \ldots, \mu_{l+d}\xi_{l+d} + f_{l+d}(x_v),\ \lambda_{t+1} +$$

$$+ \eta_{t+1} + f_{t+1}(x_v), \ldots, \lambda_{t+h}\eta_{t+h} + f_{t+h}(x_v)) - \mu_i \varphi_i(x_v) + (H\varphi)_i(x) = 0 \tag{14}$$

и

$$\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\varphi^j(\mu_{l+1}\xi_{l+1}+f_{l+1}(x_v),\dots,\mu_{l+d}\xi_{l+d}+f_{l+d}(x_v),\lambda_{t+1}\eta_{t+1}+$$
$$+f_{t+1}(x_v),\dots,\lambda_{t+h}\eta_{t+h}+f_{t+h}(x_v))-\lambda_j\varphi^j(x_v)+(H\varphi)^j(x)=0, \quad (15)$$
$$(j=1,\dots,q).$$

Существует $\beta<\alpha$ такое, что $|\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\lambda_{t+1}^{p_{t+1}}\dots\lambda_{t+h}^{p_{t+h}+\beta}|\neq 1$ и $|\lambda_j^{-1}\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\lambda_{t+1}^{p_{t+1}}\dots\lambda_{t+h}^{p_{t+h}+\beta}|\neq 1$. Если $|\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\lambda_{t+1}^{p_{t+1}}\dots\lambda_{t+h}^{p_{t+h}+\beta}|<1$, то группу уравнений (14) перепишем так:

$$\varphi_i(x_v)=\mu_i^{-1}\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\varphi_i((Fx)_v)+(H\varphi)_i(x)\quad (i=1,\dots,r). \quad (16)$$

Если же $|\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\lambda_{t+1}^{p_{t+1}}\dots\lambda_{t+h}^{p_{t+h}+\beta}|>1$, то после замены координат

$$\mu_{l+n}\xi_{l+n}+f_{l+n}(x_v)\to\xi_{l+n},$$
$$\lambda_{t+j}\eta_{t+j}+f_{t+j}(x_v)\to\eta_{t+j}$$

уравнение (14) перепишем в виде

$$\varphi_i(x_v)=\mu_i\lambda_1^{-s_1}\dots\lambda_t^{-s_t}\varphi_i(\mu_{l+1}^{-1}\xi_{l+1}+\tilde f_{l+1}(x_v),\dots,\mu_{l+d}^{-1}\xi_{l+d}+\tilde f_{l+d}(x_v);$$
$$\lambda_{t+1}^{-1}\eta_{t+1}+\tilde f_{t+1}(x_v)+\dots+\lambda_{h+t}^{-1}\eta_{t+h}+\tilde f_{t+h}(x_v))+(\tilde H\varphi)_i(x). \quad (17)$$

Рассматривая $|\lambda_j^{-1}\lambda_1^{s_1}\dots\lambda_t^{s_t}\lambda_{t+1}^{p_{t+1}}\dots\lambda_{t+h}^{p_{t+h}+\beta}|$ для j-го уравнения из (15) и поступая аналогично, получаем

$$\varphi^j(x_v)=\lambda_1^{s}\dots\lambda_t^{s_t}\lambda_j^{-1}\varphi^j((Fx)_v)+(H\varphi)^j(x) \quad (18)$$

или

$$\varphi^j(x_v)=\lambda_1^{-s_1}\dots\lambda_t^{-s_t}\lambda_j\varphi^j((Fx)_v^{-1})+(\tilde H\varphi)^j(x). \quad (19)$$

Введем C^∞ -функцию $\tau_1(x_v)$ и, действуя так же как для получения уравнения (13), придем к уравнению

$$\varphi(x_v)=\tau_1((Fx)_v)\cdot(B_1\varphi)(x_v). \quad (20)$$

Положим

$$\|\varphi\|=\max_{V(\delta)}\frac{\|\varphi^{(T)}(\xi_{l+1},\dots,\xi_{l+d},\eta_{t+1},\dots,\eta_{t+h})\|}{|\eta_{t+h}|^{\beta}}.$$

Здесь $T=(t_{l+1},\dots,t_{l+d},p_{t+1},\dots,p_{t+h})$, где $t_i=k_i-2(n_i+1)$, а p_j — соответствующая компонента мультииндекса M. При таком определении нормы непосредственно проверяется, что оператор, стоящий в правой части уравнения (20), сжимающий. По теореме Банаха существует решение уравнения (20), принадлежащее C^T. Таким образом, существует решение уравнения (3) класса $C^{(t_1,\dots,t_r,\,p_1,\dots,p_q)}$, где $t_i=k_i-2(n_i+1)$, а p_j—соответствующие компоненты мультииндекса M. Следовательно, существует и решение уравнения (2) того же класса. Это решение тем более принадлежит классу C^p, где $p = \min\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \{t_i, p_j\}$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{r} t +$ $+ \sum\limits_{j-1}^{q} p_j = k - 2(N + r)$, то это же решение уравнения (2) принадлежит классу C^s, где $s = \left[\dfrac{k - 2(N + r)}{q + r}\right]$. Если теперь размерности подпространств $L^{(i)}$ и L_j больше единицы, то мы действуем аналогично, оперируя вместо переменных $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots \eta_q$ с векторами из подпространств $L^{(i)}$ и L_j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белицкий Г. Р. О сопряженности локальных диффеоморфизмов. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 3, с. 515—518.
2. Tychonoff A. N. Ein Fixfunktsatz. — «Math. Ann.», 1935, vol. 111, № 5 p. 767—776.

Поступила 10 сентября 1973 г.