УДК 517.97

И. Е. ЛУЦЕНКО, Ш. АСАДИ

АНТИУНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Отображение K комплексного гильбертова пространства H на себя называется антиунитарным оператором, если для $f, g \in H$

$$(Kf, Kg) = \overline{(f, g)}.$$

Если при этом $K^2 = I$ $(If = f)$, то K называется инволюцией [2], или оператором комплексного сопряжения [1], а если $K^2 = -I$ — антиинволюцией [3, 4].

Если существует антиунитарный оператор K, связанный с ограниченным линейным оператором T одним из условий

$$(\mathrm{I})\ KTK^{-1}=T, \quad (\mathrm{II})\ KTK^{-1}=-T,$$

$$(\mathrm{III})\ KTK^{-1}=T^*, \quad (\mathrm{IV})\ KTK^{-1}=-T^*,$$

то T называется, соответственно, K-вещественным (I), K-мнимым (II), K-симметрическим (III), K-кососимметрическим (IV) [1, 9, 10].

В настоящей заметке рассматриваются методические узлы ограниченного оператора T, удовлетворяющего одному из условий (I—IV), а также их характеристические функции.

1. Метрические α-узлы и их преобразования

Совокупность гильбертовых пространств H, E, F и операторов $T\in[H, H]$, $G\in[E, H]$, $F\in[F_0\ H]$, $T_0\in\ [E, F]$ называется α-узлом и обозначается символом [5]

$$\alpha=\begin{pmatrix} H & T & H \\ F & & G \\ F_0 & T_0 & E \end{pmatrix},$$

если

$$I-TT^*=GG^+;\quad I-T_0^+T_0=G^+G;$$

$$I-T^*T=FF^+;\quad I-T_0T_0^+=F^+F; \tag{1}$$

$$TG=FT_0,$$

где G^+, F^+, T_0^+ — операторы, сопряженные соответственно с G, F, T_0 в смысле индефинитных метрик J_E. J_F пространств E, F_0. При этом оператор T называется основным оператором узла α, а пространство H — основным пространством.

Любой ограниченный оператор $T\in[H, H]$ можно включить в α-узел таким образом.

Положим

$$D_T=I-T^*T,\quad D_{T^*}=I-TT^*,$$

$$|D_T|=\sqrt{D_T^2},\quad |D_{T^*}|=\sqrt{D_{T^*}^2},$$

$$E=\overline{D_T(H)},\qquad F=\overline{D_{T^*}(H)},$$

тогда легко проверить, что операторы

$$T,\ G=|D_T|^{\frac{1}{2}}|_E;\quad F=|D_{T^*}|^{\frac{1}{2}}|_F;\quad T_0=T|_E$$

удовлетворяют условиям (I) относительно индефинитных метрик

$$J_E=\operatorname{sign}D_T|_E;\quad J_F=\operatorname{sign}D_{T^*}|_{F_0}.$$

Этот узел будем называть **стандартным минимальным узлом** и обозначим его через α_0.

Узел α называется простым [5], если пространство H совпадает с замыканием линейной оболочки множества векторов вида

$$T^nFf,\ (T^*)^nGg\ (n=0, 1, 2, \ldots, f\in F, g\in E).$$

Чтобы включить произвольный ограниченный оператор в простой узел, проведем следующее построение. Из условий узла (1) следует, что

$$\overline{D_{T^*}(H)} \subseteq \overline{F(F_0)} \subseteq H.$$

Пусть R — произвольное подпространство, такое, что $\overline{D_{T^*}(H)} \subseteq R \subseteq H$. Поставим задачу: включить оператор T в такой узел α, у которого $\overline{F(F_0)} = R$.

Для этого построим ортогональную сумму

$$F = \overline{D_{T^*}(H)} \oplus F_1 \oplus F_2, \tag{2}$$

где

$F_1 = R \ominus \overline{D_{T^*}(H)}$, $F_2 = V^{-1} F_1$ (V — унитарный оператор), и определим отображения F, J_F из F_0 в H и в F_0 формулами

$$F = |D_{T^*}|^{1/2} \oplus I \oplus V, \tag{3}$$

$$J_F = \operatorname{sign} D_{T^*} \oplus I \oplus (-I). \tag{4}$$

При этом легко проверить, что $I - TT^* = FF^+$.
Положим

$$E = \overline{R(I - F^+F)} \oplus \ker T, \tag{5}$$

$$G^+ = -F^+ U P_{\overline{R(T^*)}} \oplus P_{\ker T}, \tag{6}$$

$$T_0 = -(I - F^+F)^{1/2}, \tag{7}$$

где P — ортопроектор на соответствующее подпространство, а U — частично изометрический оператор, входящий в полярное представление оператора T:

$$T = U(T^*T)^{1/2} = (TT^*)^{1/2} U.$$

Легко проверить, что совокупность пространств H, E, F_0 и операторов T, G, F, T_0, определяемых соотношениями (2), (3), (5), (6), (7) образует α-узел, причем $R = \overline{F(F_0)}$. Такой узел будем называть R-стандартным узлом *. Очевидно, если $R = H$, то этот узел — простой. Таким образом, простота узла α получается за счет расширения пространства $\overline{D_{T^*}(H)}$ стандартного минимального узла α_0.

Пусть задан узел α и пусть K_1, K_2, K_3 — антиунитарные операторы, отображающие соответственно H, E, F_0 на себя; тогда очевидно, что операторы

$$K_1 T K_1^{-1},\ K_1 G K_2^{-1},\ K_1 F K_3^{-1},\ K_3 T_0 K_2^{-1}$$

удовлетворяют условиям (1) относительно индефинитных метрик

$$K_2 J_E K_2^{-1}, \quad K_1 J_F K_3^{-1},$$

т. е.

$$\alpha_K = \begin{pmatrix} H & K_1 T K_1^{-1} & H \\ K_1 F K_3^{-1} & & K_1 G K_2^{-1} \\ F_0 & K_3 T_0 K_2^{-1} & E \end{pmatrix}$$

---

* Авторы выражают глубокую благодарность В. М. Бродскому за весьма ценные указания, использованные в этой конструкции.

образует узел, который мы назовем антиунитарным преобразованием узла α. Очевидно, что антиунитарное преобразование простого узла есть простой узел.

Определение. *Узел α будем называть K-вещественным (K-мнимым) узлом, если существуют такие антиунитарные операторы* K_1, K_2, K_3, что выполняется условие $\alpha_K=\alpha$; $(\alpha_K = \alpha_-)$,
где

$$\alpha_- = \begin{pmatrix} H & -T & H \\ F & & G \\ F_0 & -T_0 & E \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Если узел α K-вещественный, то основной оператор K_1-вещественный, а подпространство $\overline{F(F_0)}$ проводит K_1. Наоборот, если основной оператор T K_1-вещественный, а подпространство R $(D_{T^*}(H) \subseteq R \subseteq H)$ проводит K_1, то R-стандартный узел оператора T будет K-вещественный. В частности, K_1-вещественный оператор можно включить в простой K-вещественный узел. Аналогичное утверждение справедливо для K-мнимого узла.*

Доказательство. В силу равенства узлов получим

$$K_1\overline{F(F_0)} = \overline{K_1 F(F_0)} = \overline{F(K_3 F_0)} = \overline{F(F_0)}$$

и

$$K_1^{-1}\overline{F(F_0)} = \overline{F(F_0)},$$

так, что $F(F_0)$ приводит K_1, что доказывает первую часть теоремы.

Рассмотрим R-стандартный узел K_1-вещественного оператора T. Зададим антиунитарные операторы K_3, K_2 в пространствах F_0, E равенствами

$$K_2 g = \begin{cases} K_3 g & g \in \overline{R(I - F^+ F)} \\ K_1 g & g \in \ker T, \end{cases}$$

$$K_3 f = \begin{cases} K_1 f & f \in \overline{D_{T^*}(H)} \\ K_1 f & f \in F_1 \\ V^* K_1 V f & f \in F_2. \end{cases}$$

При этом легко проверить, что имеют место соотношения

$$K_1 T K_1^{-1} = T, \; K_1 G K_1^{-1} = G,$$

$$K_1 F K_3^{-1} = F, \quad K_3 T_0 K_2^{-1} = T_0,$$

$$K_2 J_E K_2^{-1} = J_E, \quad K_3 J_F K_3^{-1} = J_F,$$

так что $$\alpha_k = \alpha.$$

Для K_1-мнимого оператора достаточно определить антиунитарный оператор K_3 в пространстве F равенством

$$K_3 f = \begin{cases} K_1 f & f \in \overline{D_{T^*}(H)} \\ V^* K_1 f & f \in F_1 \\ K_1 V f & f \in F_2, \end{cases}$$

что полностью доказывает теорему.

2. Метрические Δ-узлы обратимого оператора и их преобразования.

Совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов $T \in [H, H]$, $(T^{-1} \in [H, H])$, $G \in [E, H]$, $J \in [E, E]$, $\Phi \in [E, E]$ называется Δ-**узлом** [6—8], если

$$J = J^*;\ I - T^*T = GJG^*;$$
$$J^2 = J;\ J - G^*G = \Phi^*J\Phi. \tag{8}$$

Узел Δ обозначается символом

$$\Delta = \Delta(T) = \begin{pmatrix} T; G; J; \Phi \\ H \qquad\quad E \end{pmatrix}.$$

По данному узлу Δ можно построить узел

$$\Delta^* = \Delta(T^*) = \begin{pmatrix} T^*; F; J; \Phi^* \\ H \qquad\quad E \end{pmatrix},\ F = TG\Phi^{-1}J,$$

который называется сопряженным узлом к узлу Δ [6], при этом $(\Delta^*)^* = \Delta$.

Рассмотрим узел α с обратимым основным оператором T и с пространствами $E = F_0$. Тогда легко проверить, что операторы T, G, $F = TG\Phi^{-1}J$, $T_0 = J\Phi\ (T_0^+ = JT_0^*J)$ удовлетворяют условиям (I), причем равенство

$$TG = FT_0$$

является следствием предыдущих соотношений, следовательно, такой узел α определяет одновременно узлы Δ, Δ^*. Очевидно и обратное: узлы Δ, Δ^* определяют узел с обратимым основным оператором T и с пространствами $E = F_0$. При этом узел

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} H & T^* & H \\ G & & F \\ E & T_0^+ & E \end{pmatrix}$$

будем называть сопряженным узлом к узлу α. Ясно, что $(\alpha^*)^* = \alpha$.

Определение. *α-узел обратимого оператора T будем называть K-симметрическим (K-кососимметрическим) узлом, если существуют такие антиунитарные операторы K_1, K_2 в пространствах H, E, что выполняется условие*

$$\alpha_K = \alpha^*;\quad (\alpha_K = \alpha^*_-).$$

Теорема 2. *Если α — K-симметрический (K-кососимметрический) узел, то основной оператор K_1-симметрический (K_1-кососимметрический). Наоборот, если оператор T K_1-симметрический (K_1-кососимметрический), то среди его α-узлов найдется такой простой α-узел, что*

$$\alpha_K = \alpha^*,\quad (\alpha_K = \alpha^*_-).$$

Равенство узлов обеспечивает первую часть теоремы. Докажем вторую часть. Пусть

$$\alpha=\begin{pmatrix} H & T & H \\ F & & G \\ E & T_0 & E \end{pmatrix} \quad (F = TGT_0^{-1})$$

— какой-нибудь простой узел оператора T. По этому узлу построим узлы α^*.

$$\alpha_K=\begin{pmatrix} H & ; \quad K_1TK_1^{-1}; & H \\ K_1FK_2^{-1} & & K_1GK_2^{-1} \\ E & ; \quad K_2T_0K_2^{-1}; & E \end{pmatrix},$$

где K_2 — инволюция в пространстве E [9] такая, что

$$K_2JK_2^{-1}=J.$$

В силу условий (I) и определения узла α^* получим, что операторы

$$K_1GK_2^{-1}=F, \ K_1FK_2^{-1}=G$$

удовлетворяют соответственно уравнениям

$$FJF^*=I-TT^*=K_1GJG^*K_1^{-1},$$

$$GJG^*=I-T^*T=K_1FJF^*K_1^{-1}.$$

Используя соотношение

$$F=TGT_2^{-1},$$

находим

$$K_2T_0K_2^{-1}=T_0^*,$$

что полностью доказывает теорему.

3. Характеристические функции

Функция комплексного переменного

$$\theta_\alpha(\zeta)=T_0-\zeta F^+(I-\zeta T^*)^{-1}G, \tag{9}$$

значения которой являются линейными ограниченными операторами, действующими из E в F, называется характеристической оператор-функцией (х. о.-ф.) узла α [5].

Легко проверить, что K-вещественному (K-мнимому) узлу соответствует х. о.-ф $\theta_\alpha(\zeta)$, удовлетворяющая соответственно условию

$$(\pm I)\begin{cases} K_3\theta_\alpha(\zeta)K_2^{-1}=\pm\theta_\alpha(\pm\bar\zeta) \\ K_2J_EK_2^{-1}=J_E; \ K_3J_FK_3^{-1}=J_F. \end{cases}$$

Определение *х. о.-ф. узла α будем называть K-вещественной (K-мнимой), если существуют такие антиунитарные операторы K_2 и K_3, что выполняется условие $(\pm I)$.*

Теорема 3. *Для того чтобы простой узел был K-вещественным (K-мнимым), необходимо и достаточно, чтобы х. о.-ф. была K-вещественной (K-мнимой).*

Доказательство. Пусть х. о.-ф. $\theta_\alpha(\zeta)$ удовлетворяет условию $(+I)$, тогда

$$K_3\theta_\alpha(\overline{\zeta})K_2^{-1} = K_3[T_0 - \overline{\zeta}F^+(I-\overline{\zeta}T^*)^{-1}G]K_2^{-1} = K_3T_0K_2^{-1} -$$

$$-\zeta K_3F^+K_1^{-1}K_1(I-\overline{\zeta}T^*)^{-1}K_1^{-1}K_1GK_2^{-1} = K_3T_0K_2^{-} - \zeta K_3F^+K_1^{-1}(I-$$

$$-\zeta K_1T^*K_1^{-1})^{-1}K_1GK_2^{-1},$$

где K — любая инволюция в пространстве H. Очевидно, что правая часть последнего равенства представляет собой х. о.-ф. простого узла α_K. В силу теоремы 6 работы [5] узлы α, α_K унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарный оператор $U \in [H, H]$ такой, что

$$UT = K_1TK_1^{-1}U;\ UG = K_1GK_2^{-1};\ UF = K_1FK_3^{-1}.$$

Полагая $K_0 = U^{-1}K_1$ (K_0 — антиунитарный оператор), получим

$$K_0TK_0^{-1} = T;\ K_0GK_2^{-1} = G;\ K_0FK_3^{-1} = F,$$

так что узел α K-вещественный. Таким же образом проверяется второй случай.

В случае обратимого оператора х. о.-ф. имеет вид [5—7]

$$\theta_\Delta(\zeta) = J(T_0^*)^{-1}\{J - G^*(I-\zeta T^*)^{-1}G\}.$$

При этом легко проверить, что узлам Δ_K, Δ^*, Δ^*_- соответствует х. о.-ф., удовлетворяющая соответственно условию

$$\Delta_K = \begin{pmatrix} K_1TK_1^{-1}; & K_1GK_2^{-1}; & K_2JK_2^{-1}; & K_2T_0K_2^{-1} \\ H & & & E \end{pmatrix},$$

$$\Delta_- = \begin{pmatrix} -T; & G; & J; & -T_0 \\ H & & & E \end{pmatrix},$$

$$\theta_{\Delta_K}(\zeta) = K_2\theta_\Delta(\overline{\zeta})K_2^{-1},$$

$$\theta_{\Delta^*}(\zeta) = \theta^*_\Delta(\overline{\zeta}),$$

$$\theta_{\Delta^*_-}(\zeta) = -\theta^*_\Delta(-\overline{\zeta}).$$

Отсюда, если узел Δ является K-симметрическим (K-кососимметрическим), то соответствующая х. о.-ф. удовлетворяет условию

$$(\pm\mathrm{II})\begin{cases} K_2\theta_\Delta(\zeta)K_2^{-1} = \pm\theta^*_\Delta(\pm\zeta) \\ K_2JK_2^{-1} = J. \end{cases}$$

Определение. *Х. о.-ф. будем называть K-симметрическим (K-кососимметрическим), если существует антиунитарный оператор K_2 в пространстве E, с которым она связана условием* ($\pm$II).

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы простой узел Δ был K-симметрическим (K-кососимметрическим), необходимо и достаточно, чтобы его х. о.-ф. была K-симметрической (K-кососимметрической).*

С л е д с т в и е. *Если* K_2 — *инволюция или антиинволюция* ($K^2{}_2 = \pm I$), *то* $K^2{}_1 = \pm I$.

Действительно, при любом $g \in E$ имеем

$$(T^n Gg, g) = (T^n K_1 F K_1 g, g) = (K_1 (T^*)^n F K_1^{-1} g, g) =$$

$$= (K_1 (T^*)^n K_1 G K_2^{-2} g, g) = \pm (K_1^2 T^n Gg, g),$$

так, что

$$T^n Gg = \pm K_1^2 T^n Gg \; (n = 1, 2, \ldots)$$

Пусть f — любой вектор замыкания линейной оболочки векторов вида

$$T^n Gg \; (n = 1, 2, \ldots, g \in E),$$

тогда $K_1^2 f = \pm f$ во всем пространстве H, т. е. $K_1^2 = \pm I$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. 543 с.
2. S t o n e M. H. Linear transformations in Hilbert space. New-York, 1932, 622 p.
3. W i g n e r E. Normal form of antiuhitary operators. — «Jornal of Mafh phys.», New-York, 1960, v. VI, N 5, p. 409—413.
4. В и г н е р Е. Теория групп. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 443 с.
5. Б р о д с к и й В. М. Об операторных узлах и их характеристических функциях. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 1, с. 97—99.
6. Б р о д с к и й В. М. Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора. — «Acta Sci. Math.», Budapest, 1971, v. 32, с. 165—175.
7. Б р о д с к и й В. М., Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г. О характеристических функциях обратимого оператора. — «Acta Sci. Math.», Budapest, 1971, v. 32, с. 141—164.
8. Б р о д с к и й В. М., Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г. Определение и основные свойства характеристической функции G-узла. — «Функциональный анализ и его приложение», 1971, т. 4, вып. 1, с. 88—90.
9. Г о д и ч В. И., Л у ц е н к о И. Е. О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций. — «Усп. мат. наук», 1965, с. 20, № 6, с. 64—65.
10. А с а д и Ш., Л у ц е н к о И. Е. Антиунитарные преобразования линейных операторов. — «Вестник Харьк. ун-та. Математика и механика». Вып. 37, 1972, с. 13—21.

Поступила 5 июля 1975 г.