УДК 519.9 : 575.1

Ю. И. ЛЮБИЧ

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ БЕРНШТЕЙНОВСКИЕ ПОПУЛЯЦИИ

В настоящей работе определяется и описывается в явной параметрической форме класс бернштейновских популяций [2], альтернативный в некотором смысле классу правильных, или, что равносильно, — двухуровневых популяций, описанному в [3]. Пересечением этих двух классов является класс линейных популяций [4].

Из цитированных статей и настоящей работы следуют результаты, анонсированные нами в [5, 6], в частности — решение проблемы С. Н. Бернштейна [1] для размерности $n=4$.

Назовем бернштейновскую популяцию квазилинейной, если в нормальной форме [2, с. 67] соответствующего квадратичного оператора W оператор Q равен 0, т. е. нормальная форма для W такова:

$$s'=s^2,\ u'=su+Kv+B(u,\ v),\ v'=0 \tag{1}$$

(K — произвольный квадратичный оператор, B — произвольный билинейный оператор). Свойство квазилинейности равносильно тому, что при типе $(m,\ \delta)$ оператора W размерность пространства N_W исчезающих линейных форм равна δ (в общем случае $\dim N_W \leqslant \delta$). Поэтому оно инвариантно, т. е. не зависит от выбора нормальной системы координат. При $K=0$, $B=0$ (и только в этом случае) популяция линейна.

Будем далее пользоваться обозначениями и терминами наших предыдущих статей.

Заметим прежде всего, что множество отличных от нуля неподвижных точек оператора W квазилинейной популяции является $(m-1)$-мерным линейным подмногообразием гиперплоскости $s=1$. Действительно, в нормальной системе координат оно задается уравнениями $s=1$, $v=0$ (u произвольно).

Ограничивая оператор W на стохастический симплекс Δ, получаем эволюционный оператор V. Множество его неподвижных точек есть пересечение симплекса Δ с указанным линейным многообразием. Следовательно, оно является выпуклым многогранником. Рассмотрим его крайние точки $a^1, \ldots, a^\mu$.

Пусть F_i — минимальная замкнутая грань симплекса Δ, содержащая точку a^i, что означает: $a^i \in \operatorname{Int} F_i$. Других неподвижных точек эта грань не содержит, так как в противном случае через точку a^i проходила бы прямая, состоящая из неподвижных точек, и точка a^i не была бы крайней.

Покажем, что грань F_i инвариантна для оператора V. Действительно, уравнения грани имеют вид: $x_j=0$ ($j \bar{\in} \operatorname{supp} a^i$). Так как точка a^i лежит в грани и неподвижна, то

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta,j}\, a_\alpha a_\beta^i = 0 \quad (j \bar{\in} \operatorname{supp} a^i).$$

Так как $p_{\alpha\beta,j} \geqslant 0$, то отсюда следует, что $p_{\alpha\beta,j}=0$ ($j \bar{\in} \operatorname{supp} a^i$, $\alpha, \beta \in \operatorname{supp} a^i$). Поэтому если $x \in F_i$, то при $j \bar{\in} \operatorname{supp} a^i$ будет

$$(Vx)_j = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta j} x_\alpha x_\beta = \sum_{\alpha,\beta \in \operatorname{supp} a^i} p_{\alpha\beta,j}\, x_\alpha x_\beta = 0,$$

т. е. $Vx \in F_i$.

Так как $V^2=V$ для бернштейновских популяций, то оператор V отображает все точки симплекса Δ в неподвижные. Следовательно, все точки инвариантной грани F_i отображаются в единственную имеющуюся в этой грани неподвижную точку a^i.

Из последнего результата вытекает, что грани $F_1, \ldots, F_\mu$ попарно не пересекаются. Следовательно,

$$\operatorname{supp} a^i \cap \operatorname{supp} a^j = \varnothing \quad (i \neq j), \tag{2}$$

т. е. векторы $a^1, \ldots, a^\mu$ попарно ортогональны.

Вектор Vx при всех $x \in \Delta$ неподвижен, а потому является выпуклой комбинацией векторов a^i:

$$Vx = \sum_{i=1}^{\mu} \theta_i a^i.$$

В силу ортогональности системы $\{a^i\}$

$$\theta_i = \frac{(Vx, a^i)}{(a^i, a^i)} \quad (i = 1, \ldots, \mu),$$

откуда видно, что $\theta_i = \theta_i(x)$ — квадратичные формы с неотрицательными коэффициентами.

Теперь легко убедиться, что $\mu = m$. Во-первых, векторы a^i принадлежат сдвинутому линейному многообразию размерности $m-1$ и попарно ортогональны, откуда $\mu \leqslant m$. С другой стороны, их ортогональное дополнение содержится в каноническом образе подпространства N_W, ибо

$$W\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{\mu} \theta_i(x) a^i \quad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n). \tag{3}$$

Поэтому $n - \mu \leqslant \delta$, откуда $\mu \geqslant n - \delta = m$.

Так как $s(W\boldsymbol{x}) = s^2(\boldsymbol{x})$ и вместе с тем $s(a^i) = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i(x) = s^2(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

Далее, тождество $W^2\boldsymbol{x} = s^2(\boldsymbol{x})\, W\boldsymbol{x}$ дает

$$\theta_i(W\boldsymbol{x}) = s^2(\boldsymbol{x})\, \theta_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

(квадратичные формы θ_i «инвариантны»).

Чтобы извлечь из (3)—(5) вид форм θ_i, покажем, что они функционально независимы, т. е. максимальный ранг якобиана этой системы функций равен их числу m. Действительно, дифференциал отображения W в точке $s=1$, $u=0$, $v=0$ равен в силу (1) $(2ds, du, 0)$ и его ранг равен m, а больше m ранг быть не может также в силу (1). С другой стороны, $\theta_i(x)$ — координатные функции отображения W в ортогональном базисе, включающем $\{a$

Подставляя выражение (3) для Wx и выражение (4) для $s^2(x)$ в (5), получаем

$$\sum_{j,k=1}^{m} \hat{\theta}_i(a^j, a^k)\,\theta_j(x)\,\theta_k(x) = \theta_i(x) \sum_{k=1}^{m} \theta_k(x),$$

где $\hat{\theta}_i$ — соответствующие симметричные билинейные формы. В силу функциональной независимости форм $\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x)$ их можно в последнем тождестве заменить независимыми переменными $t_1, \ldots, t_m$:

$$\sum_{j,k=1}^{m} \hat{\theta}_i(a^j, a^k)\, t_j t_k = t_i \sum_{k=1}^{m} t_k.$$

Это тождество выполняется, по крайней мере, в окрестности некоторой точки, а следовательно, — во всем пространстве R^m. Таким образом,

$$\hat{\theta}_i(a^j, a^k) = \frac{\delta_{ij} + \delta_{ik}}{2}\,(i, j, k = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

В силу (4) элементы матрицы формы $\theta_i(x)$ не превосходят единицы. Но из (6), в частности, следует $\theta_i(a^i) = 1$. Так как a^i — стохастический вектор, то в матрице формы $\theta_i(x)$ равны единице все элементы диагонального блока, соответствующего $\operatorname{supp} a^i$.

Обозначим через E_i линейную оболочку координатных ортов, номера которых принадлежат $\operatorname{supp} a^i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, и через E_0 — ортогональное дополнение суммы этих подпространств. В силу (2) все пространство разлагается в ортогональную сумму $E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$. Пусть $x = x^0 \oplus x^1 \oplus \ldots \oplus x^m$ — соответствующее разложение вектора x. Тогда по доказанному $\theta_i(x^i) = s^2(x^i)$ $(i \neq 0)$. Далее, согласно (6), $\hat{\theta}_i(a^j, a^k) = 0\,(i \neq j, k)$. Так как коэффициенты формы θ_i и векторы a^j, a^k неотрицательны, то коэффициенты в θ_i, отвечающие подмножеству $\operatorname{supp} a^j \times \operatorname{supp} a^k$, равны нулю. Поэтому $\hat{\theta}_j(x^j, x^k) = 0\,(j, k \neq 0, i)$. Следовательно,

$$\theta_i(x) = s^2(x^i) + 2\sum_{j \neq 0, i} \hat{\theta}_i(x^i, x^j) + \rho_i(x^0) + 2\bar{\rho}_i(x^0, \bar{x}),$$

где $\rho_i(x^0)$ — квадратичная форма, $\bar{\rho}_i(x^0, \bar{x})$ — билинейная форма, $\bar{x} = x \ominus x^0$.

Положим

$$\begin{cases} 2\hat{\theta}_i(x^i, x^j) - s(x^i)\, s(x^j) = (T_{ji} x^i, x^j)\ (T_{ji}: E_i \to E_j), \\ \rho_i(x^0) = (R_i^0 x^0, x^0) \quad (R_i^0 : E_0 \to E_0;\ (R_i^0)^* = R_i^0). \\ \bar{\rho}_i(x^0, \bar{x}) = (\bar{R}_i x^0, \bar{x}) \quad (\bar{R}_i : E_0 \to E_0^{\perp}). \end{cases}$$

Элементы матриц T_{ji} заключены в $[-1,1]$, а матриц R_i^0, $\bar{R}_i$ — в $[0, 1]$.

Имеем

$$\theta_i(x) = s(x^i)\,s(\bar{x}) + \sum_{j \neq 0, i} (T_{ji}x^i, x^j) + (R_i^0 x^0, x^0) + 2(\bar{R}_i x^0, \bar{x}),$$

откуда, согласно (4),

$$s^2(x) = s^2(\bar{x}) + \sum_{j \neq i} (T_{ji}x^i, x^j) + \sum_i (R_i^0 x^0, x^0) + 2\sum_i (\bar{R}_i x^0, \bar{x}),$$

а с другой стороны,

$$s^2(x) = s^2(\bar{x}) + s(x^0)\{s(x^0) + 2s(\bar{x})\}.$$

Поэтому

$$T_{ij} = -T_{ij}^*, \quad \sum_i R_i^0 = J^0, \quad \sum \bar{R}_i = \bar{J},$$

где J^0, $\bar{J}$ — матрицы соответствующих размеров с элементами, равными единице. Наконец, из (6), очевидно, следует $(T_{ji}a^i, a^j) = 0$.

Непосредственно проверяется, что найденные необходимые условия достаточны. Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема. *Общий вид квазилинейной бернштейновской популяции дается формулой*

$$Vx = \sum_{i=1}^m \theta_i(x)\,a^i,$$

где a^i *— попарно ортогональные стохастические векторы, определяющие координатное разложение* $x = x^0 \oplus x^1 \oplus \ldots \oplus x^m$ $(\operatorname{supp} x^i \in \operatorname{supp} a^i\ (1 \leqslant i \leqslant m),\ \operatorname{supp} x^0 \in \bigcup \operatorname{supp} a^i)$, *относительно которого*

$$\theta_i(x) = s(x^i)\,s(\bar{x}) + \sum_{j \neq i} (T_{ji}x^i, x^j) + (R_i^0 x^0, x^0) + 2(\bar{R}_i x^0, \bar{x}),$$

где $\bar{x} = x \ominus x^0$, $T_{ji} = -T_{ij}^*$, $(R_i^0)^* = R_i^0$, *причем*

$$\sum_{i=1}^m R_i^0 = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 \\ \cdots\cdot \\ 1 \ldots 1 \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^m \bar{R}_i = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 \\ \cdots\cdot \\ 1 \ldots 1 \end{pmatrix},$$

элементы матриц T_{ji} *заключены в* $[-1,1)$, *элементы матриц* $R_i^0, \bar{R}_i$ *— в* $[0,1]$ *и, наконец, выполняются соотношения* $(T_{ji}a^j, a^i)$ *при всех* $j, i = 1, \ldots, m$: $j \neq i$.

Отметим, что в частном случае линейной популяции (см. [4])

$$T_{ji} = 0,\ (R_i^0 x^0, x^0) = c_i(x^0)\, s(x^0),\ 2\bar{R}_i(x^0, \bar{x}) = s(x^0)\, s(x^i) + $$
$$+ c_i(x_0)\, s(\bar{x}),$$
где $c_i(x^\circ)$ — неотрицательные линейные формы, сумма которых равна $s(x^\circ)$.

Отметим еще, что нормальная [2, 3] квазилинейная популяция тривиальна: ее эволюционный оператор — единичный, т. е. $Vx = xs(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. — «Учен зап. научн.-исслед. кафедр Украины. Отд. мат.», 1924, вып. 1, с. 83—115.
2. Любич Ю. И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций. — «Усп. мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 5, с. 52—116.
3. Любич Ю. И. Двухуровневые бернштейновские популяции. — «Мат. сб.», 1974, т. 95 (137), № 4 (12), с. 606—628.
4. Любич Ю. И. Линейные бернштейновские популяции. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 22. Харьков, 1974, с. 107—111.
5. Любич Ю. И. Строение бернштейновских популяций типа — «Усп. мат. наук», 1973, т. XXVIII, вып. 5, с. 247—248.
6. Любич Ю. И. Строение бернштейновских популяций типа — «Усп. мат. наук», 1975, т. XXX, вып. 1, с. 247—248.

Поступила 15 мая 1975 г.