УДК 517.55

Б. И. ЛОКШИН

О ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ

Известно [1—4], что рост целой функции $f(z, w)$, $z \in C^n$, $w \in C$ по переменной w в том или ином смысле мало зависит от выбора z. Это же верно и для более широкого класса функций, чем целые [5—9].

Мы рассмотрим случай, когда рост функции характеризуется типом при уточненном порядке. Напомним [10, гл. 1, § 12], что неотрицательная непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция

$\rho(t)$ называется уточненным порядком, если существуют $\lim\rho(t) = \rho$, $0 \leqslant \varsigma < \infty$ и $\lim\varsigma'(t)t\ln t = 0$ при $t \to \infty$. Монотонно неубывающая неограниченная функция $\varsigma(t)$ называется функцией уточненного порядка $\varsigma(t)$, если ее тип при этом порядке, определяемый равенством

$$\sigma = \sigma[\alpha, \varsigma(t)] = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\alpha(t)}{t^{\varsigma(t)}},$$

положителен и конечен.

Пусть $V(z)$ — плюрисубгармоническая в C^n функция. В. Хенгартнер показал в [9], что если функция

$$M(t) = \max_{|z| \leqslant t} V(z)$$

имеет уточненный порядок $\varsigma(t)$, то функция $\Phi(z, t) = \max\limits_{|w|=t} V(z \cdot w)$, $w \in C^1$ имеет своим уточненным порядком $\varsigma(t)$ при всех $z \in C^n$, лежащих вне некоторого пренебрежимого множества.

В этой статье рассматриваются функции более общего вида: функции класса B [11, гл. 2, § 7]. Через B обозначается класс функций $\Phi(z, t)$, определенных при $t \geqslant 0$, $z \in C^n$ и таких, что функции $\Phi(z, |w|)$, где $w \in C^1$, являются плюрисубгармоническими в C^{n+1}, а функции $\exp\{\Phi(z, t)\}$ непрерывны в $C^n \times R^1_+$. Этот класс содержит такие функции как

$$\ln M_f(z, t)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(z, te^{i\theta})|\, d\theta,$$

где $f(z, w)$ — целая функция переменных $z_1, \ldots, z_n, w$, а

$$M_f(z, t) = \max_{|w|=t} |f(z, w)|.$$

Приводимые ниже результаты как по характеру, так и по методу получения примыкают к соответствующим результатам Л. И. Ронкина [8], относящимся к обычному, а не уточненному порядку. От результатов В. Хенгартнера они отличаются классом рассматриваемых функций, а также тем (и это главное), что мы не делаем априорного предположения о существовании общего уточненного порядка, не зависящего от z.

Теорема 1.*. *Пусть*

а) функция $\Phi(z, t) \in B$ и имеет конечный порядок $\rho[M_\Phi] = \rho$;

б) $\varsigma(t)$ — уточненный порядок и $\lim\varsigma(t) = \varsigma$;

в) на некотором множестве $E \subset C^n$ положительной Γ-емкости тип функции $\Phi(z, t)$ при уточненном порядке $\varsigma(t)$ по переменной t ($z \in E$ фиксировано) конечен: $\sigma(z) < \infty$;

---

* Определения порядка $\varsigma[M_1]$ функции класса B и Γ-емкости множества $E \subset C^n$ см. [11, гл. 2, § 7].

г) в некоторой точке $z^0 \in C^n \sigma(z^0)>0$. *Тогда* $\sigma(z)<\infty$ *при всех* $\in C^n$ *и* $\sigma(z)>0$ *всюду в* C^n, *за исключением некоторого множества* K_Φ, *принадлежащего бэровскому классу* $F_{\sigma\delta}$ *и удовлетворяющего условию* $K_\Phi \neq C^n$, *и пересечение множества* K_Φ *с любой аналитической плоскостью* $\{z : z_i = a_i w + b_i,\ i=1,\ldots, n\}$, *не лежащей целиком в* K_Φ, *имеет нулевую емкость.*

Кроме того, $\varsigma(t)$ *является уточненным порядком функции* $M_\Phi(r_1,\ldots, r_n, t)$ *по переменной* t *при любых* $r>0,\ldots, r_n>0$.

Теорема 2*. *Пусть функция* $\Phi(r_1, \ldots, r_n) \in A$ *и имеет конечный порядок по совокупности переменных* $\rho[\Phi]=\rho<\infty$; *пусть при некоторых* $r_1^0>0, \ldots, r_{n-1}^0>0$ *уточненный порядок функции* $\Phi(r_1^0, \ldots, r_{n-1}^0, r_n)$ *по переменной* r_n *равен* $\varsigma(r_n)$, *т. е.*

$$0<\overline{\lim_{r_n\to\infty}} \frac{\Phi(r_1^0, \ldots, r_{n-1}^0, r_n)}{r_n^{\varsigma(r_n)}} = \sigma_0 < \infty.$$

Тогда $\varsigma(r_n)$ *является уточненным порядком функции* Φ *по переменной* r_n *при любых* $r_1>0,\ldots, r_{n-1}>0$.

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, так как оно лишь в деталях отличается от доказательства соответствующей теоремы Л. И. Ронкина [7].

Доказательство теоремы 1. Поскольку функция $\Phi^+ = \max(\Phi,0) \in B$, если $\Phi \in B$ и все характеристики роста функций Φ и Φ^+ совпадают, то можно считать $\Phi\geqslant 0$. Мы будем считать также, что $\varsigma>0$ и порядок функции $\Phi(z, t)$ по переменной t $\overline{\varsigma}_{n+1}(\Phi)=\varsigma>0$.

Действительно, если $\rho_{n+1}(\Phi)=0$, то рассмотрим функцию $\Phi_1(z, t)=t\Phi(z,t)=|w|\Phi(z,t)$, которая, как произведение двух неотрицательных функций класса B, также принадлежит классу B (мы пользуемся критерием плюрисубгармоничности, установленным теоремой 2.1.2 [11, гл. 2, § 1]). Очевидно, что $\varsigma[\Phi_1]=1+\varsigma[\Phi]>0$, а порядок функции Φ_1 по переменной t равен 1. В качестве уточненного порядка функции $\Phi_1(z, t)$ можно взять $\varsigma_1(t)=1+\varsigma(t)$. Если условия теоремы 1 выполнены для функции $\Phi(z, t)$, то они выполнены и для функции $\Phi_1(z, t)$. Из справедливости утверждения теоремы для функции $\Phi_1(z, t)$ вытекает его справедливость и для функции $\Phi(z, t)$. Итак, будем считать $\varsigma>0$ и $\overline{\varsigma}_{n+1}=\varsigma>0$. Заметим теперь, что множество E можно считать компактным, а тип $\sigma(z)$ при уточненном порядке $\varsigma(t)$ равномерно ограниченным на E:

$$\sigma(z)=\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Phi(z,t)}{t^{\rho(t)}} \leqslant \gamma<\infty,\ z\in E.$$

Это вытекает из следующего утверждения, содержащегося в неявном виде [11, с. 195—196].

Пусть функция $\Phi(z, t) \in B$, $\varsigma(t)$ является уточненным порядком и на некотором множестве $E\subset C^n$ положительной Г-емкости

---

* Определение класса A см. [11, гл. 2, § 6].

$\sigma(z)<\infty$. Тогда найдутся такое компактное множество E_1 положительной Г-емкости и такая константа γ, что для всех $z\in E_1$ выполняется неравенство $\sigma(z)\leqslant\gamma<\infty$.

Зафиксируем теперь произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим компактные множества

$$E_{m,\varepsilon}=\left\{z:\sup_{t\geqslant m}\frac{\Phi(z,t)}{t^{\varsigma(t)}}\leqslant\gamma-\frac{1}{m}+\varepsilon\right\}\cap\{z:|z_i|\leqslant m, i=1,\dots,n\}\ (m=1,2).$$

Очевидно, $E\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}E_{m,\varepsilon}$; следовательно*, найдутся такое натуральное m и такая система плоских компактов G_1, G_2, $(z_1),\dots,G_n(z_1,\dots,z_{n-1})$, зависящих от указанных параметров и лежащих в некотором круге радиуса R_0 с центром в начале координат, что построенные рекуррентным способом множества

$$E_1=G_1,\ E_2=\{(z_1,z_2):z_1\in E_1,\ z_2\in G_2(z_1)\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$E_n=\{(z_1,\dots,z_n):(z_1,\dots,z_{n-1}):\in E_{n-1},z_n\in G_n(z_1,\dots,z_{n-1})\}$ удовлетворяют условиям

а) $\operatorname{cap}_2 E_1=\alpha_0>0$,

б) $\inf\ \operatorname{cap}_2 G_l(z_1,\dots,z_{l-1})=\alpha_{l-1}>0\ (z_1,\dots,z_{l-1})\in E_{l-1}$ $(l=2,\dots,n)$,

в) $\sup\limits_{t\geqslant m}\dfrac{\Phi(z,t)}{t^{\varsigma(t)}}\leqslant\gamma+\varepsilon$ для всех $z\in E_n$.

Функция $\Phi(z,t)$ при всех фиксированных $z_1,\dots,z_{n-1}$, как функция переменных z_n и t, принадлежит классу B. Оценим ее с помощью лемм 2.7.1, 1.4.1 [11, гл. 2, § 7, гл. 1, § 4].

Пусть $t_1>2^{2\rho/\varsigma}$, $(p+1)/2>2\rho/\varsigma$, G_n^* — содержащая бесконечно удаленную точку связная компонента дополнения множества $G_n(z_1,\dots,z_{n-1})$, а $\omega(z_n)$ — гармоническая мера множества $G_n(z_1,\dots,z_{n-1})$ относительно круга $\{z_n:|z_n|<R_n\}$, где $R_n>2R_0$. При $(z_1,\dots,z_{n-1})\in E_{n-1}$ и $z_n\in\{z_n: |z_n|<R_n\}\cap G_n^*$ справедливо неравенство

$$\Phi(z,t_1^{p\omega}\cdot t_1^{1-\omega})\leqslant\omega(z_n)\max_{z_n\in G_n}\Phi(z,t_1^p)+(1-\omega(z_n))\max_{|z_n|=R_n}\Phi(z,t_1)\leqslant$$
$$\leqslant(\gamma+\varepsilon)t^{p\varsigma(t_1^p)}+(1-\omega(z_n))M_\Phi(|z_1|,\dots,|z_{n-1}|,R_n,t_1).$$

Положим $t_1^{(p-1)\omega+1}=t$ (заметим, что $t>t_1$). Учитывая конечность порядка $\rho=\rho[M_\Phi)$, будем иметь неравенство

$$\Phi(z,t)\leqslant(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{\varsigma(t_1^p)}{\omega(z_n)}}t_1^{\varsigma(t_1^p)}+(1-\omega(z_n))(t_1^{\rho+\varepsilon}+|z_1|^{\rho+\varepsilon}+\dots+$$

* См. определение Г-емкости и свойства множеств при Г-проектировании [11, гл. 2, § 2].

$$+ \ |z_{n-1}|^{\rho+\varepsilon} + R_n^{\rho+\varepsilon}) + C_\zeta$$

с некоторой константой C_ε. Это неравенство справедливо при всех $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in E_{n-1}$ и $R_0 < |z_n| < R$. Воспользуемся леммой 1.4.1. Получим оценку

$$\Phi(z, t) \leqslant (\gamma + \varepsilon)\, t_1^{\varsigma(tp1)} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\varsigma(t_1^p) \ln \dfrac{t}{t_1}}{1 - \dfrac{\ln(|z_n| + R_0) - \ln \alpha_{n-1}}{\ln(R_n - R_0) - \ln R_0}}\right\} + \frac{\ln(|z_n| + R_0) - \ln \alpha_{n-1}}{\ln(R_n - R_0) - \ln R_0} \times$$

$$\times (t_1^{\rho+\varepsilon} + |z_1|^{\rho+\varepsilon} + \ldots + |z_{n-1}|^{\rho+\varepsilon} + R_n^{\varsigma+\varepsilon}) + C_\varepsilon. \qquad (1)$$

Из условия теоремы следует, что $\rho \geqslant \varrho$. Будем считать $\varepsilon < \dfrac{1}{4}\varsigma \leqslant \dfrac{1}{4}\rho$. Ранее на R_n накладывалось единственное ограничение $R_n > 2R_0$. Положим теперь $R_n = t^{\frac{\varrho(t)}{\rho+\varepsilon}} R_0$. В дальнейшем будем считать t_1 таким, что при всех $t \geqslant t_1$ выполняются неравенства $\varsigma - \varepsilon < \varsigma(t) < \varsigma + \varepsilon$; тогда

$$t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} > t^{\frac{\varsigma-\varepsilon}{\rho+\varepsilon}} > t_1^{\frac{\varsigma-\rho}{\rho+\varepsilon}} > 2^{\frac{2\rho}{\varsigma}\frac{\varsigma-\varepsilon}{\rho+\varepsilon}} = 2^{1+\frac{\rho\varsigma-\varepsilon(\varsigma+2\rho)}{\varsigma(\rho+\varepsilon)}} > 2.$$

При таком выборе R_n из (1) следует, что при $R_0 < r_n < R_n$ и $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in E_{n-1}$

$$M_\Phi(z_1, \ldots, z_{n-1}, r_n, t) \leqslant (\gamma + \varepsilon)\, t^{\varsigma(t_1^p)} \exp\left\{\frac{\varsigma(t_1^p) \ln \dfrac{t}{t_1} \cdot \ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right)}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right) - \ln \dfrac{r_n + R_0}{\alpha_{n-1}}}\right\} +$$

$$+ \frac{\ln(r_n + R_0) - \ln \alpha_{n-1}}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right)} \{t_1^{\rho+\varepsilon} + |z_1|^{\rho+\varepsilon} + \ldots + |z_{n-1}|^{\rho+\varepsilon} + R_0^{\rho+\varepsilon} t^{\sigma(t)}\} + C_\varepsilon =$$

$$= (\gamma + \varepsilon) t^{\varsigma(t)} \exp\left\{\frac{\varsigma(t_1^p) \ln \dfrac{t}{t_1} \cdot \ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right)}{\ln\left(t^{\frac{(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right) - \ln \dfrac{r_n + R_0}{\alpha_{n-1}}} + [\varsigma(t_1^p) \ln t_1 - \varsigma(t_1^p) \ln t] +\right.$$

$$\left. + \varsigma(t_1^p) \ln t - \varsigma(t) \ln t\right\} + \frac{\ln(r_n + R_0) - \ln \alpha_{n-1}}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right)} \{t_1^{\rho+\varepsilon} + |z_1|^{\rho+\varepsilon} + \ldots +$$

$$+ |z_{n-1}|^{\rho+\varepsilon} + R_0^{\rho+\varepsilon} t^{\varsigma(t)}\} + C_\varepsilon = (\gamma + \varepsilon)\, t^{\varsigma(t)} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\varsigma(t_1^p)\ln\dfrac{t}{t_1}\cdot\ln\dfrac{r_n+R_0}{\alpha_{n-1}}}{\ln\left(t^{\frac{\rho(t)}{\rho+\varepsilon}}-1\right)-\ln\dfrac{r_n+R_0}{\alpha_{n-1}}}+(\varsigma(t_1^p)-\varsigma(t)\ln t\right\}+$$

$$+\frac{\ln(r_n+R_0)-\ln\alpha_{n-1}}{\ln\left(t^{\frac{(\varsigma t)}{\rho+\varepsilon}}-1\right)}\left[t_1^{\rho+\varepsilon}+|z_1|^{\rho+\varepsilon}+\ldots+|z_{n-1}|^{\rho+\varepsilon}+R_0^{\rho+\varepsilon}t^{\rho(t)}\right]+C_\varepsilon.$$

Оценим теперь сверху выражение, стоящее в показателе экспоненты при фиксированных $r_1, \ldots, r_{n-1}$, r_n и достаточно больших t_1:

$$0<I_1=\frac{\varsigma(t_1^p)\ln\dfrac{t}{t_1}}{\ln\left(t^{\frac{\rho(t)}{\rho+\varepsilon}}-1\right)-\ln\dfrac{r_i+R_0}{\alpha_{i-1}}}<\frac{(\varsigma+\varepsilon)\ln\dfrac{t}{t_1}}{\ln\dfrac{1}{2}t^{\frac{\rho(t)}{\rho+\varepsilon}}-\ln\dfrac{r_i+R_0}{\alpha_{i-1}}}<$$

$$<\frac{(\varsigma+\varepsilon)\ln\dfrac{t}{t_1}}{\dfrac{\rho_1-\varepsilon}{\rho+\varepsilon}\ln t-\ln\dfrac{2(r_i+R_0)}{\alpha_{i-1}}}=$$

$$=\frac{(\rho_1+\varepsilon)(p-1)\omega\ln t_1}{\dfrac{(\rho_1-\varepsilon)(1+(p-1)\omega)}{\rho+\varepsilon}\ln t_1-\ln\dfrac{2(r_i+R_0)}{\alpha_{i-1}}}<$$

$$<\frac{(\rho_1+\varepsilon)(p-\quad(\rho+\varepsilon)\omega}{(\rho_1-\varepsilon)(1+(p-1)\omega)}+\frac{\varepsilon}{2}.\qquad(i=1,\ldots,n).$$

Так как в силу леммы 1. 4. 1 $\omega\to 1$ при $t_1\to\infty$, то

$$I_1<\frac{(\rho_1+\varepsilon)(p-1)(\rho+\varepsilon)}{(\rho_1-\varepsilon)p}+\varepsilon.$$

Будем в дальнейшем считать ε столь малым, что

$$\frac{(\rho_1+\varepsilon)(\rho+\varepsilon)}{\rho_1-}\frac{p-1}{p}<\rho$$

(это возможно, так как левая часть этого неравенства стремится к $\varsigma\cdot(p-1)/p$ при $\varepsilon\to 0$). Тогда при достаточно больших $t_1 I_1<$ $<\varsigma+\varepsilon$. Оценим второе слагаемое в показателе экспоненты, воспользовавшись теоремой Лагранжа:

$$|I_2|=|\varsigma(t_1^p)-\varsigma(t)|\ln t=(t_1^p-\tilde{t})\,|\varsigma'(\tilde{t})|\ln t,$$

где $t<\tilde{t}<t_1^p$; далее,

$$|I_2| = |\varsigma'(\tilde{t})\,\tilde{t}\ln\tilde{t}|\,\frac{\ln t}{\ln\tilde{t}}\,\frac{t_1^p - t}{\tilde{t}} = o(1)\,\frac{t_1^p - t}{\tilde{t}} = o(1)\,\frac{t_1^p}{t} = o(1)\,t_1^p \times$$

$$\times\, t_1^{-(p-1)\omega - 1} = o(1)\,t_1^{(p-1)(1-\omega)};$$

$$t_1^{1-\omega} \leqslant \exp\left\{\frac{\ln(r_n + R_0) - \ln\alpha_{n-1}}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right)}\,\ln t_1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{\ln(r_n + R_0) - \ln\alpha_{n-1}}{\ln\frac{1}{2}\,t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}}}\,\ln t_1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{\ln(r_n + R_0) - \ln\alpha_{n-1}}{\frac{\varsigma-\varepsilon}{\rho+\varepsilon}\,\ln t - \ln 2}\,\ln t_1\right\} = O(1)$$

при $t_1 \to \infty$. Поэтому $I_2 = o(1)$ $(t_1 \to \infty)$.
Следовательно, при достаточно больших t_1

$$\exp\left\{\frac{\varsigma(t_1^p)\ln\frac{t}{t_1}\cdot\ln\frac{r_i + R_0}{\alpha_{i-1}}}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right) - \ln\frac{r_i + R_0}{\alpha_{i-1}}} + (\sigma(t_1^p) - \sigma(t))\ln t\right\} <$$

$$< \left(\frac{r_i + R_0}{\alpha_{i-1}}\right)^{\rho+\varepsilon}(1 + \varepsilon) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Кроме того, можно считать, что

$$\frac{\ln(r_i + R_0) - \ln\alpha_{i-1}}{\ln\left(t^{\frac{\sigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - \quad\right)}\,(r_1^{\rho+\varepsilon} + \ldots + r_{n-1}^{\rho+\varepsilon} + R_0^{\rho+\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Тогда имеет место неравенство

$$M_\Phi(z_1, \ldots, z_{n-1}, r_n, t) \leqslant (\gamma + \varepsilon)\,t^{\varsigma(t)}\left(\frac{r_n + R_0}{\alpha_{n-1}}\right)^{\rho+\varepsilon}\ 1 + \varepsilon) + \varepsilon +$$

$$+ \frac{\ln(r_n + R_0) - \ln a_{n-1}}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}} - 1\right)}\,(t_1^{\rho+\varepsilon} + R_0^{\rho+\varepsilon}\,t^{\varsigma}\quad) + C_\varepsilon.$$

Поделив обе части неравенства на $t^{\rho(t)}$ получим, что

$$\frac{M_\Phi(z_1, \ldots, z_{n-1}, r_n, t)}{t^{\rho(t)}} \leqslant (\gamma + \quad\left(\frac{r_n + R_0}{\alpha_{n-1}}\right)^{\rho+\varepsilon}(1 + \varepsilon) + o(1) +$$

$$+\frac{\ln(r_n+R_0)-\ln\alpha_{n-1}}{\ln\left(t^{\frac{\varsigma(t)}{\rho+\varepsilon}}-1\right)}\frac{t_1^{\rho+\varepsilon}}{t^{\varsigma(t)}},$$

где $o(1)\to 0$ при $t_1\to\infty$. Покажем, что $t_1^{\rho+\varepsilon}\cdot t^{-\varsigma(t)}=o(1)$ при $t_1\to\infty$. Действительно,

$$0<\frac{t_s^{\rho+\varepsilon}}{t^{\varsigma(t)}}<\frac{t_1^{\rho+\varepsilon}}{t^{\varsigma-\varepsilon}}=\frac{t_1^{\rho+\varepsilon}}{t_1^{[(p-1)\omega+1](\sigma-\varepsilon)}}=t_1^{\rho+\varepsilon-[1+(p-1)\omega](\varsigma-\varepsilon)}$$

и достаточно показать, что $(\rho+\varepsilon)-[1+(p-1)\omega](\varsigma-\varepsilon)\leqslant-\varepsilon$; это эквивалентно неравенству $1+(p-1)\omega\geqslant(\rho+2\varepsilon)(\varsigma-\varepsilon)^{-1}$. Так как $\omega\to 1$ при $t_1\to\infty$, то при достаточно больших t_1 $1+(p-1)\omega>(p+1)/2>2\rho/\varsigma>\frac{\rho+2\varepsilon}{\varsigma-\varepsilon}$. Следовательно, можно выбрать число $t_0^{(1)}$ так, чтобы при $t_1\geqslant t_0^{(1)}$, $(z_1,\ldots,z_{n-1})\in E_{n-1}$ и $R_0<r_n<R_n=t^{\varsigma(t)/(\rho+\varepsilon)}R_0$ была справедлива оценка

$$\frac{M_\Phi(z_1,\ldots,z_{n-1},r_n,t)}{t^{\varsigma(t)}}\leqslant(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{r_n+R_0}{\alpha_{n-1}}\right)^{\rho+\varepsilon}(1+\varepsilon)+\varepsilon=\beta_1. \quad (2)$$

Заметим теперь, что функция $M_\Phi(z_1,\ldots,z_{n-1},r_n,t)$ при фиксированном r_n принадлежит классу B, а множество E_{n-1} имеет ту же структуру, что и множество E_n. Поэтому возможно повторение предыдущих рассуждений для оценки функции

$$M_\Phi(z_1,\ldots,z_{n-2},r_{n-1},r_n,t)=\max_{|z_{n-1}|=r_{n-1}}M_\Phi(z_1,\ldots,z_{n-1},r_n,t).$$

При этом вместо неравенства

$$\frac{\Phi(z,t)}{t^{\varsigma(t)}}\leqslant\gamma+\varepsilon \quad (t\geqslant m)$$

должно быть использовано неравенство (2). Мы получим тогда, что при $(z_1,\ldots,z_{n-2})\in E_{n-2}$, $R_0<r_{n-1}<R_{n-1}$, $R_0<r_n<R_n$ и $t\geqslant t_0^{(}$ имеет место оценка

$$\frac{M_\Phi(z_1,\ldots,z_{n-2},r_{n-1},r_n,t)}{t^{\sigma(t)}}\leqslant\beta_2,$$

где

$$\beta_2=\beta_1\cdot\left(\frac{r_{n-1}+R_0}{\alpha_{n-2}}\right)^{\rho+\varepsilon}(1+\varepsilon)+\varepsilon.$$

Здесь $t=t_1^{(p-1)\omega+1}$, где $\omega=\omega(z_{n-1})$ — гармоническая мера множества $G_{n-1}(z_1,\ldots,z_{n-2})$ относительно круга $\{z_{n-1}:|z_{n-1}|<R_{n-1}\}$; R_n было определено выше через t_1 и $\omega(z_n)$, а $R_{n-1}=t^{\varsigma(t)/(\rho+\varepsilon)}R_0$. Повторив эти рассуждения еще $n-2$ раза, мы придем к следующей оценке:

$$\frac{M_\Phi(r_1,\ldots,r_n,t)}{t^{\sigma(t)}}\leqslant\beta_n,$$

где величина β_n определяется рекуррентным соотношением

$$\beta_l = \beta_{l-1} \cdot \left(\frac{r_{n-l+1} + R_0}{\alpha_{n-l}} \right)^{\rho+\varepsilon} (1+\varepsilon) + \varepsilon$$

с $\beta_0 = \gamma + \varepsilon$. Эта оценка асимптотически по t верна при фиксированных произвольным образом $r_i > R_0 \, (i = 1, \ldots, n)$. Из нее немедленно следует, что $\sigma(r_1, \ldots, r_n) \leqslant \beta_n$ при $r_i > R_0$. Здесь левая часть не зависит от ε. Поэтому

$$\sigma(r_1, \ldots, r_n) \leqslant \gamma \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{r_i + R_0}{\alpha_{i-1}} \right)^{\rho} \quad (r_i > R_0). \tag{3}$$

Осталось показать, что множество K_Φ, определяемое условием $\sigma(z) = 0$, принадлежит классу $F_{\sigma\delta}$ и удовлетворяет условию (А). Имеем $K_\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ (z_1, \ldots, z_n) : \sigma(z_1, \ldots, z_n) < \frac{1}{k} \right\}$. Покажем, что множество $N = \{(z_1, \ldots, z_n) : \sigma(z_1, \ldots, z_n) < a\}$ принадлежит классу $F_\sigma \, (a > 0)$. Введем множества

$$N_k = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) : \sup_{t \geqslant k} \frac{\Phi(z, t)}{t^{\varsigma(t)}} \leqslant a - \frac{1}{k} \right\} \left(k > \frac{1}{a} \right).$$

Множества N_k замкнуты; нетрудно проверить, что $N = \bigcup_{k=1+\left[\frac{1}{a}\right]}^{\infty} N_k$. Следовательно, $N \in F_\sigma$ и $K_\Phi \in F_{\sigma\delta}$. Так как $\sigma(z^0) > 0$, то $K_\Phi \neq C^n$. Осталось проверить, что множество N_Φ удовлетворяет условию (А). Пусть $n = 1$. Покажем, что множество K_Φ имеет нулевую емкость. Заметим, что из неравенства (3) и монотонного неубывания функции $\sigma(r_1, \ldots, r_n)$ по каждой переменной вытекает следующее утверждение: если $\sigma(z_1, \ldots, z_n) = 0$ на множестве положительной Г-емкости, то $\sigma(r_1, \ldots, r_n) \equiv 0$. Так как в пространстве C^1 Г-емкость совпадает с обычной логарифмической емкостью, то множество K_Φ имеет нулевую емкость. При $n > 1$ рассмотрим функцию $\varphi(w, t) = \Phi(a_1 w + b_1, \ldots, a_n w + b_n, t)$ с произвольными комплексными a_i и b_i и $w \in C^1$.

$$\sigma(w; \varphi) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\varphi(w, t)}{t^{\varsigma(t)}}.$$

Введем множество $N_\varphi = \{w : \sigma(w; \varphi) = 0\}$. Если $\mathrm{cap}_2 N_\varphi = 0$, то пересечение K_Φ с плоскостью $\{(z_1, \ldots, z_n) : z_i = a_i w + b_i, w \in C^1 \; (i = 1, \ldots, n)\}$ имеет нулевую емкость. Пусть $\mathrm{cap}_2 N_\varphi > 0$. Тогда в N_φ найдется компактное подмножество положительной емкости. Как уже было отмечено, в этом случае $\sigma(w; \varphi) = 0$ при всех $w \in C^1$. Это означает, что вся плоскость $\{(z_1, \ldots, z_n) : z_i = a_i w + b_i, \; w \in C^1 \; (i = 1, \ldots, n)$ лежит в K_Φ. Следовательно, множество K_Φ удовлетворяет условию (А).

Теорема 2 доказана полностью.

Следствие. *Утверждение теоремы 1 останется справедливым, если условие в) положительной Г-емкости множества E заменить более слабым условием: множество E не является пренебрежимым* *.

Доказательство. Пусть $\sigma(z)=\infty$ всюду в C^n, за исключением множества Г-емкости 0. Тогда верхний тип при уточненном порядке $\sigma(r_1,\ldots,r_n)=\infty \quad \forall (r_1,\ldots,r_n)\in R_+^n$. Рассмотрим функцию

$$\alpha(t)=\sup_{t_1\leqslant t}\frac{M_\Phi(1,\ldots,1,t_1)}{t_1^{\varsigma(t_1)}}.$$

Очевидно, $\alpha(t)$ — неубывающая функция максимального типа при нулевом порядке. Существует ** уточненный порядок $\rho_1(t)$ такой, что функция $\rho_1(t)\ln t$ монотонно стремится к $+\infty$ при $t\to\infty$ и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\alpha(t)}{t^{\sigma_1(t)}}=1.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{M_\Phi(1,\ldots,1,t)}{t^{\varsigma(t)+\varsigma_1(t)}}=1.$$

Функция $\rho(t)+\rho_1(t)$ является уточненным порядком. Следовательно [13], верхняя регуляризация функции

$$\sigma_1(z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\Phi(z,t)}{t^{\varsigma(t)+\varsigma_1(t)}}$$

является плюрисубгармонической функцией и $\rho_1(z)>0$ для всех $z\in C^n$, за исключением, быть может. пренебрежимого множества. Но для всех $z\in E\varsigma(z)<\infty$ и, следовательно,

$$\sigma_1(z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\Phi(z,t)}{t^{\varsigma(t)}}e^{-\varsigma_1(t)\ln t}=0,$$

что противоречит условию пренебрежимости множества E. Доказательство закончено.

Отметим следующий частный случай доказанной теоремы. Если целая функция $f(z_1,\ldots,z_{n+1})$ конечного порядка по совокупности переменных на некотором множестве $E=\{(z_1,\ldots,z_n)\}\subset C^n$, не являющемся пренебрежимым, не выше нормального типа при уточненном порядке $\rho(t)$ по переменной z_{n+1}, т. е.

$$\sigma(z_1,\ldots,z_n)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln M(z_1,\ldots,z_n,t;f)}{t^{\varsigma(t)}}<\infty$$

---

* Множество $E\subset C^n$ называется пренебрежимым, если существует неубывающая локально ограниченная сверху последовательность плюрисубгармонических в C^n функций $V_q(z)$ таких, что $E\subset\{z:\lim_{q\to\infty}V_q(z)<\overline{\lim_{z'\to z}}\lim_{q\to\infty}V_q(z')$ (см. Лелон [6]). Всякое пренебрежимое множество имеет Г-емкость 0.

** См., например, [12, гл. 1, § 2].

для всех $(z_1, \dots, z_n) \in E$, то

$$\sigma(r_1, \dots, r_n) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln M(r_1, \dots, r_n, t; f)}{t^{\varsigma(t)}} < \infty$$

для всех $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$; если же в некоторой точке $(z_1^0, \dots, z_n^0)$ $\sigma(z_1^0, \dots, z_n^0) > 0$, то $\sigma(z_1, \dots, z_n) > 0$ всюду в C^n, за исключением некоторого множества K_f, принадлежащего классу $F_{\sigma\delta}$ и удовлетворяющего условию (А).

Покажем теперь, что в обеих теоремах нельзя освободиться от ограничения $\varsigma[\Phi] < \infty$. Приведем примеры функций $\Phi_1(r_1, r_2) \in A$ и $\Phi_2(z, t) \in B$, $z \in C^1$ таких, что $\varsigma[\Phi_1] = \varsigma[\Phi_2] = \infty$, $\varsigma_2(\Phi_1) = \varsigma_2(\Phi_2) = 1$ и таких, что функция Φ_1 не имеет уточненного порядка по переменной r_2, не зависящего от r_1, а функция Φ_2 — по переменной t, не зависящего от z (в случае $\varsigma[\Phi] < \infty$ такие уточненные порядки существуют). Назовем уточненные порядки $\varsigma_1(r)$ и $\varsigma_2(r)$ эквивалентными, если $\varsigma_2(r) - \varsigma_1(r) = O\left(\frac{1}{\ln r}\right)$ при $r \to \infty$. Нам понадобится следующая

Лемма. *Если неубывающие функции $u(r)$ и $v(r)$, $0 < r < \infty$, $0 < \rho = \rho[u] = \rho[v] < \infty$ удовлетворяют одному из условий*

$$\text{а)} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{u(r)}{r^\rho} = \infty, \quad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{v(r)}{r^\rho} = \sigma < \infty,$$

$$\text{б)} \quad 0 < \lim_{r \to \infty} \frac{u(r)}{r^\rho} = \sigma < \infty, \quad \lim_{r \to \infty} \frac{v(r)}{r^\rho} = 0,$$

то они не имеют эквивалентных уточненных порядков.

Доказательство. Заметим, что если уточненные порядки $\varsigma_1(r)$ и $\varsigma_2(r)$ функций $u(r)$ и $v(r)$ эквивалентны, то каждый из них является общим уточненным порядком для обеих функций. Действительно,

если $\varsigma_2(r) = \varsigma_1(r) + \frac{\alpha(r)}{\ln r}$, $|\alpha(r)| \leqslant M < \infty$, то

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{u(r)}{r^{\varsigma_2(r)}} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \left[\frac{u(r)}{r^{\varsigma_1(r)}} e^{(\varsigma_1(r) - \varsigma_2(r)) \ln r} \right] = \overline{\lim_{r \to \infty}} \left(\frac{u(r)}{r^{\varsigma_1(r)}} \cdot e^{-\alpha(r)} \right) = \beta_1,$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{v(r)}{r^{\varsigma_1(r)}} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \left(\frac{v(r)}{r^{\varsigma_2(r)}} e^{\alpha(r)} \right) = \beta_2,$$

где $0 < \beta_1, \beta_2 < \infty$. Поэтому достаточно доказать, что функции $u(r)$ и $v(r)$ не имеют общего уточненного порядка. Пусть для некоторого уточненного порядка $\varsigma(r)$, $\lim \varsigma(r) = \varsigma$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{u(r)}{r^{\varsigma(r)}} = A_1, \quad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{v(r)}{r^{\varsigma(r)}} = A_2,$$

где $0 < A_1, A_2 < \infty$.

а) Для любого $M > 0$ и любого $\varepsilon > 0$

$$A_1=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{u(r)}{r^{\rho(r)}}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\frac{u(r)}{r^{\rho}}\cdot\frac{r^{\rho}}{v(r)}\cdot\frac{v(r)}{r^{\rho(r)}}\right)\geqslant\frac{M}{\sigma+\varepsilon}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{v(r)}{r^{\rho(r)}}=$$

$$=\frac{MA_2}{\rho+\varepsilon},$$

что противоречит конечности A_1.

б) $$A_1=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{u(r)}{r^{\rho(r)}}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\frac{u(r)}{r^{\rho}}\cdot\frac{r^{\rho}}{v(r)}\cdot\frac{v(r)}{r^{\rho(r)}}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{v(r)}{r^{\rho(r)}}=\frac{\sigma A_2}{2\varepsilon}$$

и так как $\varepsilon>0$ произвольно, то A_1 не может быть конечным. Лемма доказана.

Для построения нужных функций используем известную (см. [4]) целую функцию

$$f(z,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n[\sqrt{\ln n}]}}{n!}w^n.$$

При фиксированном $z\neq0$ это функция первого порядка по переменной w и ее обычный тип

$$\sigma(z,1)=\begin{cases}0, & |z|<1\\ 1, & |z|=1\\ \infty, & |z|>1\end{cases}.$$

Положим

$$\Phi_1(r_1,r_2)=\ln\max_{|z|=r_1,\ |w|=r_2}|f(z,w)|,$$

$$\Phi_2(z,t)=\ln\max_{|w|=t}|f(z,w)|.$$

Тогда $\Phi_1\in A$, $\Phi_2\in B$ и $\overline{\rho_2}(\Phi_1)=\overline{\rho_2}(\Phi_2)=1$.

При любых $r_1>0$ и $z\neq0$ функция $\Phi_1(r_1,r_2)$ возрастает по переменной r_2, а функция $\Phi_2(z,t)$ — по переменной t. Кроме того, существуют пределы [10, гл. 1, § 2]

$$\lim_{r_2\to\infty}\frac{\Phi_1(r_1,r_2)}{r_2}=\begin{cases}0, & r_1<1\\ 1, & r_1=1\\ \infty, & r_1>1\end{cases}$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_2(z,t)}{t}=\begin{cases}0, & |z|<1\\ 1, & |z|=1\\ \infty, & |z|>1.\end{cases}$$

Таким образом, функции $\Phi_1(r_1,r_1)$ и $\Phi_2(z,t)$ удовлетворяют условиям леммы при любых фиксированных $r_1>0$ и $z\neq$. Но тогда функция $\Phi_1(r_1, r_2)$ не имеет уточненного порядка по переменной r_2, не зависящего от r_1, а функция $\Phi_2(z, t)$ — по переменной t, не зависящего от z. Построение примера закончено.

Автор искренне признателен Л. И. Ронкину за постановку задач и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sire O. Sur les fonctions de deux variables d'ordre aparrént total fini.— «Rend. circolo mat. Palermo», 1911, t. 31, p. 1—91.
2. Lelong P. Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variabies complexes. — «Ann. Scient. Ecole Norm. Supér.», 1941, t. 58, p. 83—176.
3. Ронкин Л. И. О типах целой функции двух комплексных переменных. «Мат. сб.», 1956, т. 39 (81), № 2, с. 253—266.
4. Ронкин Л. И. О росте целых функций многих комплексных переменных.— «Мат. сб.», 1966, т. 71 (113), № 3, с. 337—356.
5. Lelong P. Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n. — «Journ. d'Analyse Math.», 1964, т. 12, p. 365—407.
6. Lelong P. Fonctions entières de type exponentiel dans C^n. — «Ann. de l'institut Fourier», 1966, t. 16, N 2, p. 269—318.
7. Ронкин Л. И. О росте фукции $\Phi(r_1, ..., r_n)$, выпуклой относительно $\ln r_1 ... \ln r_n$. «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 5, с. 1028—1031.
8. Ронкин Л. И. О росте плюрисубгармонических функций и о распределении значений целых функций многих переменных. — «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, № 2, с. 290—292.
9. Hengartner W. Famille des traces sur les droites complexes d'une fonction plurisousharmonique ou entière dans C^n.— «Comment. math. helv.», 1968, t. 10, № 7, p. 358—377.
10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
11. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
12. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
13. Фаворов С. Ю. О функциях класса B и их применении в теории мероморфных функций многих переменных. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 20. Харьков, 1974, с. 150—160.

Поступила 16 февраля 1974 г.