УДК 517.521.8

А. П. КОХАНОВСКИЙ

УСЛОВИЯ РАВНОСИЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНОГО И ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

1. В работе [1] Н. А. Давыдов указал ряд условий, достаточных для того, чтобы методы суммирования Абеля-Пуассона и Чезаро были равносильны. В настоящей работе мы, используя метод

Н. А. Давыдова, докажем два предложения, дающих достаточные условия для равносильности дискретного и полунепрерывного логарифмических методов суммирования.

Пусть дана последовательность

$$\{s_n\} \ (n=0;\ 1;\ 2;\ldots). \tag{1}$$

Последовательность (1) называется суммируемой к числу s полунепрерывным логарифмическим методом или (L)-методом, если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1}$$

сходится для $|x|<1$ и

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} = s. \tag{2}$$

Если же

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s, \tag{3}$$

где

$$t_0 = s_0,\ t_1 = s_1,$$

$$t_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{k+1} \ (n=2;\ 3,\ldots),$$

то последовательность (1) называется суммируемой к числу s дискретным логарифмическим методом или (l)-методом.

Известны [2] следующие теоремы A и B, принадлежащие K. Ishiguro.

Теорема A. *Если действительная последовательность* (1) *такова, что* $s_n > -K (n=0;\ 1;\ \ldots)$, *где* $K>0$, *то из* (2) *следует* (3).

Теорема B. *Если комплексная последовательность* (1) *такова, что* $|s_n| < K (n=0;\ 1;\ \ldots)$, *то из* (2) *следует* (3).

Мы докажем следующие теоремы 1—3.

Теорема 1. *Пусть* $s_{n_i} (i=0;\ 1;\ldots)$ — *все те члены последовательности* (1), *которые принадлежат замкнутой области* $D(z: |z| \geqslant R)$ *при каком-нибудь* $R>0$. *Тогда из* (2) *следует* (3), *если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=0}^{k} \frac{|s_{n_i}|}{n_i+1} = 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* s_{n_i} $(i=0;\ 1;\ \ldots)$ — *все те члены действительной последовательности* (1), *которые принадлежат промежутку* $(-\infty;\ -R)$ *при каком-нибудь* $R>0$. *Тогда из* (2) *следует* (3), *если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=0}^{k} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} = Q, \tag{5}$$

причем в случае $Q \neq 0$ должно выполняться еще и условие

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\ln n_{i+1}}{\ln n_i} = 1. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть s_{n_i} — те же, что и в теореме 2. Если выполнено условие*

$$\frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=0}^{k} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} > -C, \tag{7}$$

где $C>0$, то из равенства

$$\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} = O(1) \tag{8}$$

для $0<x<1$ следует равенство

$$t_n = O(1). \tag{9}$$

2. Для доказательства теорем 1—3 нам понадобятся следующие леммы, которые, по нашему мнению, представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $\{n_i\}$ $(i=0;\ 1;\ \ldots)$ — возрастающая последовательность целых положительных чисел, а $\{c\}$ $(i=0;\ 1;\ \ldots)$ — последовательность неотрицательных действительных чисел таких, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{n_i+1} x^{n_i+1}$ сходится для $|x|<1$. Для того чтобы имело место равенство*

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{n_i+1} x^{n_i+1} = 0, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\ln n_k} \sum_{i-0}^{h} \frac{c_i}{n_i+1} = 0. \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть последовательности $\{n_i\}$ и $\{c_i\}$ будут такие же, как и в лемме 1. Тогда для того чтобы имело место равенство*

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{n_i+1} x^{n_i+1} = C, \tag{12}$$

где $C>0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{n_i+1} = C \tag{13}$$

и чтобы

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\ln n_{i+1}}{\ln n_i}=1. \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть последовательности* $\{n_i\}$ **и** $\{c_i\}$ *будут те же, что и в лемме 1. Для того чтобы было справедливо равенство*

$$\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{n_i+1}x^{n_i+1}=O(1) \tag{15}$$

для $0<x<1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i}{n_i+1}=O(\ln n_k). \tag{16}$$

3. Доказательство леммы 2. Пусть справедливо (12). Положим $a_n=c_i$, если $n=n_i$ и $a_n=0$, если $n\neq n_i$. Тогда (12) запишется так:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=C.$$

По теореме A имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}=C.$$

В частности,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln n_k}\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i}{n_i+1}=C,$$

т. е. справедливо равенство (13).

При $n=n_{k+1}-1$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln(n_{k+1}-1)}\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i}{n_i+1}=C.$$

Отсюда и из (13) заключаем, что

$$\lim_{\to\infty}\frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k}=1,$$

т. е. справедливо и (14).

Пусть теперь выполнены условия (13) и (14). Из условия (13) следует, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{n_i+1}x^{n_i+1}$ сходится для $|x|<1$.

Рассмотрим последовательность $\{b_n\}$: $b_n=c_i$, если $n=n_i$, $b_n=0$, если $n\neq n_i$.

Пусть

$$t'_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} \, (n \geqslant 2).$$

Тогда из равенства (13) следует, что

$$\lim_{k=\infty} t'_{n_k} = C.$$

Если $n_k < n < n_{k+1}$, то в силу (14)

$$\lim_{n\to\infty} t'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln n} t'_{n_k} = C,$$

т. е. последовательность $\{b_n\}$ суммируется к числу C (l)-методом. Тогда она будет суммироваться к числу C и (L)-методом [3], т. е.

$$\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{n_i+1} x^{n_i+1} \to C \, (x \to 1-0).$$

Лемма 2 доказана.

4. Доказательства лемм 1 и 3 аналогичны доказательству леммы 2 и поэтому мы их здесь опускаем.

5. Доказательство теоремы 2. Если $Q \neq 0$, то из равенств (5), (6) и леммы 2 заключаем, что

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} x^{n_i+1} = Q. \tag{17}$$

Если $Q=0$, то равенство (17) следует из (5) и леммы 1. По условию теоремы последовательность (1) суммируется к числу s (L)-методом. Поэтому

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \left(-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} x^{n_i+1} + \sum_{i} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} x^{m_i+1} \right) = s - 2Q, \tag{18}$$

где $$\{m_i\} = \{0; 1; 2; \ldots\} \setminus \{n_i\}.$$

Последовательность $\{s'_n\}$ определим так: $s'_n = -s_{n_i}$, если $n=n$ и $s'_n = s_{m_i}$, если $n = m_i$, где $\{m_i\} = \{0; 1; 2; \ldots\} \mid \{n_i\}$.

Равенство (18) запишется в виде

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s'_n}{n+1} x^{n+1} = s - 2Q. \tag{19}$$

Последовательность $\{s'_n\}$ такова, что $s'_n \geqslant -R$ $(n=0; 1; \ldots,)$. Применив к ней теорему A, получим

$$t_n' = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k'}{k+1} \to s - 2Q\ (n \to \infty). \qquad (20)$$

Пусть $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ и η — количество $m_i \in [0;\ n]$.
Тогда из равенств (5), (6) и (20) следует, что

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{\eta} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} = t_n' + \frac{\ln n_k}{\ln n} \cdot \frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=0} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} \to s - Q$$

при $n \to \infty$ и, следовательно,

$$t_n = \left(\frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{k} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} + \frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{\eta} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} \right) \to s\ \ (n \to \infty).$$

Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2.

7. Доказательство теоремы 3. Равенство (8) представим в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} x^{n_i+1} + \sum_{i} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} x^{m_i+1} = O\left(\ln (1-x)^{-1}\right), \qquad (21)$$

где $\{m_i\} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\} | \{n_i\}$.

Из условия (7) и леммы 3 имеем

$$\frac{1}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} x^{n_i+1} = O(1),$$

а отсюда и из (21) получаем

$$\frac{1}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{i} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} x^{m_i+1} = O(1). \qquad (22)$$

Пусть
$$s_{m_i}' = s_{m_i} + R.$$

Тогда в силу (22) имеем

$$\sum_{i} \frac{s_{m_i}'}{m_i+1} x^{m_i+1} - R \sum_{i} \frac{x^{m_i+1}}{m_i+1} = 0\left(\ln \frac{1}{1-x}\right). \qquad (23)$$

Так как
$$\sum_{i} \frac{x^{n_i+1}}{n_i+1} \leqslant \ln \frac{1}{1-x} \text{ для } 0 < x < 1,$$

то
$$\sum_i \frac{s'_{m_i}}{m_i+1} x^{m_i+1} = O\left(\ln \frac{1}{1-x}\right).$$

Если m_i — конечная последовательность, то утверждение теоремы очевидно, а если m_i — бесконечная последовательность, то по лемме 3 получим

$$\frac{1}{\ln m_\nu} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{s'_{m_i}}{m_i+1} < C, \tag{24}$$

где C — положительная постоянная.

Из (28) и равенства $s'_{m_i} = s_{m_i} + R$ имеем

$$\frac{1}{\ln m_\nu} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} + \frac{R}{\ln m_\nu} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{m_i+1} < C,$$

следовательно,

$$\sum_{=}^{\nu} \frac{s_{m_i}}{m_i+1} = 0(\ln m_\nu).$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (7) убеждает нас в том, что
$$t_n = O(1).$$

Теорема 3 доказана.

9. В связи с теоремой 3 возникает следующий вопрос: пусть выполнено условие (7), будет ли из суммируемости последовательности (1) к числу s (L)-методом следовать суммируемость этой последовательности к s (l)-методом.

Следующий пример показывает, что на поставленный вопрос следует дать отрицательный ответ.

Пример. Последовательность $\{s_n\}$ $(n=0;\ 1;\ \ldots)$ определим следующим образом:

$$s_n = \begin{cases} -(n+1)\ln(n-1), & \text{если } n = 2^{2^k}+1\ (k=1;\ 2,\ \ldots), \\ (n+1)\ln n, & \text{если } n = 2^{2^k}\ (k=1;\ 2;\ \ldots), \\ 0, & \text{если } n \neq 2^{2^k} \text{ и } n \neq 2^{2^k}+1. \end{cases}$$

Последовательность $\{s_n\}$ не суммируется (l)-методом ни к какому конечному числу, так как не выполняется необходимое условие (l)-суммируемости:
$$s_n = 0(n \ln n) \quad (n \to \infty).$$

Проверим выполнимость условия (7):

$$\frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=}^{k} \frac{|s_{ni}|}{n_i+1} = \frac{1}{\ln(2^{2^k}+1)} \sum_{i-1}^{k} \frac{(2^{2^i}+2)\ln 2^{2^i})}{2^{2^i}+2} < 2.$$

Условие (7) выполнено. Покажем, что наша последовательность суммируется (L)-методом к нулю:

$$f(x) = \frac{1}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} = \frac{(1-x)\ln 2}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2^{2^k}+1}.$$

Введем обозначение

$$A(x) = \frac{1}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2^{2k}+1}.$$

Пользуясь леммой 3, покажем, что функция $A(x)$ ограничена в промежутке $0 \leqslant x < 1$. Действительно, для функции

$$A(x) = \frac{1}{\ln (1-x)^{-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (2^{2^k}+1)}{2^{2^k}+1}$$

имеем

$$\frac{1}{\ln 2^{2^k}} \sum_{=}^{k} \frac{(2^{2^i}+1)\,2^i}{2^{2^i}+1} < \frac{2}{\ln 2}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ суммируется к нулю (L)-методом.

В заключение благодарю Н. А. Давыдова за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов Н. А. Обобщение двух тауберовых теорем Харди и Литтльвуда. — «Укр. мат. журн.», 1964, т. 26, № 6, с. 711—720.
2. Ishiguro K. A converse theorem on the summability methods. — «Proc. Japan Acad.», 1963, vol. 39, № 1, p. 38—41.
3. Ishiguro K. On the summability methods of logarithmic type. — «Proc. Japan Acad»., 1962, vol. 38, № 10, p. 703—705.

Поступила 20 октября 1973 г.