УДК 517.432

Г. М. ГУБРЕЕВ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ-ФУНКЦИЯХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть A — замкнутый линейный неограниченный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, со всюду плотной областью определения D_A. Обозначим через H_A множество векторов f, лежащих в D_A, для которых

$$(Af,\ g)=(f,\ Ag)$$

при любом $g\in D_A$.

Оператор A называется квазиэрмитовым оператором ранга r (K^r -оператором), если $A|H_A$ — эрмитов оператор с индексом дефекта $(r,\ r)$, $(0<r<\infty)$ и $\dim D_A/H_A=r$.

Предполагается, что K^r-оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку λ вместе со своей сопряженной. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda=i$.

Этот класс неограниченных несамосопряженных операторов изучался А. В. Кужелем [2, 3] с помощью введенной им характеристической матрицы-функции. Матрица-функция $W(\lambda)$ комплексного переменного λ называется характеристической для K^r-оператора A, если выполняются следующие требования:

1) $W(i)>0$;

2) $W(\lambda)\,W(i)=I+i(\lambda+i)\|((A^*-iI)(A^*-\lambda I)^{-1}g_k,\ g_i)\|\,I,$ (1)

где $\{g_k\}_{k=1}^r$ — совокупность ортогональных векторов, удовлетворяющих условию

$$B=i(A+iI)^{-1}-i(A^*-iI)^{-1}-2(A^*-iI)^{-1}(A+iI)^{-1}=$$

$$=\sum_{i,k=1}^{r}(\cdot,g_i)\,J_{ik}\,g_k,$$

$$\|J_{ik}\|=J,\ J^2=I,\ J^*=J.$$

Теорема. *Если $D_A=D_{A^*}$, то существует совокупность векторов $\{\psi_k\}_{k-1}^r$ такая, что*

$$\frac{A-A^*}{i}f=\sum_{i,k=1}^{r}(f,\psi_i)\,J_{ik}\,\psi_k,\quad f\in D_A;$$

$$W(\lambda)=I+i\,\|((A^*-\lambda I)^{-1}\psi_i,\ \psi_k)\|\,J;$$

$$\psi_k=(A^*-iI)\,g_k=(k=1,2,\ldots,r).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $W(\lambda)$ можно представить в виде, в котором она вводилась для ограниченных несамосопряженных операторов с r-мерной мнимой компонентой [1].

В настоящей работе получено аналогичное представление характеристической матрицы-функции $W(\lambda)$ в том случае, когда

$$D_A \neq D_{A^*}, \quad \overline{H}_A = H.$$

Пусть в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (f, g) $f, g \in H$ имеется всюду плотное линейное многообразие Φ_+, являющееся полным банаховым пространством относительно нормы $\|f\|_+$, причем

$$(f, f)^{1/2} = \|f\| \leqslant \|f\|_+.$$

Совокупность линейных ограниченных функционалов над Φ_+ называется множеством обобщенных элементов гильбертова пространства H и обозначается через Φ_-.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $\widehat{\partial}(f) = (f, \widehat{g})$, если $\widehat{g}(f)$ — линейный ограниченный функционал над Φ_+ $(\widehat{g}(f) = (\widehat{g}, f)$. Линейное множество Φ_- является банаховым пространством относительно нормы

$$\|\widehat{g}\|_- = \sup_{f \in \Phi_+} \frac{|(f, \widehat{\Phi})|}{\|f\|_+}.$$

Пусть A — линейный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения D_A, причем $D_A \subset \Phi_+$, $D_{A^*} \subset \Phi_+$. Предположим, что существуют операторы A_{Φ_+} и $A^+_{\Phi_+}$, действующие на Φ_+ в Φ_- и удовлетворяющие условиям

1. $$A_{\Phi_+} g = Ag, \; g \in D_A, \; A^+_{\Phi_+} \varphi = A^* \varphi, \; \varphi \in D_{A^*}.$$

2. Операторы A_{Φ_+} и $A^+_{\Phi_+}$ сопряжены друг другу в обобщенном смысле:

$$(A_{\Phi_+} u, v) = (u, A^+_{\Phi_+} v) \; u, v \in \Phi_+.$$

Определение. *Линейный оператор $A\Phi_+$ $(A\Phi^+)$ называется обобщенным расширением оператора $A(A^*)$.* Обобщенные расширения были введены и изучались в работах [4, 5]. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $W(\lambda)$ — характеристическая матрица-функция K^r-оператора A, $\overline{H}_A = H$. Тогда существуют обобщенное расширение $A\Phi_+$ оператора A и обобщенные элементы $\{\widehat{g}_k\}_{k=r}^r$ такие, что*

$$\frac{A_{\Phi_+} - A^+_{\Phi_+}}{i} = \sum_{i,k=0}^{r} (\cdot, \widehat{g}_k) J_{ki} \widehat{g}_i,$$

$$W(\lambda) = I + i \|((A^{+}_{\Phi_+} - \lambda I)^{-1} \hat{g}_k, \hat{g}_i)\| J.$$

1. Пусть A — K^r-оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, причем $\overline{H}_A = H$. Так как в рассматриваемом случае $D_A \cap D_{A^*} = H_A$, на линейном многообразии $\Phi_+ = D_A + D_{A^*}$ имеет смысл оператор $\widetilde{A}$, определенный следующим образом:

$$\widetilde{A} f = A g + A^* \varphi,\ f = g + \varphi,\ g \in D_A,\ \varphi \in D_{A^*}.$$

Пусть совокупности векторов $\{g_k\}_{k=1}^r$ и $\{g_k^*\}_{k=1}^r$ удовлетворяют соотношениям

$$B = i(A + iI)^{-1} - i(A^* - iI)^{-1} - 2(A^* - iI)^{-1}(A + iI)^{-1} = \sum_{k,i=1}^{r} (\cdot, g_k) J_{ki} g_i;$$

$$B_* = i(A - iI)^{-1} - i(A^* + iI)^{-1} - 2(A - iI)^{-1}(A^* + iI)^{-1} = \sum_{k,i=1}^{r} (\cdot, g_k^*) J_{ki} g_i^*. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что векторы $g_k^* = \sum_{i=1}^{r} W_{ki}^{-1}(i) g_i$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ удовлетворяют второму соотношению (2). Зададим на линейном множестве Φ_+ функционалы $\hat{g}_k$ $(k=1, 2, \ldots, r)$, которые действуют на элемент $f = g + \varphi$ согласно формуле

$$(f, \hat{g}_k) + ((A + iI) g, g_k) + ((A^* + iI) \varphi, g_k^*),$$
$$g \in D_A,\ \varphi \in D_{A^*}. \tag{3}$$

Из замкнутости оператора $\widetilde{A}$ вытекает, что линейное многообразие Φ_+ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_+ = \|\widetilde{A} f\| + \|f\|,\ f \in \Phi_+. \tag{4}$$

Кроме того, функционалы $\hat{g}_k (k=1, 2, \ldots, r)$ принадлежат Φ_-.

Из соотношений (2) нетрудно получить, что для любых $g_1, g_2 \in D_A$ и любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D_{A^*}$ имеют место равенства

$$\frac{1}{i}[(Ag_1, g_2) - (g_1, Ag_2)] = \sum_{k,i=1}^{r} (g_1, \hat{g}_k) J_{ki} (\hat{g}_i, g_2);$$

$$\frac{1}{i}\left[(\varphi_1, A^*\varphi_2) - (A^*\varphi_1, \varphi_2)\right] = \sum_{k,i=1}^{r} (\varphi_1, \widehat{g}_k)\, J_{ki}\, (\widehat{g}_i, \varphi_2). \tag{5}$$

Имеет место также и обратное утверждение.

Теорема 1. *Пусть для какого-нибудь* K^r *-оператора* $A(\overline{H}_A = H)$ *выполняются равенства* (5), *где* $\{\widehat{g}_k\}_{k=1}^{r}$ *принадлежат* Φ_-. *Тогда*

$$(g, \widehat{g}_k) = ((A + iI)\, g, g_k), \; g \in D_A,$$

$$(\varphi, \widehat{g}_k) = ((A^* + iI)\, \varphi, \; g_k^*), \; \varphi \in D_{A^*}.$$

Векторы удовлетворяют соотношениям (2)

$$\{g_k\}_{k=1}^{r} \;\; и \;\; \{g_k^*\}_{k=1}^{r}.$$

Доказательство. Рассмотрим заданный на пространстве H функционал

$$F_k(h) = ((A + iI)^{-1} h, \; \widehat{g}_k)$$

и докажем, что он ограничен. Произвольный вектор $h \in H$ можно представить в виде

$$h = h_1 + h_2, \; h_1 \in N_{-i}, \quad h_2 \in M_{-i} = \overline{(A + iI) H_A}.$$

Тогда

$$F_k(h) = (g_A, \; \widehat{g}_k) + F_k(h_1), \; g_A \in H_A. \tag{6}$$

Заметим, что матрица $\|(f_k, \widehat{g}_i)\|$ ($f_k \in D_A$, $k = 1, 2, \ldots, r$ и линейно не зависимы по модулю H_A) обратима. Но если $g_A \in H_A$, то из соотношений (5) следует, что

$$\sum_{k,i=1}^{r} (f_s, \widehat{g}_k)\, J_{ki}\, (\widehat{g}_i, g_A) = 0, \; s = 1, 2, \ldots, r.$$

Поэтому, возвращаясь к (6), получим

$$F_k(h) = F_k(h_1).$$

Так как подпространство N_{-i} конечномерно, то

$$|F_k(h)| \leqslant M\, \|h\|.$$

Аналогично, функционал $((A^* + iI)^{-1} h, \; \widehat{g}_k)$ также будет ограничен. По теореме Рисса существуют векторы g_k и g_k^* такие, что

$$((A + iI)^{-1} h, \; \widehat{g}_k) = (h, g_k); \;\; ((A^* + iI)^{-1} h, \; \widehat{g}_k) = (h, \; g_k^*). \tag{7}$$

Положив в равенствах (5)

$$g_p = (A + iI)^{-1} h_p,\ \varphi_p = (A^* + iI)^{-1} f_p$$

$(p = 1, 2)$ в силу (7), получим, что векторы $\{g_k\}_{k=1}^r$ и $\{g_k^*\}_{k=1}^r$ удовлетворяют соотношениям (2).

Равенство (7) можно переписать в виде

$$(g, \widehat{g}_k) = ((A + iI) g, \widehat{g}_k),\ g \in D_A,$$

$$(\varphi, \widehat{g}_k) = ((A^* + iI) \varphi,\ g_k^*),\ \varphi \in D_{A^*}.$$

Теорема доказана.

2. Обобщенные элементы $\{\widehat{g}_k\}_{k=1}^r$ назовем обобщенными каналовыми элементами оператора A в отличие от истинных каналовых элементов $\{g_k\}_{k=1}^r$.

Определим линейные функционалы $\widehat{e}_k$ $(k=1, 2, \ldots, 2r)$ следующим образом:

$$(f, \widehat{e}_k) = \begin{cases} ((A + iI) f, g_k), & f \in D_A, \\ 0, & f \in D_{A^*}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

$$(f, \widehat{e}_k) = \begin{cases} 0, & f \in D_{A^*}, \\ ((A^* + iI) f,\ g_{k-r}^*), & f \in D_{A^*}, \end{cases} \quad k = r, r+1, \ldots, 2r.$$

Обобщенные элементы $\widehat{e}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 2r)$ линейно независимы. Действительно, если существует совокупность чисел $\{c_i\}_{i=1}^{2r}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{r} c_k (f, \widehat{e}_k) = 0, \quad f \in \Phi_+,$$

то это означает, что для любых $g \in D_A$ и $\varphi \in D_{A^*}$ имеют место равенства

$$\left((A + iI) g,\quad \sum_{i=1}^{r} \overline{c}_i g_i \right) = 0,$$

$$\left((A^* + iI) \varphi,\quad \sum_{i=r+1}^{2r} \overline{c}_i g_{i-r}^* \right) = 0,$$

которые противоречат линейной независимости векторов

$$\{g_i\}_{i=1}^r \text{ и } \{g_i^*\}_{i=1}^r.$$

Рассмотрим линейные операторы A_{Φ_+} и $A_{\Phi_+}^+$, действующие из Φ_+ в Φ_-:

$$A_{\Phi_+} = \tilde{A} + \sum_{k,j=1}^{2r} \gamma_{kj}(\cdot, \hat{e}_j)\hat{e}_k$$

$$A^+_{\Phi_+} = \tilde{A} + \sum_{k,j=1}^{2r} \gamma^+_{kj}(\cdot, \hat{e}_j)\hat{e}_k,$$

где матрицы γ и γ^+ имеют следующий вид:

$$\gamma = i\begin{pmatrix} 0 & J' \\ 0 & J' \end{pmatrix},\ \gamma^+ = -i\begin{pmatrix} J' & 0 \\ J' & 0 \end{pmatrix},\ J'_{ki} = J_{ik}.$$

Специальный выбор матриц γ и γ^+ обеспечивает то обстоятельство, что A_{Φ_+} совпадает с A на многообразии D_A, а оператор $A^+_{\Phi_+}$ — с A^* на всех элементах D_{A^*}.

Лемма 1. *Линейные операторы* $A_{\Phi+}$ *и* $A^+_{\Phi_+}$ *сопряжены друг другу в обобщенном смысле:*

$$(A_{\Phi_+}u, v) = (u, A^+_{\Phi_+}v),\ u, v \in \Phi_+.$$

Доказательство. Используя равенства (5) и учитывая, что

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in D_A,\ u_2 \in D_{A^*},$$
$$v = v_1 + v_2,\ v_1 \in D_A,\ v_2 \in D_{A^*},$$

получаем

$$(\tilde{A}u, v) - (u, \tilde{A}v) = (Au_1 + A^*u_2, v_1 + v_2) = -(u_1 + u_2, Av_1 + A^*v_2) =$$
$$= (Au_1, v_1) - (u_1, Av_1) - (u_2, A^*v_2) + (A^*u_2, v_2) = i\sum_{k,l=1}^{r}(u_1, \hat{g}_k)J_{kl}\times$$
$$\times(\hat{g}_l, v_1) = -i\sum_{k,i=1}^{r}(u_2, \hat{g}_k)J_{ki}(\hat{g}_i, v_2).$$

С другой стороны,

$$\left(\sum_{k,i=1}^{2r}\gamma_{ki}(u, \hat{e}_i)\hat{e}_k, v\right) - \left(u, \sum_{k,i=1}^{2r}\gamma^+_{ki}(v, \hat{e}_i)\hat{e}_k\right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{2r}\gamma_{kl}(u, \hat{e}_i)(\hat{e}_l, v) - \sum_{k,l=1}^{2r}\overline{\gamma^+_{k,l}}(u, \hat{e}_k)(\hat{e}_l, v) =$$

$$= -i \sum_{k,l=1}^{r} (u_1, \widehat{g}_k) J_{kl} (\widehat{g}_l, v_1) + i \sum_{k,l=1}^{r} (u_2, \widehat{g}_k) J_{kl} (\widehat{g}_l, v_2).$$

Таким образом,

$$(A_{\Phi_+} u, v) - (u, A^+_{\Phi_+} v) = 0.$$

Лемма доказана.

3. Оператор $\frac{1}{2i}(A_{\Phi_+} - A^+_{\Phi_+})$ называется обобщенной мнимой компонентой оператора A. Такие расширения линейных операторов называются обобщенными и изучались в работах [4, 5].

Лемма 2. *Вектор*

$$u^l_\lambda = g_l + (\lambda - i)(A^* - \lambda I)^{-1} g_l,$$

принадлежащий $N_{\overline{A}}$, является единственным решением уравнения

$$A^+_{\Phi_+} u^l_\lambda - \lambda u^l_\lambda = \widehat{g}_l, \tag{8}$$

где λ — регулярная точка оператора A^*.

Доказательство. Докажем единственность решения уравнения (8). Действительно, если мы допустим, что

$$\widetilde{A} u^l_\lambda - \lambda u^l_\lambda + \sum_{k,j=1}^{2r} \gamma^+_{kj} (u^l_\lambda, \widehat{e}_j) \widehat{e}_k = 0,$$

то в силу того, что $H_A = H$, получим

$$\widetilde{A} u^l_\lambda - \lambda u^l_\lambda = 0,$$

$$\sum_{k,j=1}^{2r} \gamma^+_{kj} (u^l_\lambda, \widehat{e}_j) \widehat{e}_k = 0.$$

Так как система обобщенных векторов $\{e_k\}_{k=1}^{2r}$ линейно независима, то

$$\sum_{j=1}^{2r} \gamma^+_{kj} (u^l_\lambda, \widehat{e}_j) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2r.$$

Последнее равенство означает, что

$$(u^l_\lambda, \widehat{e}_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, r,$$

откуда следует принадлежность вектора u^l_λ к D_{A^*}.

Но

$$\widetilde{A} u^l_\lambda - \lambda u^l_\lambda = A^* u^l_\lambda - \lambda u^l_\lambda = 0.$$

Значит,

$$u_\lambda^l = 0.$$

Проверим теперь, что

$$u_\lambda^l = g_l + (\lambda - i)(A^* - \lambda I)^{-1} g_l$$

является решением уравнения (8).

Нетрудно проверить, что

$$\widetilde{A} u_\lambda^l - \lambda u_\lambda^l = \widetilde{A} g_l - \lambda g_l + (\lambda - i) g_l = \widetilde{A} g_l - i g_l.$$

Из равенства

$$B g_p = \sum_{k,l=1}^{r} (g_p, g_k) J_{kl} g_l$$

следует

$$g_l = \sum_{s=1}^{r} A_{ls} B g_s;$$

$$\|A_{is}\|^{-1} = \sum_{k=1}^{r} (g_l, g_k) J_{ks}. \tag{9}$$

Поэтому

$$\widetilde{A} g_l - i g_l = \sum_{s=1}^{r} A_{ls} (\widetilde{A} - iI) B g_s = \sum_{s=1}^{r} A_{ls} (\widetilde{A} - iI) [i (A + iI)^{-1} g_s -$$

$$- i (A^* - iI)^{-1} g_s - 2 (A^* - iI)^{-1} (A + iI)^{-1} g_s] = 0.$$

Осталось убедиться в том, что

$$\sum_{k,l=1}^{2r} \gamma_{kl}^{+} (u_\lambda^l, \widehat{e}_j) \widehat{e}_k = \widehat{g}_l.$$

Для этого мы докажем следующее равенство:

$$i (g_k, \widehat{g}_s) = - J_{ks} - 2 \sum_{p=1}^{r} (g_k, g_p) W_{ps}^{-1}(i) + \sum_{p=1}^{r} J_{kp} W_{ps}^{-1}(i). \tag{10}$$

Используя соотношение (9), получим

$$i (g_k, \widehat{g}_s) = i \sum_{l=1}^{r} A_{kl} (B g_l, \widehat{g}_s),$$

$$(B g_l, \widehat{g}_s) = i (g_l, g_s) - i ((A^* + iI)(A^* - iI)^{-1} g_l, g_s^*) +$$

$$+2i\,((A^*+iI)(A^*-iI)^{-1}(A+iI)^{-1}g_l,\ g^*{}_s)=i\,(g_l,g_s)-i\,g_l+$$
$$+2\,(A^*-iI)^{-1}g_l-2\,(A+iI)^{-1}g_l-4i\,((A^*-iI)^{-1}(A+iI)^{-1}\times$$
$$\times g_l,\ g_s^*)=i\,(g_l,g_s)-i\,(g_l,g_s^*)+2i\,(Bg_l,g_s^*)=i\,(g_l,g_s)-i\,(g_l,g_s^*)+$$
$$+2i\sum_{k,i=1}^{r}(g_l,g_k)\,J_{ki}\,(g_i,g_s^*).$$

Учитывая вид матрицы $\|A_{is}\|$, получим

$$i\,(g_k,g_s)=-J_{ks}-2\sum_{p=1}^{r}(g_k,g_p)\,W_{ps}^{-1}(i)+\sum_{p=1}^{r}J_{kp}\,W_{ps}^{-1}(i).$$

Если $1\leqslant j\leqslant r$, то

$$(u_\lambda^l,\ \hat{e}_j)=(g_l,\ \hat{e}_j)=iJ_{lj},$$

так как в рассматриваемом случае в соотношении (10) остается только первое слагаемое.
Поэтому

$$\sum_{k,i=1}^{2r}\gamma_{ki}^{+}(u_\lambda^l,\ \hat{e}_i)\,\hat{e}_k=\hat{e}_l+\hat{e}_{l+r}=\hat{g}_l.$$

Лемма доказана.

Вектор u_λ^l мы будем называть значением резольвенты оператора $A_{\Phi_+}^{+}$ на обобщенном элементе $\hat{g}_l$;

$$(A_{\Phi_+}^{+}-\lambda\hat{I})^{-1}g_l=u_\lambda^l.$$

Теорема 2. *Если A — K^r-оператор, причем $H_A=H$, то существует обобщенное расширение A_{Φ_+} оператора A и обобщенные элементы $\{\hat{g}_k\}_{k=1}^{r}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\frac{1}{i}\,(A_{\Phi_+}-A_{\Phi_+}^{+})=\sum_{k,j=1}^{r}(\cdot,\hat{g}_k)\,J_{kj}\,\hat{g}_j,$$

$$W(\lambda)=I+i\,\|((A_{\Phi_+}^{+}-\lambda I)^{-1}\hat{g}_k,\ \hat{g}_i)\|\,J,$$

где $W(\lambda)$ — характеристическая матрица-функция оператора A.

Доказательство. Из леммы 2 следует

$$((A_{\Phi_+}^{+}-\lambda I)^{-1}\hat{g}_k,\hat{g}_i)=(g_k,\ \hat{g}_i)+(\lambda-i)\,((A^*+iI)(A^*-\lambda I)^{-1}g_k,g_i^*).$$

Используя соотношение (10), получаем

$$W(\lambda) = JW^{-1}(i)\,J + i(\lambda + i)\|((A^* - iI)(A^* - \lambda I)^{-1} g_k,\ g_l)\|\,W^{-1}(i)J =$$
$$= W^{-1}(i) + i(\lambda + i)\|((A^* - iI)(A^* - \lambda I)^{-1} g_k, g_l)\|\,JW^{-1}(i).$$

Следовательно,

$$W(\lambda)\,W(i) = I + i(\lambda + i)\|((A^* - iI)(A^* - \lambda I)^{-1} g_k, g_l)\|J\cdot$$

Доказанная теорема позволяет ввести следующее определение. Характеристической матрицей-функцией K^r-оператора при условии $H_A = H$ называется матрица-функция $W(\lambda)$ комплексного переменного λ:

$$W(\lambda) = I + i\|((A^+_{\Phi_+} - \lambda I)^{-1}\,\widehat{g}_k,\ \widehat{g}_l)\|J, \tag{11}$$

где $A^+_{\Phi_+}$ — обобщенное расширение оператора A^*, а $\{\widehat{g}_k\}^r_{k=1}$ — — обобщенные каналовые векторы оператора A.

Характеристическая матрица-функция неограниченных несамосопряженных операторов в виде (11) вводилась в работе [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. — «Усп. мат. наук», 1958, т. XIII, вып. 1, с. 3—85.
2. Кужель А. В. О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду. — «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 868—871.
3. Кужель А. В. Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов. — «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 1, с. 35—37.
4. Цекановский Э. Р. Характеристические функции неограниченных операторов. — «Труды Харьковского горного института», 1962, с. 212—219.
5. Цекановский Э. Р. Обобщенные расширения неограниченных операторов. — «Докл. АН СССР», 1965, т. 165, № 1, с. 44—46.
6. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 279 с.

Поступила 25 февраля 1974 г.