УДК 517.535.4

*Б. Н. ГИНЗБУРГ*

# О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье изучаются некоторые свойства хребтовых функций (хр. ф.) в $C^n$. В предыдущей работе [4] мы исследовали рост характеристических функций многомерных вероятностных законов. Характеристические функции являются подклассом класса хр. ф. Здесь мы переносим результаты предыдущей статьи на хр. ф. В дальнейшем мы сохраним обозначения, принятые в [3, 4].

Нам понадобится следующая теорема, представляющая обобщение теоремы Дюге [1, гл. 2, § 3].

**Теорема Дюге.** *Пусть* $\varphi(t)\not\equiv 0$ *— хр. ф. в полосе* $a\leqslant \operatorname{Im} t\leqslant b$, $a<b$.

*Справедливы такие утверждения:*

а) *функция* $\varphi(i\eta)$ *не обращается в нуль при* $a\leqslant\eta\leqslant b$;

б) $\arg\varphi(i\eta)=\mathrm{const}$, $a\leqslant\eta\leqslant b$;

в) *функция* $B(\eta)=\ln|\varphi(i\eta)|$ *выпукла на интервале* $a<\eta<b$;

г) *при любых* $\eta_1$, $\eta_2$, $a<\eta_1$, $\eta_2<b$ *справедливо равенство*

$$\ln|\varphi(i\eta_1)|\geqslant -|\varphi'(i\eta_2)/\varphi(i\eta_2)|\,|\eta_1-\eta_2|.$$

Следствие. *Пусть* $\varphi(t)$ *— целая хр. ф. Тогда* $M(r;\varphi)=\max\limits_{|t|\leqslant r}\varphi(t)$ *является выпуклой функцией.*

Дадим некоторые определения.

Область $G\subset C^n$ называется трубчатой, если она имеет вид

$$G=\{t\colon t\in C^n,\ \operatorname{Im} t\in B\},$$

где $B\subset R^n$ называется основанием трубчатой области.

Трубчатая область выпукла тогда и только тогда, когда выпукло ее основание.

Функция $\varphi(t)$, аналитическая в выпуклой трубчатой области $G$, $0\in G$, называется хр. ф. в этой области, если

$$|\varphi(t)|\leqslant\varphi(i\operatorname{Im} t),$$

$$\varphi(0)=1.$$

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi(t)$ *— хр. ф. в выпуклой трубчатой области* $G$ *с основанием* $B$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

*а) функция* $\varphi(i\eta)$ *не обращается в нуль при* $\eta\in B$;

*б)* $\arg\varphi(i\eta)=\mathrm{const}$, $\eta\in B$;

*в) функция* $\ln|\varphi(i\eta)|$ *выпукла по совокупности переменных при* $\eta \in B$.

Доказательство. Положим $v_\eta(\lambda) = \varphi(\eta\lambda)$. Функция $v_\eta(\lambda)$, очевидно, аналитична в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$. Так как $v_\eta(0) \neq 0$, то $v_\eta(\lambda) \neq 0$. Из (1) видно, что $v_\eta(\lambda)$—хр. ф. По теореме Дюге имеем $v_\eta(i) \neq 0$. Следовательно,

$$\varphi(i\eta) = v_\eta(i) \neq 0,$$

$$\arg\varphi(i\eta) = \arg v_\eta(i) = \arg v_\eta(0) = \text{const}.$$

Рассмотрим функцию $\Psi(\lambda) = \varphi(\lambda(\eta'' - \eta') + i\eta')$, где $\eta'$, $\eta'' \in R^n$. Функция $\Psi(\lambda)$ аналитична в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$. Из (1) следует, что

$$|\Psi(\lambda)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im}\lambda(\eta'' - \eta') + i\eta') = |\Psi(i \operatorname{Im}\lambda)|.$$

Поэтому $\Psi(\lambda)$ является хр. ф. Из теоремы Дюге заключаем, что $\ln|\varphi(i\eta)|$ выпуклая функция вдоль любой прямой $L\{\eta: \eta = t(\eta'' - \eta') + \eta'$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Следствие. *Пусть*

$$M(r; \varphi) = M(r_1, \ldots, r_n; \varphi) = \max_{\substack{|t_i| = r_i \\ i = 1, \ldots, n}} |\varphi(t)|.$$

*Тогда* $\ln M(r_1, \ldots, r_n; \varphi)$ *является выпуклой функцией по совокупности переменных* $r_1, \ldots, r_n$.

Действительно,

$$\ln M(r_1, \ldots, r_n; \varphi) = \max_{|t_i| = r_i} \ln|\varphi(t_1, \ldots, t_n)| \leqslant \max_{|t_i| = r_i} \ln\varphi(i \operatorname{Im} t) =$$

$$= \max_{|\operatorname{Im} t_i| = r_i} \ln\varphi(i \operatorname{Im} t) = \max \ln\varphi(\pm ir_1, \ldots, \pm ir_n)$$

(последний max берется по всевозможным комбинациям знаков $+$ и $-$). Так как по доказанной теореме каждая из функций $\ln\varphi(\pm ir_1, \ldots, \pm ir_n)$ является выпуклой, то заключаем, что $\ln M(r_1, \ldots, r_n; \varphi)$ — выпуклая функция по совокупности переменных $r_1, \ldots, r_n$.

Опираясь на теорему 1, мы можем с помощью рассуждений близких к проведенным нами в [4], доказать следующие теоремы о росте хр. ф.

**Теорема 2.** *Пусть* $\varphi(t)$ *— целая хр. ф.,* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *— векторы из* $S^n$, *а вектор* $\xi \in R^n$ *представим в виде их линейной комбинации. Предположим, что* $\varphi(t\xi)$; $\varphi(t\xi_1)$; ... $\varphi(t\xi_k)$, $t \in C^1$ *имеют порядки* $\rho(\xi)$, $\rho(\xi_1)$, ..., $\rho(\xi_k)$ *соответственно. Тогда справедливо неравенство*

$$\rho(\xi) \leqslant \max[\rho(\xi_1), \ldots, \rho(\xi_k)].$$

**Теорема 3.** *Функция* $\rho(\xi)$ *на единичной сфере* $S$ *пространства* $R^n$ *может принимать не более n различных значений. Неравенство*

$$\rho(\xi') < \max_{\xi \in S^n} \rho(\xi)$$

*может выполняться только на подмножестве из $S^n$, лежащем в подпространстве размерности $\leqslant n-1$.*

**Теорема 4.** *Пусть $\varphi(t)$ — целая хр. ф., $\rho$ — ее порядок по совокупности переменных* (в смысле [2], стр. 173). *Тогда*

$$\rho = \max_{\xi \in S^n} \rho(\xi).$$

**Теорема 5.** *Граница гипероктанта $\{b\colon b_j \geqslant \overline{\rho}_j(\varphi),\ j=1, .., n\}$ совпадает с гиперповерхностью сопряженных порядков целой хр. ф. $\varphi(t)$.*

Для хр. ф. в $C^n$ верны также теоремы, аналогичные теоремам А. Я. Хинчина об арифметике вероятностных законов [1, гл. 3, § 4]. Эти теоремы для случая $n=1$ были доказаны В. М. Тупицыной.

**Теорема 6.** *Всякая хр. ф. в выпуклой трубчатой области, имеющая хотя бы одну неразложимую компоненту, представляется в виде*

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) \cdot \varphi_1(t) \ldots \varphi_n(t),$$

*где $\varphi_0(t)$ — хр. ф., не имеющая неразложимых хребтовых компонент, а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., неразложимые хребтовые компоненты в конечном или счетном числе. В последнем случае бесконечное произведение сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в трубчатой области.*

**Теорема 7.** *Если хр. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых компонент, то она безгранично делима.*

Справедлив также следующий результат, дающий описание класса хр. ф., не имеющих неразложимых хребтовых компонент.

**Теорема 8.** *Класс $I_0$ хр. ф., не имеющих неразложимых хребтовых компонент, совпадает с классом безгранично делимых хр. ф.*

Теоремы доказываются рассуждениями, близкими к проведенным в [3], но аналог функционала Хинчина нужно ввести равенством

$$M_r(\varphi) = \max_{-r_j \leqslant \operatorname{Im} t_j < r_j} \ln \varphi(i \operatorname{Im} t),$$

где

$$\{t\colon |\operatorname{Im} t_j| \leqslant r_j,\ j=1, \ldots, n\} \subset B.$$

Автор выражает благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и научное руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
3. Тупицына В. М. Об арифметике хребтовых функций. — В кн.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 15. Харьков, 1972, с. 142—152.
4. Гинзбург Б. Н. О росте целых характеристических функций многомерных вероятностных законов. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 20. Харьков, 1974, с. 38—49.


*Поступила 14 июня 1974 г.*