УДК 517.535.4

Б. Н. ГИНЗБУРГ

# О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье изучаются некоторые свойства хребтовых функций (хр. ф.) в $C^n$. В предыдущей работе [4] мы исследовали рост характеристических функций многомерных вероятностных законов. Характеристические функции являются подклассом класса хр. ф. Здесь мы переносим результаты предыдущей статьи на хр. ф. В дальнейшем мы сохраним обозначения, принятые в [3, 4].

Нам понадобится следующая теорема, представляющая обобщение теоремы Дюге [1, гл. 2, § 3].

**Теорема Дюге.** *Пусть* $\varphi(t) \not\equiv 0$ — *хр. ф. в полосе* $a \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b$, $a<b$.

*Справедливы такие утверждения:*

а) *функция* $\varphi(i\eta)$ *не обращается в нуль при* $a \leqslant \eta \leqslant b$;

б) $\arg \varphi(i\eta) = \text{const}$, $a \leqslant \eta \leqslant b$;

в) *функция* $B(\eta) = \ln|\varphi(i\eta)|$ *выпукла на интервале* $a<\eta<b$;

г) *при любых* $\eta_1, \eta_2$, $a<\eta_1, \eta_2<b$ *справедливо равенство*

$$\ln|\varphi(i\eta_1)| \geqslant -|\varphi'(i\eta_2) / \varphi(i\eta_2)|\, |\eta_1-\eta_2|.$$

Следствие. *Пусть* $\varphi(t)$ — *целая хр. ф. Тогда* $M(r;\varphi) = \max\limits_{|t|\leqslant r} \varphi(t)$ *является выпуклой функцией.*

Дадим некоторые определения.

Область $G \subset C^n$ называется трубчатой, если она имеет вид

$$G = \{t: t \in C^n,\ \operatorname{Im} t \in B\},$$

где $B \subset R^n$ называется основанием трубчатой области.

Трубчатая область выпукла тогда и только тогда, когда выпукло ее основание.

Функция $\varphi(t)$, аналитическая в выпуклой трубчатой области $G, 0 \in G$, называется хр. ф. в этой области, если

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t),$$

$$\varphi(0) = 1.$$

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi(t)$ — *хр. ф. в выпуклой трубчатой области* $G$ *с основанием* $B$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

*а) функция* $\varphi(i\eta)$ *не обращается в нуль при* $\eta \in B$;

*б)* $\arg \varphi(i\eta) = \text{const}$, $\eta \in B$;

*в) функция* $\ln|\varphi(i\eta)|$ *выпукла по совокупности переменных при* $\eta \in B$.

Доказательство. Положим $v_\eta(\lambda)=\varphi(\eta\lambda)$. Функция $v_\eta(\lambda)$, очевидно, аналитична в полосе $0\leqslant \operatorname{Im}\lambda\leqslant 1$. Так как $v_\eta(0)\neq 0$, то $v_\eta(\lambda)\neq 0$. Из (1) видно, что $v_\eta(\lambda)$—хр. ф. По теореме Дюге имеем $v_\eta(i)\neq 0$. Следовательно,

$$\varphi(i\eta)=v_\eta(i)\neq 0,$$

$$\arg\varphi(i\eta)=\arg v_\eta(i)=\arg v_\eta(0)=\text{const}.$$

Рассмотрим функцию $\Psi(\lambda)=\varphi(\lambda(\eta''-\eta')+i\eta')$, где $\eta',\ \eta''\in R^n$. Функция $\Psi(\lambda)$ аналитична в полосе $0\leqslant \operatorname{Im}\lambda\leqslant 1$. Из (1) следует, что

$$|\Psi(\lambda)|\leqslant\varphi(i\operatorname{Im}\lambda(\eta''-\eta')+i\eta')=|\Psi(i\operatorname{Im}\lambda)|.$$

Поэтому $\Psi(\lambda)$ является хр. ф. Из теоремы Дюге заключаем, что $\ln|\varphi(i\eta)|$ выпуклая функция вдоль любой прямой $L\{\eta\colon\eta=t(\eta''-\eta')+\eta'$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Следствие. *Пусть*

$$M(r;\ \varphi)=M(r_1,\dots,r_n;\ \varphi)=\max_{\substack{|t_i|=r_i\\ i=1,\dots,n}}|\varphi(t)|.$$

*Тогда* $\ln M(r_1,\dots,r_n;\ \varphi)$ *является выпуклой функцией по совокупности переменных* $r_1,\dots,r_n$.

Действительно,

$$\ln M(r_1,\dots,r_n;\ \varphi)=\max_{|t_i|=r_i}\ln|\varphi(t_1,\dots,t_n)|\leqslant\max_{|t_i|=r_i}\ln\varphi(i\operatorname{Im}t)=$$

$$=\max_{|\operatorname{Im}t_i|=r_i}\ln\varphi(i\operatorname{Im}t)=\max\ln\varphi(\pm ir_1,\dots,\pm ir_n)$$

(последний max берется по всевозможным комбинациям знаков + и —). Так как по доказанной теореме каждая из функций $\ln\varphi(\pm ir_1,\dots,\pm ir_n)$ является выпуклой, то заключаем, что $\ln M(r_1,\dots,r_n;\ \varphi)$ — выпуклая функция по совокупности переменных $r_1,\dots,r_n$.

Опираясь на теорему 1, мы можем с помощью рассуждений близких к проведенным нами в [4], доказать следующие теоремы о росте хр. ф.

**Теорема 2.** *Пусть* $\varphi(t)$ *— целая хр. ф.,* $\xi_1,\dots,\xi_k$ *— векторы из* $S^n$, *а вектор* $\xi\in R^n$ *представим в виде их линейной комбинации. Предположим, что* $\varphi(t\xi);\ \varphi(t\xi_1);\ \dots\ \varphi(t\xi_k)$, $t\in C^1$ *имеют порядки* $\rho(\xi),\ \rho(\xi_1),\ \dots,\ \rho(\xi_k)$ *соответственно. Тогда справедливо неравенство*

$$\rho(\xi)\leqslant\max[\rho(\xi_1),\ \dots,\ \rho(\xi_k)].$$

**Теорема 3.** *Функция* $\rho(\xi)$ *на единичной сфере* $S$ *пространства* $R^n$ *может принимать не более n различных значений. Неравенство*

$$\rho(\xi')<\max_{\xi\in S^n}\rho(\xi)$$