УДК 517.512

В. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

О НЕРАВЕНСТВЕ О. САСА

1. Существует удобный способ доказательства неравенств для тригонометрических многочленов, заключающийся в использовании соотношения [2, с. 479]

$$\sup_{\left|\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right| \leqslant 1} \max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \right| = \inf_{N_n(\lambda_k)} \operatorname{var} \sigma(\theta) \quad (= n_\lambda),$$

где

$$N_n(\lambda_k)=\left\{\sigma(\theta):\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\sigma(\theta)=\lambda_k,\ \pm k=0,1,\ldots,n\right\},$$

из которого при

$$\max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right|\leqslant 1$$

вытекает точное неравенство

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k\lambda_k e^{ik\theta}\right|\leqslant n_\lambda. \tag{*}$$

Таким способом могут быть получены многие известные неравенства. Например, знаменитое неравенство С. Н. Бернштейна о производной тригонометрического многочлена является следствием того, что при $\lambda_k=ik$ величина n_λ равна n.

Мы покажем в этой заметке, как можно, если учитывать значение коэффициента c_0, уточнить неравенство (*).

В 1918 году О. Сас [3] доказал следующую теорему.

Если

$$T_n(\theta)=1+\sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k e^{-ik\theta})\geqslant 0,$$

то

$$\omega\leqslant\lambda_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k\lambda_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k\bar{\lambda}_k e^{-ik\theta})\leqslant\Omega,$$

где $\{\lambda_k\}_{k=-n}^{n}$, $(\lambda_{-k}=\bar{\lambda}_k)$ — заданные числа, а ω и Ω — наименьший и наибольший корни уравнения

$$\begin{vmatrix}\lambda_0-\lambda & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n\\ \bar{\lambda}_1 & \lambda_0-\lambda & \ldots & \lambda_{n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \bar{\lambda}_n & \bar{\lambda}_{n-1} & \ldots & \lambda_0-\lambda\end{vmatrix}=0$$

2. Если многочлен

$$T_n(\theta)=c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k e^{-ik\theta})\not\equiv 1$$

удовлетворяет условию $\max\limits_{[0,2\pi]}|T_n(\theta)|\leqslant 1$, то $|c_0|<1$ и

$$1+c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k e^{-ik\theta})\geqslant 0,$$

$$1-c_0-\sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k e^{-ik\theta})\geqslant 0.$$

Из теоремы О. Саса следует, что

$$(1+c_0)\,\omega\leqslant\lambda_0(1+c_0)+\sum_{k=1}^{n}(c_k\lambda_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k\bar{\lambda}_k e^{-ik\theta})\leqslant(1+c_0)\,\Omega,$$

$$(1-c_0)\,\omega\leqslant\lambda_0(1-c_0)-\sum_{k=1}^{n}(c_k\lambda_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k\bar{\lambda}_k e^{-ik\theta})\leqslant(1-c_0)\,\Omega,$$

откуда

$$\max\{(1+c_0)\,\omega-\lambda_0,\ \lambda_0-(1-c_0)\,\Omega\}\leqslant\sum_{k=-n}^{n}c_k\lambda_k e^{ik\theta}\leqslant$$
$$\leqslant\min\{(1+c_0)\,\Omega-\lambda_0,\ \lambda_0-(1-c_0)\,\omega\}.$$

Объединяя это неравенство с неравенством (*), получаем, что

$$\max\{(1+c_0)\,\omega-\lambda_0,\lambda_0-(1-c_0)\,\Omega,\ -n_\lambda\}\leqslant\sum_{k=-n}^{n}c_k\lambda_k e^{ik\theta}\leqslant$$

$$\leqslant\min\{(1+c_0)\,\Omega-\lambda_0,\ \lambda_0-(1-c_0)\,\omega,\ n_\lambda\}.$$

Отметим, что при $\omega=-\Omega$ и $\lambda_0=0$

$$\left|\sum_{k=-n}^{n}c_k\lambda_k e^{ik\theta}\right|\leqslant\min\{n_\lambda,\ (1-|c_0|)\,\Omega\}.$$

3. Из общего неравенства, доказанного в [5], при

$$\lambda_0=0,\ \lambda_{\pm1}=\ldots=\lambda_{\pm n}=\pm i$$

следует, что

$$n_\lambda=\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\operatorname{ctg}\frac{(2\nu+1)\pi}{2(n+1)}.$$

Кроме того, $-\omega=\Omega+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(n+1)}$. Следовательно, если

$$\max_{[0,\,2\pi]}|T_n(\theta)|\leqslant 1,$$

то

$$|\tilde{T}_n(\theta)|\leqslant\min\left\{\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\operatorname{ctg}\frac{(2\nu+1)\pi}{2(n+1)},(1-|c_0|)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(n+1)}\right\}.$$

X. Мульголанд [1] (см. также [4, 6]) доказал, что при

$$\max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\theta} \right| \leqslant 1$$

$$|c_k| \leqslant \left(\left[\frac{n+3k}{2k} \right] \right)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\left[\frac{n+3k}{2k}\right]}, \quad (k \geqslant 1).$$

Здесь $\lambda_{\pm\nu} = 0$ при $|\nu| \leqslant n$ и $|\nu| \neq k$, а $\lambda_{\pm k} = 1$. Кроме того, $-\omega = \Omega = \cos \frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2}$. Следовательно,

$$|c_k| \leqslant \min \left\{ \left(\left[\frac{n+3k}{2k} \right] \right)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\left[\frac{n+3k}{2k}\right]}, (1 - |c_0|) \cos \pi \left(\left[\frac{n}{k} \right] + 2 \right)^{-1} \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mulholland H. P. On two extremum problems for polynomials on the unit circle. — «I. London Math. Soc.», 1956, vol. 31, p. 191—199.
2. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., «Наука», 1973. 551 с.
3. Szasz O. Uber harmonische Functionen und L-Formen. — «Math. Zeitschrift», 1918, Band 1, Heft 4, S. 31—45.
4. Рыжаков И. Ю. Об одной задаче С. Н. Бернштейна. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 2, с. 465—470.
5. Фильштинский В. А. Несколько неравенств для тригонометрических многочленов. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 18. Харьков, 1973, с. 170—175.
6. Фільштинський В. А. Про одну нерівність. — «Доп. АН УРСР», 1974. А, № 7, с. 611—613.

Поступила 11 октября 1973 г.