УДК 513.88

Т. А. ЕФИМОВА, Б. М. МАКАРОВ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВАХ С СЕТЯМИ

Введение

Теорема Банаха о слабых базисах в полных нормированных пространствах [1] неоднократно обобщалась в различных направлениях на пространства типа (F), индуктивные пределы пространства типа (F) и на пространства с сетями [2—11]. В работе [9] установлено, что всякий слабый обобщенный базис в секвенциально полном борнологическом пространстве, допускающем сеть типа C, является базисом Шаудера. Ниже это утверждение обобщается на случай неборнологических пространств, а также показывается, что требование секвенциальной полноты можно заменить более слабым требованием локальной полноты. Благодаря этому полученные в работе теоремы оказываются также обобщением результатов [11].

В последнем разделе работы устанавливается, что при широких предположениях в индуктивном пределе последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространств типа F для разложений по обобщенному базису имеет место «локализация сходимости», точнее, для любого номера k существует такое пространство X_{m_k}, что разложение по обобщенному базису в $\lim \operatorname{ind} X_n$ сходится по топологии пространства X_{m_k} для каждого вектора из X_k. Подобный факт (см. теорему 4) наблюдается и для безусловных обобщенных базисов. Утверждение, аналогичное теореме 4, для индуктивных пределов с устойчивой сходимостью доказано впервые Ньюнсом [2, теорема

2.2]. Интересно отметить, что устойчивость сходимости разложений по базису сохраняется иногда (как можно установить с помощью теоремы 4 и леммы 6) и в тех случаях, когда сходимость в индуктивном пределе не является устойчивой.

Определения и обозначения

Через (X, τ) будем обозначать локально выпуклое пространство (л. в. п.) с топологией τ, которая всегда будет предполагаться хаусдорфовой. Если p — определенная в X полунорма, r — положительное число, то символом $V_p(r)$ обозначается множество $\{x \in X \mid p(x) \leqslant r\}$.

Символами $L(A)$, $\Gamma(A)$ обозначим линейную оболочку и замкнутую абсолютно выпуклую оболочку множества $A \subset X$.

Если B — абсолютно выпуклое, ограниченное в л. в. п. (X, τ) множество, то через X^B обозначается нормированное пространство, возникающее в результате снабжения множества $L(B)$ нормой:

$$p^B(x) = \inf\left\{\lambda \mid \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in B\right\}.$$

Л. в. п. (X, τ) называется локально полным, если для любого ограниченного в (X, τ) множества существует содержащее его абсолютно выпуклое ограниченное множество B такое, что нормированное пространство X^B полно. Всякое секвенциально полное пространство локально полно.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ устойчиво сходится к вектору $x_0 \in X$ в л. в. п. (X, τ), если существует такая стремящаяся к бесконечности числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\lambda_n (x_n - x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} 0$. Подмножество A л. в. п. (X, τ) называется устойчиво плотным в (X, τ), если для любого вектора $x \in X$ существует последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$, устойчиво сходящаяся к x. Л. в. п. (X, τ) называется пространством с устойчивой сходимостью, если в нем всякая сходящаяся последовательность устойчиво сходится. Отметим, что пространствами с устойчивой сходимостью являются пространства, двойственные к пространствам Шварца [12].

Сильнейшую из локально выпуклых топологий в X с тем же запасом ограниченных множеств, что и в л. в. п. (X, τ), будем обозначать через τ_b [[13], гл. XI, 2.7]. Ясно, что $\tau_b \geqslant \tau$, топология τ_b — борнологическая, пространства (X, τ) и (X, τ_b) локально полны или нет одновременно. Легко показать, что если множество A устойчиво плотно в (X, τ), то оно устойчиво плотно и в (X, τ_b).

Символом $l^\infty(X, \tau)$ будем далее обозначать пространство всех последовательностей, ограниченных в (X, τ). Топология в $l^\infty(X, \tau)$ определяется набором полунорм q_p:

$$q_p(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sup_{n \geqslant 0} p(x_n),$$

где p — произвольная полунорма, непрерывная в топологии τ. Пусть $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность секвенциально замкнутых подпространств л. в. п. (X, τ), $L_k \cap L_j = \{0\}$, если $j \neq k$; $P_k : X \to X$ $(k = 1, 2 \dots)$ — линейные (не обязательно непрерывные) проекторы, удовлетворяющие условиям: $P_k(X) = L_k$, $P_k(x) = 0$, если $x \in L_j$, $j \neq k$. Последовательность $\{L_k, P_k\}_{k=1}$ будем называть обобщенной биортогональной системой.

Если для любого вектора $x \in X$ имеет место единственное представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (x_k \in L_k,\ k = 1, 2, \dots),$$

где ряд сходится в топологии τ, то обобщенная биортогональная система $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$, в которой проекторы P_k определяются равенством $P_k x = x_k$, называется обобщенным базисом в л. в. п. (X, τ).

Если проекторы $P_k (k = 1, 2, \dots)$ непрерывны в топологии τ, то обобщенный базис называется обобщенным базисом Шаудера. Наконец, если система $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть обобщенный базис в $(X, \sigma(X, X'))$, то она называется слабым обобщенным базисом в (X, τ) [5, 6, 9]. Обобщенный базис называется безусловным, если ряд (1) безусловно сходится для любого вектора $x \in X$.

Если пространства L_k одномерны, то мы получаем обычные определения базиса, базиса Шаудера, слабого базиса и безусловного базиса в пространстве (X, τ).

Если в л. в. п. (X, τ) зафиксирована обобщенная биортогональная система $\{L_k, P_k\}$, то через $S_n (n = 0, 1, \dots)$ мы всегда будем обозначать следующие операторы: $S_0 = 1$ (тождественный оператор), $S_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Обобщенную биортогональную систему $\{L_k, P_k\}_{k=1}$ в л. в. п. (X, τ) будем называть ограниченной, если последовательность операторов $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ точечно ограничена на X. В этом случае равенством $\pi(x) = \{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно определить линейное отображение $\pi : X \to l^{\infty}(X, \tau)$. Очевидно, что всякий обобщенный (слабый) базис является ограниченной биортогональной системой.

Индуктивный предел (X, τ) последовательности л. в. п. (X_n, τ_n) называется регулярным, если каждое множество, ограниченное в (X, τ), содержится и ограничено в одном из пространств (X_n, τ_n). Очевидно, что регулярный индуктивный предел локально полных пространств снова есть локально полное пространство.

В дальнейшем нам потребуется понятие сети типа (C), подробно исследованное в [7].

Определение. *Сетью** $\Delta = \{D_{n_1 \dots n_k} | k, n_1 \dots n_k \in N\}$ *в* (X, τ)

---

* Буквой N мы всюду в дальнейшем обозначаем множество натуральных чисел.

н зывается такое семейство подмножеств пространства X, что

$$X = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} D_{n_1} \text{ и } D_{n_1 \dots n_{k-1}} = \bigcup_{n_k}^{\infty} D_{n_1 \dots n_k} \text{ при } k > 1 \qquad (1)$$

) ля любого набора натуральных чисел $n_1, \dots, n_{k-1}$.
Сеть $\Delta = \{D_{n_1 \dots n_k} | k, n_1 \dots n_k \in N\}$ в (X, τ) называется сетью типа (C), если для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует такая последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, что для любых векторов $x_k \in D_{n_1 \dots n_k}$ и чисел $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ сходится в (X, τ).

Отметим, что секвенциально замкнутое подпространство пространства, имеющего сеть типа (C), само имеет сеть типа (C). Индуктивный предел последовательности пространств, имеющих сеть типа (C), например, пространств типа (F), также имеет сеть типа (C) [7].

Основные леммы

Лемма 1. *Если пространство (X, τ) имеет сеть типа (C), то пространство (X, τ_b) тоже имеет сеть типа (C).*

Доказательство. Пусть $\{D_{n_1 \dots n_k} | k, n_1 \dots n_k \in N\}$ — сеть типа (C) в л. в. п. (X, τ) и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность натуральных чисел. Тогда существует такая последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, что для любых $x_k \in D_{n_1 \dots n_k}$ и $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ сходится в (X, τ). Положим $\lambda'_k = \lambda_k 2^{-k}$ и покажем, что для любых $x_k \in D_{n_1 \dots n_k}$ и $\mu_k \in [0, \lambda'_k]$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ сходится в (X, τ_b). Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu_k x_k$ сходится в (X, τ) то последовательность $\{2^k \mu_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в (X, τ) и, значит, ограничена в (X, τ_b).

Пусть B — абсолютно выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, содержащее точки $2^k \mu_k x_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. Докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ в X_B, из чего будет следовать его сходимость в (X, τ_b). Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер k_0, такой, что $\sum_{k=r}^{s} 2^{-k} (2k \mu_k x_k) \in \varepsilon B$, если $r, s > k_0$. В силу замкнутости множества B имеем: $\sum_{k=r}^{\infty} \mu_k x_k \in \varepsilon B$. Следовательно, ряд $\sum_{k=r}^{\infty} \mu^k x_k$ сходится в X_b. Лемма доказана.

Доказательства приводимых ниже лемм 2, 3, 4 аналогичны соответствующим рассуждениям, которые приводятся в [7] и [9] в предположениях секвенциальной полноты и борнологичности пространства (X, τ).

Лемма 2. *Если пространство (X, τ) — локально полно и имеет сеть $\{D_{n_1 \ldots n_k} | \, k, n_1 \ldots n_k \in N\}$ типа (C), то пространство $l^\infty(X, \tau)$ тоже имеет сеть типа (C).*

Доказательство. В силу локальной полноты пространства (X, τ) для любой последовательности $\varphi \in l^\infty(X, \tau)$ существует такое ограниченное множество $B\varphi$, содержащее φ, что пространство X_{B_φ} — банахово. Зафиксируем φ. Согласно [7, гл. III, §1], существуют номера n_1 и m_1 такие, что множество $D_{n_1} \cap X_{B_\varphi}$ имеет в пространстве X_{B_φ} внутреннюю точку и $B_\varphi \subset m_1 \Gamma(D_{n_1})$. Если множество $D_{n_1 \ldots n_k} \cap X_{B_\varphi}$ имеет внутреннюю точку, то существуют номера n_{k+1} и m_{k+1} такие, что множество $D_{n_1 \ldots n_{k+1}} \cap X_{B_\varphi}$ имеет в пространстве X_{B_φ} внутреннюю точку и $B_\varphi \subset m_{k+1} \Gamma(D_{n_1 \ldots n_{k+1}})$.

Множество последовательностей φ, которые обладают свойством (*), обозначим через $\widetilde{D}((n_1, m_1), \; (n_2, m_2), \ldots (n_{k+1}, \; m_{k+1}))$. Построим сеть $\{D'_{n'_1 \ldots n'_k} | \, k, n'_1 \ldots n'_k \in N\}$, определив множества $D'_{n'_1 \ldots n'_k}$ следующим образом:

$$D'_{n'_1} = \widetilde{D}((n_1, m_1)) \, , \; D'_{n'_1 \ldots n'_k} = D'_{n'_1 \ldots n'_{k-1}} \cap \widetilde{D}((n_1, m_1) \ldots (n_k, m_k)).$$

Покажем, что эта сеть является сетью типа (C) в $l^\infty(X, \tau)$. Пусть $\varphi_k = \{\varphi_k^{(r)}\}_{k=1}^\infty \in D'_{n'_1 \ldots n'_k}$. Покажем, что существуют числа $\lambda'_k \, (k = 1, 2 \ldots)$ такие, что ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \mu_k \varphi_k$ сходится в $l^\infty(X, \tau)$, т. е. для любой непрерывной в (X, τ) полунормы p: $\sup p\left(\sum\limits_{k=n}^\infty \mu_k \varphi_k^{(r)}\right) \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Пусть последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ соответствует последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ в смысле определения сети типа (C). Допустим, что $\lambda_{k+1} \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \lambda_k \leqslant 1$ и положим $\lambda''_k = \frac{\lambda_k}{m_k}$. Покажем, что при любом $r = 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\mu_k \varphi_k^{(r)}\}_{k=1}^\infty$ ограничена в (X, τ), если $\mu_k \in [0, \lambda''_k]$. Поскольку $\{\varphi_k^{(r)}\}_{r=1}^\infty \in D'_{n'_1 \ldots n'_k}$, то $\psi_k^{(r)} = \frac{1}{m_k} \varphi_k^{(r)} \in \Gamma(D_{n_1 \ldots n_k})$. Пусть p — непрерывная в (X, τ) полунорма. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и каждого вектора $\psi_k^{(r)}$ имеет место представление:

$$\psi_k^{(r)} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(r)} z_j^{(r)} + t_k^{(r)}, \tag{2}$$

где $p\left(t_k^{(r)}\right) \leqslant \varepsilon$, $z_j^{(r)} \in D_{n_1 \ldots n_k}$ и $\sum_{j=1}^{M} \left|\alpha_j^{(r)}\right| \leqslant 1$.

Умножая равенство (2) на , получаем

$$\mu_k \psi^{(r)} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(r)} \mu_k z_j^{(r)} + \mu_k t_k^{(r)},$$

где

$$p\left(\mu_k t_k^{(r)}\right) \leqslant \varepsilon, \ \mu_k \psi_k^{(r)} \in \lambda_k'' \Gamma\left(D_{n_1, \ldots n_k}\right).$$

Так как $\lambda_k''\left(D_{n_1 \ldots n_k}\right) \subset V_p(1)$ для достаточно больших k, то последовательность $\{\mu_k \varphi_k^{(r)}\}_{k=1}^{\infty}$ — ограничена в (X, τ) для любого r.

В силу локальной полноты существует такое ограниченное множество B, что пространство X_B — банахово и $\{\mu_k \varphi_k^{(r)}\}_{k=1}^{\infty} \subset B$.

Поскольку последовательность $\{\mu_k \varphi_k^{(r)}\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в X_B, ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \mu_k \varphi_k^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ сходятся в (X, τ). Положим теперь $\lambda_k' = \frac{\lambda_k''}{m_k}$ и покажем, что для любых $\varphi_k = \{\varphi_k^{(r)}\}_{r=1}^{\infty} \in D'_{n_1' \ldots n_k'}$ и $\mu_k \in [0, \lambda_k']$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k$ сходится в $l^{\infty}(X, \tau)$. Действительно, $\sum_{k=m}^{s} \mu_k \varphi_k^{(r)} \in \lambda_m' \Gamma\left(D_{n_1 \ldots n_m}\right)$ при $r = 1, 2, \ldots$ и, перейдя к пределу по s, получаем

$$\sum_{k=m}^{\infty} \mu_k \varphi_k^{(r)} \in \lambda_m' \Gamma\left(D_{n_1 \ldots n_m}\right). \tag{3}$$

Так как для любой непрерывной в (X, τ) полунормы p и любого числа $\varepsilon > 0$ для достаточно больших чисел m имеет место включение

$$\lambda_m' \Gamma\left(D_{n_1 \ldots n_m}\right) \subset V_p(\varepsilon),$$

то из соотношения (3) следует, что

$$\sup_r p\left(\sum_{k=m}^{\infty} \mu_k \varphi_k^{(r)}\right) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Это доказывает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k$ сходится в $l^{\infty}(X, \tau)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ограниченная обобщенная биортогональная система в л. в. п.* (X, τ) *и пусть она является обобщенным базисом в л. в. п.* (X, τ_0), $\tau_0 \leqslant \tau$. *Тогда множество* $l^{\infty}(X, \tau) = \pi(X)$ *секвенциально замкнуто в* $l^{\infty}(X, \tau)$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ $y_k = \{x_k, S_1(x_k), \dots S_n(x_k)\dots\}$ сходится к $\{h_0, h_1, \dots h_n \dots\}$ в $l^{\infty}(X, \tau)$. Покажем, что $\{h_0, h_1, \dots h_n\} \in l_0^{\infty}(X, \tau)$. Для этого надо доказать, что $h_n = S_n(h_0)$. Достаточно проверить, что $h_1 \in L_1$, $h_n - h_{n-1} \in L_n$ при $n > 1$ и $h_n \xrightarrow{\tau_0} h_0$.

Так как $S_1(x_k) \in L_1$ и $S_1(x_k) \to h_1$, то, поскольку L_1 секвенциально замкнуто, $h_1 \in L_1$. Для $n > 1$ имеем $P_n(x_k) = S_n(x_k) - S_{n-1}(x_k) \in L_n$ и $S_n(x_k) - S_{n-1}(x_k) \to h_n - h_{n-1}$. Так как множество L_n секвенциально замкнуто, то $h_n - h_{n-1} \in L_n$. Убедимся теперь, что $h_n \to h_0$ в топологии τ_0. Зафиксируем произвольную непрерывную в τ_0 полунорму p и произвольное число $\varepsilon > 0$. Ввиду соотношения $\{S_n(x_k)\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow[k \to \infty]{} \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $l^{\infty}(X, \tau)$ при $k \geqslant k_{\varepsilon}$ имеют место неравенства

$$\sup_{h \geqslant 1} p(S_n(x_k) - h_n) < \varepsilon, \ p(x_k - h_0) < \varepsilon.$$

Так как

$$p(h_n - h_0) \leqslant p(S_n(x_k) - h_n) + p(S_n(x_k) - x_k) + p(x_k - h_0),$$

то $p(h_n - h_0) \leqslant 2\varepsilon + p(S_n(x_k) - x_k)$. Отсюда видно, что $p(h_n - h_0) < 3\varepsilon$ при достаточно большом n.

Лемма доказана.

Следствие. *Если пространство* (X, τ) *имеет сеть типа* (C), *то при выполнении условий леммы пространство* $l_0^{\infty}(X, \tau)$ *также имеет сеть типа* (C).

Лемма 4. *Если л. в. п.* (X, τ) *имеет сеть типа* (C), *то при выполнении условий леммы 3 отображение* π *ограничено.*

Доказательство. Будем рассматривать π как отображение пространства (X, τ) на $l_0^{\infty}(X, \tau)$. График отображения π замкнут, так как обратное отображение π^{-1}, очевидно, непрерывно. Пусть множество B_0 ограничено в (X, τ). В силу локальной полноты существует такое ограниченное в (X, τ) множество $B \supset B_0$, что X_B — банахово пространство. График сужения π на X_B замкнут в $X_B \times l_0^{\infty}(X, \tau)$. Так как пространство $l_0^{\infty}(X, \tau)$ допускает, согласно следствию из леммы 3, сеть типа (C), то по теореме о замкнутом графике [7, гл. 2] отображение π: $X_B \to l^{\infty}(X, \tau)$ непрерывно. Следовательно, множество $\pi(B)$ ограничено в $l^{\infty}(X, \tau)$.

Лемма доказана.

Следствие. *При выполнении условий леммы отображение* π *непрерывно в топологии* τ_b.

Приведем без доказательства еще две леммы, в которых даются условия регулярности индуктивного предела и условия, при которых множество устойчиво плотно в индуктивном пределе. Нам понадобится следующее определение. Будем говорить, что индуктивный предел (X, τ) последовательности пространств (X_n, τ_n) удовлетворяет условию α, если для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся в (X, τ), существует номер n_0 такой, что эта последовательность содержится и слабо сходится в пространстве (X_{n_0}, τ_{n_0}). В частности, условие (α) выполнено в индуктивном пределе рефлексивных нормированных пространств [16].

Лемма 5. Индуктивный предел, удовлетворяющий условию (α), регулярен.

Лемма 6. Пусть (X, τ) — регулярный предел последовательности метризуемых пространств (X_n, τ_n) $(n=1, 2, \ldots)$, A — его выпуклое подмножество.

1. *Если в (X, τ) выполнено условие (α) и множество A секвенциально плотно в (X, τ), то A устойчиво плотно в (X, τ).*

2. *Если пространства (X_n, τ_n) рефлексивны и множество A слабо секвенциально плотно в (X, τ), то A устойчиво плотно в (X, τ).*

Теоремы об обобщенных базисах

Теорема 1. *Пусть (X, τ) борнологическое, локально полное пространство, имеющее сеть типа (C), $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ограниченная обобщенная биортогональная система в (X, τ). Если*

1) $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в л. в. п. (X, τ_0), $\tau_0 \leqslant \tau$;

2) множество $L\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k\right)$ всюду плотно в пространстве (X, τ), то $\{L_k P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обобщенный базис Шаудера в пространстве (X, τ).

Доказательство. Согласно следствию к лемме 4, отображение π непрерывно. Значит, для любой непрерывной в (X, τ) полунормы p существуют непрерывная в (X, τ) полунорма q и постоянная $c>0$, такие, что

$$\sup_{n\geqslant 0} p\,\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \leqslant cq(x). \tag{4}$$

Операторы S_n в силу (4) равностепенно непрерывны. Так как $S_n x \xrightarrow{\tau} x$ для любого $x \in L\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k\right)$, то $S_n x \xrightarrow{\tau} x$ для любого $x \in X$. Единственность разложения очевидна. Таким образом, $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обобщенный базис Шаудера в (X, τ).

Теорема 2. *Пусть (X, τ) — борнологическое, локально полное пространство, имеющее сеть типа (C); $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обобщенный слабый базис в (X, τ). Тогда $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обобщенный базис Шаудера в (X, τ).*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1, если в качестве τ_0 рассмотреть слабую топологию $\sigma(X, X')$, поскольку в этом случае обобщенная биортогональная система $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и множество $L\left(\sum_{k=1}^{\infty} L_k\right)$ плотно в (X, τ).

Обобщением теоремы 1 является

Теорема 3. *Пусть (X, τ) — локально полное пространство имеющее сеть типа (C); $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ограниченная обобщенная биортогональная система в (X, τ). Если выполнены условия 1 и 2 теоремы 1, то $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обобщенный базис (X, τ) и операторы P_k — ограничены.*

Доказательство легко получить, используя лемму 1 и применяя теорему 1 к пространству (X, τ_b).

Замечание 1. Если $\tau_0 \geqslant \sigma(X, X')$, то ограниченность системы $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует из условия 1 теоремы 1.

Замечание 2. Условие *2* выполняется в следующих двух случаях:

а) если τ_b совпадает с топологией Макки пространства (X, τ) и $L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k\right)$ всюду плотно в (X, τ);

б) если множество $L = L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k\right)$ устойчиво плотно в пространстве (X, τ).

Теорема о локализации сходимости в индуктивном пределе пространств типа (F).

Пусть $\{L_k, P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обобщенная биортогональная система в пространстве (X, τ). Обозначим буквой Ω множество всевозможных конечных подмножеств ω натурального ряда, через S_ω обозначим сумму $\sum_{i \in \omega} P_i$. Множество Ω будем считать естественным образом частично упорядоченным (соотношение $\omega \leqslant \omega'$ означает, что $\omega \subset \omega'$ $(\omega, \omega' \in \Omega)$. Известно, что безусловная сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)$ равносильна существованию предела $\lim_{\omega \in \Omega} S_\omega(x)$ [15, с. 103]; для безусловной сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)$ необходима ограниченность семейства $\{S_\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$.

Теорема 4. *Пусть (X, τ) — регулярный индуктивный предел пространств (X_n, τ_n) типа F; $\{L_i, P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — обобщенный (безусловный) базис Шаудера в (X, τ), множество $L = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} L\right)$ устойчиво плотно в (X, τ). Тогда для каждого номера k суще-*

ствует такой номер l, что при любом $x \in X_k$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)$ (безусловно) сходится к x в пространстве (X_l, τ_l).

Доказательство. Случаи небезусловного и безусловного базисов совершенно аналогичны, поэтому мы ограничимся доказательством теоремы при предположении, что базис — безусловный. Докажем сначала, что для любого номера k существует номер q такой, что семейство $\{S_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega}$ ограничено в пространстве (X_q, τ_q) для любого вектора $x \in X_k$. Так как все пространства (X_k, τ_k) равноправны, то достаточно это доказать для $k=1$.

Ввиду регулярности индуктивного предела для любого вектора $x \in X_1$ существует номер $q = q(x)$ такой, что семейство $\{S_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega}$ ограничено в (X_q, τ_q). Покажем, что номер q можно выбрать общим для всех векторов $x \in X_1$. Будем рассуждать от противного. Пусть для любого номера r существует такой вектор $x_r \in X_1$, что семейство $\{S_\omega(x_r)\}_{\omega\in\Omega}$ не ограничено в (X_r, τ_r). Не умаляя общности, можно считать, что ряд $\sum_{r=1}^{\infty} x_r$ сходится в пространстве (X_1, τ_1) (а, следовательно, и в (X, τ)), так как в противном случае вместо векторов x_r можно рассмотреть векторы $\lambda_r x_r$, где положительные числа λ_r достаточно малы. Рассмотрим последовательность $\{y_r\}_{r=1}^{\infty}$, где $y_r = \sum_{j=r}^{\infty} x_j \, (r = 1, 2 \ldots)$. Так как последовательность $\{y_r\}_{r=1}^{\infty}$ ограничена, а семейство операторов $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ равностепенно непрерывно, то семейство векторов $\{S_\omega(y_r)\}_{\omega\in\Omega, r\geqslant 1}$ ограничено в пространстве (X, τ). Ввиду регулярности индуктивного предела, существует такой номер t, что семейство $\{S_\omega(y_r)\}_{\omega\in\Omega, r\geqslant 1}$ ограничено в пространстве (X_t, τ_t). В частности, в этом пространстве ограничены и семейства $\{S_\omega(y_t)\}_{\omega\in\Omega}$, $\{S_\omega(y_{t+1})\}_{\omega\in\Omega}$. Следовательно, разность этих семейств также ограничена в (X_t, τ_t), что противоречит выбору вектора x_t.

Для завершения доказательства нужно проверить, что разложение по обобщенному базису безусловно сходится в некотором пространстве (X_m, τ_m) для любого вектора из X_1. Рассмотрим пространство (Y_n, τ_n) — замыкание в (X_n, τ_n) множества $L \cap X_n (n = 1, 2 \ldots)$. Ясно, что (Y_n, τ_n) — пространство типа (F). Пользуясь устойчивой плотностью множества L в пространстве (X, τ), легко проверить, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Следовательно, существует такой номер m, что $X_1 \subset Y_m$ [14, теорема 6. 5. 1].

Как уже доказано, существует такой номер l, что семейство $\{S_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega}$ ограничено в (X_l, τ_l) для любого вектора $x \in X_m$. Рассмотрим операторы $S_\omega \, (\omega \in \Omega)$ как отображения из Y_m в X_l. Данное семейство операторов точечно ограничено и поэтому равностепенно непрерывно. Так как на плотном в (Y_m, τ_m) множестве $L \cap X_m$ имеет место соотношение $S_\omega(x) \xrightarrow{\tau_l} x$, то $S_\omega(x) \xrightarrow{\tau_l} x$ для любого вектора $x \in Y_m$. В частности, $S_\omega(x) \xrightarrow{\tau_l} x$ для любого вектора $x \in X_1$, что равносильно безусловной сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)$ в пространстве (X_l, τ_l).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банах С. Курс функционального анализа. Киев, «Радянська школа», 1948. 216 с.
2. Newns W. F. On the representation of analytical functions by infinte series. — «Phil. Trans. Roy. Soc. London», 1953, vol. 245, p. 429—468.
3. Bessaga C. i Pelczynski A. Wlasnosci baz w przestrzeniach tyru Bo. — «Prace Matem.», 1959, vol. 3, p. 123—142.
4. Arcove M. Cs., Edwards R. E. Generalised bases in topological linear spaces. — «Studia Math.», 1960, vol. 19, p. 95—113.
5. Ruckle W. H. The infinite sum of closed subspaces of an F-space. — «Duke Math. I.», 1964, vol. 31, p. 543—554.
6. Mc. Arthur C. W. The weak basis theorem.— «Colloqium Math.», 1967, vol. 17, N 1, p. 71—76.
7. De Wilde M. Reseaux dans les espaces leniaires a semi-normes. — «Mem. Roy. Math. Loc. sci Liege.», 1969, vol. 18, N 2, p. 18—24.
8. De Wilde M. On the equivalence of weak and Schauder basis. — «Sdudia Math.», 1970, vol. 38, N 1—5. 457 p.
9. De Wilde M. On weak and Schauder decompositions. — «Studia Math.», 1972, vol. 41, N 2, p. 145—148.
10. Floret K. Bases in sequentially retractive limit spaces. — «Studia Math.», 1970, vol. 38, N 1—5, p. 221—225.
11. Ефимова Т. А., Макаров Б. М. О слабых базисах в индуктивных пределах пространств типа (F). — «Вестник ЛГУ», 1972, № 13, с. 142—144.
12. Гротендик А. О пространствах (F) и (DF). — «Математика», 1958, т. 2, № 3, с. 115—124.
13. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959. 684 с.
14. Эдвардс Р. Е. Функциональный анализ (теория и приложения). М., «Мир», 1969. 1071 с.
15. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., Изд-во иностр. лит. 1961. 232 с.
16. Макаров Б. М. Об индуктивных пределах нормированных пространств. «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 6, с. 1092—1094.

Поступила 22 декабря 1973 г.