УДК 517.519

Д. Б. ДИМИТРОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В заметке приведены две теоремы о продолжении векторных мер: первая — о продолжении векторной меры $m:K(T) \to X$ на более широкий класс функций $L(m)$, чем $K(T)$, и вторая — о продолжении конечно аддитивной слабо μ-абсолютно непрерывной векторной функции множества λ с кольца R на кольцо S до счетно аддитивной функции множества, где кольцо R плотно в кольце S относительно расстояния $\rho(A; B) = \mu(A \triangle B)$. Показано, что максимальным классом локально выпуклых топологических пространств (ЛВП), в котором имеют место эти утверждения, является класс ЛВП, не содержащих подпространства, изоморфного c_0. В дальнейшем этот класс обозначается через (P).

Примем следующие обозначения: X — секвенциально полное ЛВП; $m: K(T) \to X$ — векторная мера [6, с. 810] (непрерывное линейное отображение пространства $K(T)$ в X). Числовая функция $\varphi(t)$ интегрируема относительно m, если она интегрируема по Лебегу по всем мерам $(m^* \circ x^*)$, $x^* \in X^*$. Класс всех интегрируемых функций относительно m обозначается через $L(m)$. Интегралом от $\varphi(t)$ по m называется элемент из алгебраического сопряженного $(X^*)^{\#}$ к пространству X^*, определяемый соотношением

$$< x^*; z > = < x^*; \int_T \varphi(t)\, dm > = \int_T \varphi(t)\, d(m^* \circ x^*)^+ -$$

$$- \int_T \varphi(t)\, d(m^* \circ x^*)^-,$$

где $(m^* \circ x^*)^+$, $(m^* \circ x^*)^-$ соответственно положительная и отрицательная вариации меры $(m^* \circ x^*)$.

Бурбаки [1, с. 34] и Эдвардс [6, с. 813] указали некоторые достаточные условия на множество значений меры, при выполнении которых интеграл принадлежит самому пространству. Эдвардс [6, с. 818] подробно рассмотрел случай меры со значениями в слабо сопряженном X^* к некоторому ЛВП X и показал, что если X бочечно, то $\int \varphi(t) d\mu \in X^*$ для любой $\varphi \in L(m)$. Мы рассмотрим случай меры со значениям в X. В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 1. [4]. *Пусть ЛВП $X \in (P)$. Тогда в нем слабая абсолютная сходимость ряда эквивалентна его безусловной сходимости.*

В дальнейшем предполагаем, что $T = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, $K_m \subset K_{m+1}$, где K_m — компакт.

Теорема 1. *Пусть полное ЛВП $X \in P$. Если $\varphi \in L(m)$, то $\int_T \varphi(t)\, d(m)$ можно аппроксимировать суммами вида $\sum c_i m^{**}(A)$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, c_i — числа, $m^{**}(A_i) \in X$ в исходной топологии пространства X. В частности, m продолжается на $L(m)$ и $\int_T \varphi dm \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим сужение отображения $m: K(T) \to X$ на пространстве $K(T, K)$. Покажем, что оно слабо непрерывно. Для этого, согласно [6, с. 896], достаточно показать, что m переводит ограниченные возрастающие последовательности $K(T, K)$ в последовательности, слабо сходящиеся в X.
Пусть

$$g_n(t) \in K(T, K), \quad 0 \leqslant g_n(t) \leqslant g_{n+1}(t) < \ldots < N.$$

Рассмотрим ряд

$$m(g_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[m(g_{n+1})-m(g_n)]. \qquad (1)$$

Покажем, что он сходится слабо абсолютно:

$$|<m(g_1);\ x^*>|+\sum_{n=1}^{\infty}|<[m(g_{n+1})-m(g_n)];\ x^*>|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1<g_1;\ m^*\circ x^*>+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<g_{n+1}-g_n;\ m^*\circ x^*>\leqslant$$

$$\leqslant\|m^*\circ x^*\|\,\|\varepsilon_1 g_1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(g_{n+1}-g_n)\|\leqslant M\|g_1+\sum_{n=1}^{\infty}[g_{n+1}-g_n]\|\leqslant$$
$$\leqslant ML,\ \varepsilon_i=\pm 1.$$

Как следует из предложения 1, ряд (1) сходится в X, т. е. существует предел

$$\lim m(g_n)=x\in X$$

в исходной топологии пространства X. Слабая компактность оператора $m:K(T,\ K)\to X$ доказана. Но тогда $m^{**}:K(T,\ K)^{**}\to X$. Определим векторную меру $m^{**}(A)=m^{**}(\chi_A)$.

Введем обозначения:

$$A_{ni}=\left\{t\in T:\frac{i-1}{2^n}<\varphi(t)\leqslant\frac{i}{2^n}\right\},$$

$$\psi_{nm}(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\chi_{A_{ni}\cap K_m}(t).$$

Покажем, что ряд

$$x_{nm}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}m^{**}(A_{ni}\cap K_m)$$

сходится безусловно в X. Согласно предложению 1, достаточно показать, что он сходится слабо абсолютно:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|<\frac{i}{2^n}\ m^{**}(A_{ni}\cap K_m);\ x^*>\right|\leqslant\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|\frac{i}{2^n}\right||(m^*\circ x^*)|(A_{ni}\cap K_m)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{K_m}|\varphi(t)-\psi_{nm}(t)|\,d((m^*\circ x^*)^++(m^*\circ x^*)^-)+\int_{K_m}|\varphi(t)|\,d((m^*\circ x^*)^++$$

$$+(m^* \circ x^*)^-) < \infty.$$

Аналогично можно показать, что сходятся ряды

$$x_{1m} + \sum_{n=2}^{\infty} (x_{nm} - x_{n-1,\,m}) = \int\limits_{K_m} \varphi(t)\, dm \in X,$$

$$\int\limits_{K_1} \varphi(t)\, dm + \sum_{m=2}^{\infty} \int\limits_{K_m \setminus K_{m-1}} \varphi(t)\, dm = \int\limits_{T} \varphi(t)\, dm \in X.$$

Следовательно,

$$\lim_m \lim_n \lim_N p_2 \left[\int \varphi(t)\, dm - \sum_{i=-N}^{N} \frac{i}{2^n} m^{**}(A_{in} \cap K_m) \right] = 0.$$

Теорема доказана.

Каждая абстрактная функция $\sigma : (-\infty, \infty) \to X$ слабо ограниченной вариации определяет линейное непрерывное отображение $m{:}K(-\infty), \infty$ в X. Это, например, следует из доказательства теоремы 5 [4]. Каждая такая функция $\sigma(t)$ определяет векторную меру по формуле

$$\sigma(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\sigma, \quad f \in K(-\infty; \infty),$$

где интеграл берется по Риману-Стилтьесу.

Тогда $L(\sigma)$ — это класс интегрируемых функций по Лебегу-Стилтьесу.

Следствие 1. *Пусть полное ЛВП* $X \in (P)$ *и* $\varphi \in L(\sigma)$. *Тогда* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d\sigma \in X$.

Пример 2 из [3] показывает, что в теореме и в следствии выделен максимально широкий класс пространств, в котором имеют место эти утверждения.

Замечание 1. Используя доказательство теоремы 1, можно показать, что любой линейный непрерывный оператор из $C_{[0,1]}$ в ЛВП $X \in P$ имеет вид

$$\int\limits_0^1 f(t)\, d\sigma,$$

где $\sigma[0;\,1] \to X$ имеет слабо ограниченную вариацию. Этот результат для слабо секвенциально полных банаховых пространств получен Гельфандом [2].

Рассмотрим кольцо множеств S и плотное в нем кольцо R относительно расстояния $\rho(A; B)=\mu(A\triangle B)$, где μ — неотрицательная счетно аддитивная мера, заданная на кольце S.

Теорема 2. *Для того чтобы любая конечно аддитивная, слабо μ-абсолютно непрерывная функция множеств $\lambda: R \to X$ могла быть продолжена до счетно аддитивной μ-абсолютно непрерывной функции на S, необходимо и достаточно, чтобы ЛВП $X\in (P)$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из примера, приведенного в работе [5, теорема 7]. Докажем достаточность. Рассмотрим расширение $\bar{\mu}$ меры μ на минимальное σ-кольцо Σ, содержащее кольцо S. Тогда кольцо R плотно в σ-кольце Σ относительно расстояния $\bar{\rho}(A; B)=\bar{\mu}(A\triangle B)$ Каждая из функций $<\lambda; x^*>$, $x^* \in X^*$ равномерно непрерывна на (R, ρ) и по непрерывности ее можно продолжить на $(\Sigma, \bar{\rho})$. Покажем, что значения $\lambda(E)$, $E \in \Sigma$ принадлежат пространству X.

Если функция множества λ определена на множествах A, то ее можно доопределить на множествах вида $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Пусть $$B_1 = A_1,\ B_{n+1} = A_{n+1}\diagdown \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

Множества $\{B_n\}_1^{\infty}$ попарно не пересекаются. Определим

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n). \tag{2}$$

Покажем, что ряд (2) сходится безусловно. Для этого, согласно предложению 1, достаточно показать, что ряд (2) сходится слабо абсолютно, т. е. для любого $x^* \in X^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |< x^*;\ \lambda(B_n) >| < \infty. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon>0$. Такая функция λ слабо $\bar{\mu}$-абсолютно непрерывна, выберем $\delta(x^*)>0$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{m} |<x^*;\ \lambda(I_n)>| < \varepsilon.$$

Для всех попарно непересекающихся множеств $\{I_n\}_1^m$, для которых функция λ определена и

$$\sum_{n=1}^{m} \bar{\mu}(I_n) < \delta(x^*),$$

функция μ счетно аддитивна, и поэтому

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(B_n). \tag{4}$$

Из сходимости ряда (4) выберем N так, чтобы

$$\sum_{n\geqslant N} \overline{\mu}(B_n) < \delta(x^*). \tag{5}$$

Тогда при любых $m, n \geqslant N$

$$\sum_{i=n}^{m} |<x^*;\ \lambda(B_i)>| < \varepsilon,$$

и, значит, ряд (3) сходится.

Пусть $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда

$$B \subset A_1, \quad C = A_1 \diagdown B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \diagdown A_n).$$

Так как функция λ определена на множестве C, определим λ на множестве B равенством

$$\lambda(B) = \lambda(A_1) - \lambda(G).$$

Таким образом, функцию λ можно доопределить на множестве вида

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{u=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Пусть $A \in \Sigma$ и $\overline{\rho}(A_n;\ A) \to 0$ при $n \to \infty$, $A_n \in R$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\rho}(A_n;\ A) < \infty. \tag{6}$$

Покажем, что последовательность B_m

$$m = \bigcup_{n=1}^{m} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

сходится к множеству A относительно расстояния $\overline{\rho}$:

$$B_m \diagdown A = \bigcup_{n=1}^{m} \bigcap_{i=n}^{\infty} (A_i \diagdown A),$$

$$\lim_{\to\infty} \mu(B_m/A) = \lim_n \bar{\mu}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} (A \setminus A)\right) \leqslant \lim_n \bar{\mu}(A_n \setminus A) \leqslant \lim_n \bar{\rho}(A_n;\, A) = 0,$$

$$A \setminus B_m = \bigcap_{n=1}^{m} \bigcup_{i=n}^{\infty} (A \setminus A_i),$$

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\mu}(A \setminus A_m) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} (A \setminus A_i)\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \bar{\mu}(A \setminus A_i) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \times$$
$$\times \bar{\rho}(A, A_i) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_m \bar{\rho}(B_m;\, A) = \lim_m \bar{\mu}(B_m \,\Delta\, A) = 0.$$

Функция λ определена на множествах B_m и

$$\lambda(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(B_m \setminus B_{m-1}),\; B_0 = \varnothing.$$

Доказательство счетной аддитивности функции λ аналогично доказательству безусловной сходимости ряда (2).

Так как функция $< x^*;\, \lambda(A) > = 0,\; x^* \in X^*$ $\bar{\mu}$-абсолютно непрерывна, то $< x^*,\, \lambda(A) > = 0$, если $\mu(A) = 0$.
Тогда $\lambda(A) = 0$, если $\bar{\mu}(A) = 0$, (7)

Пусть $\varepsilon > 0$ и $p_\alpha(\cdot)$ — произвольная непрерывная полунорма в X. Рассмотрим λ в банаховом пространстве X/X_α, где $\{X_\alpha = x \in X : p_\alpha(x) = 0\}$. Из равенства (7), леммы 4 и 5 (3, с. 348) легко следует, что функция λ $\bar{\mu}$-абсолютно непрерывна, т. е. существует $\delta > 0$, что $p_\alpha(\lambda(E)) < \varepsilon$, если $\bar{\mu}(E) < \delta$.
Теорема доказана.

Следствие 2. *Для того чтобы любая абсолютная непрерывная функция $f\colon[a;\, b] \to X$ порождала абсолютно непрерывную (относительно меры Лебега) счетно аддитивную функцию множества*

$$\lambda((s;\, t)) = f(t) - f(s),\; s < t;\; s, t \in (a;\, b),$$

определенную на измеримых по Лебегу множествах интервала $[a;\, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $X \in (P)$.

Доказательство достаточности следует из теоремы 2, а необходимость — из теоремы 7 работы [5].

Теорема 2 и следствие 2 для слабо секвенциально полных банаховых пространств получены в [5]. Заметим, что если X слабо секвенциально полно, то оно принадлежит классу $(\tilde{P})$.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представление. М., «Наука», 1970. 302 с.
2. Гельфанд И. М. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren., 1938, 4(46), p. 235—286. 1938, 4(46), p. 235—386.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая часть. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 115 с.
4. Димитров Д. Б. Об абстрактных функциях со значениями в ЛВП, не содержащем подпространства, изоморфного $\mathbf{c}_0$. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16, Харьков, 1972, с. 159—165.
5. Knight W. I. Absolute continuity of some vector functions and measures. — «Can. I. Math.», 1972, vol. XXIV, p. 737—746.
6. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., «Мир», 1969. 339 с.

Поступила 4 октября 1973 г.