УДК 517.54

В. С. ДЕРКАЧ

О ВЕЛИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЙ И ДЕФЕКТАХ *QПМ*-ФУНКЦИЙ МАЛОГО И НИЖНЕГО ПОРЯДКА

1. Введение

Пусть $F(z)$ — Q-псевдомероморфная при $z \neq \infty$ функция (см. [1—3]), т. е. $F(z)$ допускает такое представление:

$$F(z) = \Phi(\varkappa(z)), \qquad (1.1)$$

где $\varkappa(z)$ — Q-квазиконформное отображение z-плоскости на w-плоскость ($\varkappa(0)=0, \varkappa(1)=1, \varkappa\infty) = \infty$); $\Phi(\varkappa)$ мероморфная при $\varkappa \neq \infty$ функция.

В работах [1, 2, 4] построена теория роста $QПМ$-функций, которая при $Q=1$ совпадает с теорией роста мероморфных функций.

Исследование роста $QПМ$-функций кроме самостоятельного значения дает также возможность проверить устойчивость свойств величин дефектов Р. Неванлинны и величин отклонений мероморфных функций при переходе к более общим понятиям.

Данная работа посвящена исследованию асимптотических свойств $QПМ$-функций малого нижнего порядка. Прежде чем сформулировать результаты, напомним необходимые нам далее обозначения.

В качестве характеристики роста $QПМ$-функций мы используем характеристику, введенную в [1]:

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, F)\, d\theta^*,$$

где

$$N(r, e^{i\theta}, F) = \int_1^r \frac{n(s, e^{i\theta}, F)}{s}\, ds,$$

а $n(r, a, F)$ — число a-точек функции $F(z)$ в круге $|z| \leqslant r$.

Кроме того, для произвольного комплексного числа a используем стандартные обозначения $L(r, a, F)$, $m(r, a, F)$, которые характеризуют скорость приближения $QПМ$-функций к числу a соответственно в метриках $C[0, 2\pi]$ и $L[0, 2\pi]$ (см [1, 3, 5, 6, 10, 12]).

Как известно [1], величиной отклонения $QПМ$-функции в точке a называется

$$\beta(a, F) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, a, F)}{T(r, F)}. \tag{1.2}$$

Множество $\Omega(F) = \{a : \beta(a, F) > 0\}$ называется множеством ее положительных отклонений. В силу (1.1) и (1.2) величины $\beta(a, F)$ характеризуют рост мероморфных функций по системе кривых $\gamma\}$, являющейся образом системы окружностей $a_r = \{z : |z| = r\}$ при Q-квазиконформных отображениях.

Дефектом $QПМ$-функции $F(z)$ в точке a называется величина (см. [1])

$$\delta(a, F) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a, F)}{T(r, F)},$$

а множество $E(F) = \{a: \delta(a, F) > 0\}$ — множеством ее дефектных значений ($E(F) \subseteq \Omega(F)$). При $Q = 1$ определенные величины дефектов и отклонений совпадают с соответствующими величинами для мероморфных функций.

---

* При $Q=1$ мы получаем случай мероморфных функций, при этом характеристика $T(r, F)$ с точностью до ограниченного слагаемого совпадает с ее неванлинновской характеристикой [5].

В работах [1] и [10] В. П. Петренко получил результаты, касающиеся роста *QПМ*-функций. Приведем некоторые из них.

Теорема А (см. [1, с. 824]). *Пусть $F(z)$ — QПМ при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ. Тогда*

а) множество $\Omega(F)$ не более чем счетно;

б) имеют место оценки

$$\sum_{(a)} \beta^Q(a, F) \leqslant C_1(Q, \lambda), \tag{1.3}$$

$$\sum_{(a)} \delta^{\frac{Q}{Q+1}}(a, F) \leqslant C_1(Q, \lambda), \tag{1.4}$$

где
$$C_1(Q, \lambda) = K \cdot 16^{4Q^2\lambda} \cdot Q.$$

Теорема Б (см. [10]). *Для произвольной QПМ при $z \neq \infty$ функции множество $\Omega(F)$ имеет емкость ноль.*

В данной работе мы показываем, что как и в мероморфном случае при $\lambda \to 0$ правые части в (1.3) и (1.4) стремятся к нулю при дополнительном предположении, что множество $\Omega(F)$ содержит более одной точки [6—9].

Наш основной результат

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — QПМ при $z \neq \infty$ функция нижнего порядка $\lambda < 1$ и ее множество $\Omega(F)$ содержит более чем одну точку. Тогда справедливы оценки*

$$\sum_{(a)} \beta^Q(a, F) \leqslant C_2(Q) \lambda^Q, \tag{1.5}$$

$$\sum_{a} \delta^{\frac{Q}{Q+1}}(a, F) \leqslant C_2(Q) \lambda^{\frac{Q}{Q+1}}, \tag{1.6}$$

где

$$C_2(Q) = K \cdot \pi^{\frac{1}{Q}} \cdot 6^{\frac{Q+1}{Q}} \left(\frac{e-1}{e}\right)^Q \cdot Q \cdot (24)^Q.$$

$$(Q + 2 \cdot 8^Q e^{(2Q^2+Q)\pi})$$

Точность нашей оценки характеризует в некоторой степени функция

$$H(z) = h(\varkappa(z)),$$

где

$$h(\varkappa) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\varkappa}{\nu^{\frac{1}{\rho}}}}{1 + \frac{\varkappa}{\nu^{\frac{1}{\rho}}}}, \ 0 < \rho < 1,$$

$$\varkappa(z) = Qx + iy \ (z = x + iy).$$

Легко показать, что для любого $Q \geqslant 1$ $(0 < \lambda < 1)$

$$\sum_{(a)} \beta^{Q}(a, H) = Q^{Q\lambda} \lambda^{2Q}$$

и

$$\sum_{(a)} \delta^{\frac{Q}{Q+1}}(a, H) = Q\lambda^{\frac{2Q}{Q+1}}.$$

2. Вспомогательные соотношения

Пусть $\varkappa(z)$ — Q-квазиконформное отображение всей z-плоскости на всю w-плоскость, причем

$$\varkappa(0) = 0, \ \varkappa(1) = 1, \ \varkappa(\infty) = \infty \tag{2.1}$$

и $z = \varkappa^{-1}(w)$ — обратное отображение. Положим $(r > 0, \ \rho > 0)$

$$\overline{\rho}(r) = \max_{|z|=r} |\varkappa(z)|, \ \underline{\rho}(r) = \min_{|z|=r} |\varkappa(z)|,$$

$$\overline{R}(\rho) = \max_{|w|=\rho} |\varkappa^{-1}(w)|, \ \underline{R}(\rho) = \min_{|w|=\rho} |\varkappa^{-1}(w)|,$$

$$\omega(Q) = \sup_{\{\varkappa\}} \left\{ \sup_{0<r<\infty} \frac{\overline{\rho}(r)}{\underline{\rho}(r)} \right\},$$

где $\{\varkappa\}$ — семейство Q-квазиконформных отображений, удовлетворяющих нормировке (2.1) *. Имеют место такие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$, $z_1 = re^{i\varphi_1}$,

$$z_2 = re^{i\varphi_2}, \ w_1 = \varkappa(re^{i\varphi_1}), \ w_2 = \varkappa(re^{i\varphi_2}), \ b = \varkappa(a),$$

где a — любое комплексное число. Тогда справедлива оценка

$$\ln + \left| \frac{w_2 - b}{w_1 - b} \right| \leqslant C_3(Q) \left\{ \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - a|} \right)^{\frac{1}{Q}} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - a|} \right\}, \tag{2.2}$$

где $C_3(Q) = Q + 2 \cdot 8^Q \omega^{2Q}(Q) \cdot e^{\pi Q}$.

Эта лемма доказана в [1]. При доказательстве следующих утверждений мы используем методы работ [1] и [10].

Лемма 2.2. *Пусть $\zeta = T(z)$ — Q-квазиконформное отображение круга $\{z : |z| < r\}$ на круг $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Для любого фиксированного τ $(\frac{1}{e} < \tau < 1)$ и d, $|d| < \tau r$*

$$\ln \frac{\tau r}{|d|} \leqslant 1 + C_4(Q) \ln \frac{t}{|T(d)|},$$

---

* Известно, что $\omega(Q) \leqslant e^{\pi Q}$ (см. [11]).

где
$$1-8^{-Q}(1-\tau)^{Q} \leqslant t < 1, \ C_4(Q) = 3Q(24)^{Q}.$$
Эта лемма является простым следствием из теоремы об искажении функций Грина, установленной в [10].

Лемма 2.3. *Пусть $F(z)$ — QПМ при $z \neq \infty$ функция. Положим*
$$F_1(z) = \Phi'(\varkappa(z)).$$
Тогда
$$N\left(\frac{r}{e}, a, F\right) \leqslant C_5(Q)\, T(er, F), \tag{2.3}$$
$$N\left(\frac{r}{e}, a, F_1\right) \leqslant 2C_5(Q)\, T(er, F) \tag{2.4}$$
и $a=0, \infty$.

Для доказательства оценок (2.3) и (2.4) применяется метод, изложенный в работе [1].

Следствие. *Для произвольной QПМ-функции $F(z)$ конечного нижнего порядка λ и любого $\gamma(0<\gamma<1)$ справедлива оценка*
$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{N(t)}{t^{\gamma+1}}\, dt \leqslant 2e^{2\gamma} C_5(Q) \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}} dr + C_6(Q) \frac{T(0{,}5\, e^2 R, F)}{(0{,}5R)^{\gamma}}, \tag{2.5}$$
где
$$N(t) = N(t, 0, F_1) + N(t, \infty, F_1).$$
Действительно,
$$\int\limits_{r_0}^{0.5R} \frac{N(t)}{t^{\gamma+1}}\, dt \leqslant 2e^{2\gamma} C_5(Q) \int\limits_{e^2 r_0}^{e^2 0,5R} \frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\, dr \leqslant 2e^{2\gamma} C_5(Q) \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}} dr +$$
$$+ C_6(Q) \frac{T(e^2 0{,}5\, R, F)}{(0{,}5R)^{\gamma}}.$$
Обозначим Γ_k семейство окружностей
$$a_r = \{z : |z| = r, \ 2^{k-1} \leqslant r \leqslant 2^{k}\},$$
для которых
$$|\gamma_r| \geqslant 2^{2Qk},$$
где $|\gamma_r| = \partial л,\ \gamma_r,\ \gamma_r = \varkappa(a_r)$, при этом будем считать, что $k \geqslant k_0 = [\ln r_0] - 1$ и $k \leqslant N = \left[\frac{\ln R}{\ln 2}\right] + 1$. Положим $E_{\Gamma_k}(r) = \{r : a_r \in \Gamma_k\}$ и предположим, что $\operatorname{mes} E_{\Gamma_k} > 0$.

Имеет место следующее утверждение [1, с. 828].

Лемма 2.4. *Справедлива оценка*
$$\operatorname{mes} E_{\Gamma_k}(r) \leqslant \frac{4\pi^2 \omega^4(Q)}{2^{2Qk}} = \frac{C_7(Q)}{2^{2Qk}}. \tag{2.6}$$

Пусть

$$E=\bigcup_{k=k_0+1}^{N} E_{\Gamma_k}.$$

Лемма 2.5. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_{E}\frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr\leqslant\frac{C_7(Q)}{r_0^{2Q}}\int\limits_{r_0}^{0,5R}\frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr+\frac{C_7(Q)\,T(4R,F)}{(0,5R)^{\gamma}r_0^{2Q}},\ (0<\gamma<1).\tag{.7}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{E_{\Gamma_k}}\frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr\leqslant T(2^k,F)\int\limits_{E_{\Gamma}}\frac{dr}{r^{\gamma+1}}\leqslant T(2^k,F)\frac{C_7(Q)}{2^{2Qk}}\times$$

$$\times\frac{1}{2^{(k-1)(\gamma+1)}}\leqslant C_7(Q)\,T(2^k,F)\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{dr}{r^{2Q+\gamma+1}}\leqslant C_7(Q)\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{T(r,F)}{r^{2Q+\gamma+1}}\,dr.$$

$$\int\limits_{E}\frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr\leqslant\sum_{k=k_0+1}^{N}\int\limits_{E_{\Gamma_k}}\frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr.$$

Пусть $F(z)$ — $QIIM$ при $z\neq\infty$, т. е.

$$F(z)=\Phi(\varkappa(z)).$$

Положим

$$F_1(z)=\Phi'(\varkappa(z)).$$

$$M\left(r,\frac{F_1}{F-a}\right)=\max_{|z|=r}\ln\left|\frac{F_1(z)}{F(z)-a}\right|.$$

Справедлива следующая

Лемма 2.6. *Для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $r_0=r_0(\varepsilon)$, *что при всех* $R>r_0$ *и* $\gamma>0$

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R}\frac{\sum\limits_{n=1}^{q}\ln^{+}M\left(r,\dfrac{F_1}{F-a_n}\right)dr}{r^{\gamma+1}}\leqslant\varepsilon qC_8(Q)\frac{T(e\bar{\rho}(R),\Phi)}{R^{\gamma}}+$$

$$+\varepsilon C_9(Q)\int\limits_{0}^{0,5R}\frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr.\tag{2.8}$$

Для доказательства мы используем оценку (37) из работы [1, с. 832] и проводим стандартные рассуждения (см., например, [12]).

3. Предварительные оценки для величин отклонений функций

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ — конечное множество различных комплексных чисел из множества положительных отклонений $\Omega(F)$ функции $F(z)$. Далее будем считать, что числа $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ удовлетворяют при $k \neq$ условию

$$|a_k - a_j| > 2^{2Q+1}. \qquad (3.1.)$$

Условие (3.1) не нарушает общности наших рассуждений [1]. Обозначим при $r > r_0$

$$E_k(r) = \{\theta : |F(re^{i\theta}) - a_k| < 1\}. \qquad (3.2.)$$

При $1 \leqslant n < j \leqslant q$ множества $E_n(r)$ и $E_j(r)$ не пересекаются (см. [1, с. 834]). Мы имеем

$$L(r, a_n, F) = \ln + \frac{1}{|F(re^{i\theta_n}) - a_n} =$$

$$= \ln + \frac{|F_1(re^{i\theta_n})|}{|F_1(re^{i\theta_n})| \cdot |F(re^{i\theta_n}) - a_n|},$$

Разделим при фиксированном r множество $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ на две группы A_1 и A_2 следующим образом:

$$A_1 = \{a_k \in \{a_k\}_{k=1}^{q} : r^m |F_1(re^{i\theta_k})| < 1\},$$

$$A_2 = \{a_k \in \{a_k\}_{k=1}^{q} : r^m |F_1(re^{i\theta_k})| \geqslant 1\},$$

где $m = [3Q]$.

Значит,

$$\sum_{a_k \in A_2} L(r, a_k, F) \leqslant q \operatorname{in} + M\left(r, \frac{F_1}{F - a_k}\right) + q3Q \ln r. \qquad (3.3)$$

Для суммирования $L(r, a_n, F)$ при $a_n \in A_1$ на необходимо следующее вспомогательное утверждение (см. [1]).

Лемма 3.1. *Пусть* $2^{k-1} \leqslant r \leqslant 2^k$,

$$r \in E_{\Gamma_k}(r), \ (R > R_0).$$

Если $\theta_n \in E_u(r)$ *и* $\theta_k \in E_k(r)$ $(k \neq n)$, *то на дуге окружности* $|z| = r$, *соединяющей точки* $re^{i\theta_n}$ и $re^{i\theta_k}$, *существует точка* $re^{i\varphi_0}$, *для которой*

$$r^m |F_1(re^{i\varphi_0})| > 1. \qquad (3.4)$$

По лемме 3.1. при $k \neq n$ на дуге окружности $|z| = r$, соединяющей точки $re^{i\theta_n}$ и $re^{i\theta_k}$, существует точка $\varphi_0 = \varphi_0(n, k)$, для которой $r^m |F_1(re^{i\varphi_0})| > 1$. Обозначим $I_n(r) = (\varphi_1(n), \ \varphi_2(n)) = (\varphi_1^n, \ \varphi_2^n)$ такой максимальный интервал значений θ, содержащий точку θ_n, что при $\theta \in I_n(r)$ $r^m |F_1(re^{i\theta})| < 1$. Интервалы $I_n(r)$ не пересекаются при $n \neq k$, так как разделяются точкой, в которой справедлива оценка (3.4). Кроме того,

$$r^m |F_1(re^{i\varphi_1^n})| = r \ \ |F_1(re^{i\varphi_2^n})| = 1. \qquad (3.5)$$

Пусть $a_n \in A_1$, тогда

$$L(r, a_n, F) \leqslant 3Q \ln r + \ln^+ M\left(r, \frac{F_1}{F - a_n}\right) +$$

$$+ \ln \frac{1}{r^m |F_1(re^{i\theta_n})|} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r^m |F_1(re^{i\varphi_1^n})|} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r^m |F_1(re^{i\varphi_2^n})|} = S_n(r) + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\Phi'(w_1)}{\Phi'(w_0)}\right| + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\Phi'(w_2)}{\Phi'(w_0)}\right|, \tag{3.6}$$

где

$$S_n(r) = 3Q \ln r + \ln^+ M\left(r, \frac{F_1}{F - a_n}\right),$$

$$w_i = \varkappa(re^{i\varphi_i^n}) \quad i = 1, 2,$$

$$w_0 = \varkappa(re^{i\theta_n}), \quad \theta_n \in (\varphi_1^n, \varphi_2^n).$$

Кроме того, $\Phi'(w)$ допускает представление (см. [12])

$$\Phi'(w) = \frac{\prod\limits_{|a_k| \leqslant \bar\rho(R)} \left(1 - \frac{w}{a_k}\right)}{\prod\limits_{|b_k| \leqslant \bar\rho(R)} \left(1 - \frac{w}{b_k}\right)} \omega_{\bar\rho(R)}(w)$$

при $|w| < 0{,}5\,\bar\rho(R)$; $\ln |w_{\bar\rho(R)}(w)|$

допускает оценку

$$|\ln| \omega_{\bar\rho(R)}(w)|| \leqslant K \frac{|w|}{\bar\rho(R)} T(2\bar\rho(R), \Phi'), \tag{3.7}$$

где $|w| = |\varkappa(re^{i\varphi})| \leqslant \bar\rho(r)$.

В силу того, что

$$\frac{\bar\rho(r)}{\bar\rho(R)} \leqslant \omega^{2Q}(Q) \left(\frac{r}{R}\right)^Q,$$

имеем

$$|\ln| \omega_{\bar\rho(R)}(w)|| \leqslant K\omega^{2Q}(Q) \left(\frac{r}{R}\right)^Q T(2\bar\rho(R), \Phi'). \tag{3.8}$$

И, значит, для $a_n \in A_1$

$$L(r, a_n, F) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{|a_k| \leqslant \bar\rho(R)} \ln^+ \left|\frac{w_2 - a_k}{w_1 - a_k}\right| + \frac{1}{2} \sum_{|b_k| \leqslant \bar\rho(R)} \ln^+ \left|\frac{w_1 - b_k}{w_1 - b_k}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{|b_k|\leqslant \bar{\rho}(R)} \ln^+ \left|\frac{w_2-b_k}{w_0-b_k}\right| + \frac{1}{2}\sum_{|a_k|\leqslant \bar{\rho}(R)} \ln^+ \left|\frac{w_2-a_k}{w_0-a_k}\right| + \sigma_n(r), \tag{3.9}$$

где $\sigma_n(r) = 0{,}5\,[\ln|\omega_{\bar{\rho}(R)}(w_1)|/|\omega_{\bar{\rho}(R)}(w_0)|] +$

$$+\,0{,}5\ln\frac{|\omega_{\bar{\rho}(R)}(w_2|}{|\omega_{\bar{\rho}(R)}(w_0)|} + S_n(r).$$

Оценки (2.1) и (3.9) дают

$$L(r, a_n, F) \leqslant C_3(Q)\sum_{|d_\nu|\leqslant CR}\left\{\left(\int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n}\frac{r d\varphi}{|re^{i\varphi}-d_\nu|}\right)^{\frac{1}{Q}} + \right. \tag{3.10}$$

$$\left. + \int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n}\frac{r d\varphi}{|re^{i\varphi}-d_\nu|}\right\} + \sigma_n(r),$$

где $d_\nu = \varkappa^{-1}(C_\nu)$, а C_ν — объединенная последовательность нулей и полюсов функции $\Phi'(\varkappa)$. Заметим, что (см. [1, с. 825[)

$$\bar{R}(\bar{\rho}(R)) \leqslant \omega^2(Q)\,R = CR.$$

Из (3.3) и (3.10) получаем

$$L(r, a_n, F) \leqslant C_3(Q)\sum_{|d_\nu|\leqslant CR}\left\{\left(\int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n}\frac{r d\varphi}{|re^{i\varphi}-d_\nu|}\right)^{\frac{1}{Q}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n}\frac{r d\varphi}{|re^{i\varphi}-d_\nu|}\right\} + \sigma_n(r) \tag{3.10'}$$

для любого $a_n \in \{a_k\}_{k=1}^q$ и $r > r_0$.

Теперь из (3.10′) получаем

$$\sum_{n=1}^q \beta^Q(a_n, F)\,T^Q(r, F) \leqslant C_3^Q(Q)\sum_{n=1}^q\left[\sum_{|d_\nu|\leqslant CR}\left\{\left(\int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n}\frac{r d\varphi}{|re^{i\varphi}-d_\nu|}\right)^{\frac{1}{Q}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n}\frac{r d\varphi}{|re^{i\varphi}-d_\nu|}\right\}\right]^Q + C_{10}(Q)\sum_{n=1}^q \sigma_n^Q(r).$$

Положим

$$\alpha_\nu = \alpha(\nu, n) = \int\limits_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n} \frac{r\,d\varphi}{|re^{i\varphi} - d_\nu|}. \tag{3.11}$$

Используя неравенство Гельдера ($Q \geqslant 1$) и обозначая

$$\Phi(s, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|se^{i\varphi} - 1|^\beta},$$

приходим к оценке

$$\sum_{n=1}^{q} \Big[\sum_{\nu} (\alpha_\nu^{\frac{1}{Q}} + \alpha_\nu) \Big]^Q \leqslant 2^{2Q-1} \sum_{|d_\nu| \leqslant CR} \left\{ \sum_{n=1}^{q} \int\limits_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n} \frac{\left|\frac{r}{d_\nu}\right|^{\frac{1}{Q}} \left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right| + 1\right)^{\frac{Q-1}{Q}} + \left|\frac{r}{d_\nu}\right|}{\left|\left|\frac{r}{d_\nu}\right| e^{i\varphi} - 1\right|} d\varphi \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{|d_\nu| \leqslant CR} \left[\left|\frac{r}{d_\nu}\right|^{\frac{1}{Q}} \left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right| + 1\right)^{\frac{Q-1}{Q}} + \left|\frac{r}{d_\nu}\right| \right] \Phi\left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right|, 1\right) \right\}^{Q-1} \leqslant \tag{3.12}$$

$$\leqslant 2^{2Q} \pi \left\{ \sum_{|d_\nu| \leqslant CR} \left[\left|\frac{r}{d_\nu}\right|^{\frac{1}{Q}} \left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right| + 1\right)^{\frac{Q-1}{Q}} + \left|\frac{r}{d_\nu}\right| \right] \Phi\left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right|, 1\right) \right\}^Q.$$

Из (3.11) и (3.12) находим

$$\left\{ \sum_{n=1}^{q} \beta^Q(a_n, F) \right\}^{\frac{1}{Q}} T(r, F) \leqslant C_3(Q)\, 4\pi^{\frac{1}{Q}} \sum_{|d_\nu| \leqslant CR} \left[\left|\frac{r}{d_\nu}\right|^{\frac{1}{Q}} \left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right| + 1\right)^{\frac{Q-1}{Q}} + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{r}{d_\nu}\right| \right] \Phi\left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right|, 1\right) + C_{11}(Q) \sum_{n=1}^{q} \sigma_n(r). \tag{3.13}$$

4. Доказательство теоремы 1

Проведем сначала оценку величины $\sigma_n(r)$:

$$\sigma_n(r) \leqslant S_n(r) + |\ln|\omega_{\overline{\rho}(R)}(w_0)|| + \frac{1}{2} |\ln|\omega_{\overline{\rho}(R)}(w_1)|| +$$

$$+ \frac{1}{2} |\ln|\omega_{\overline{\rho}(R)}(w_2)|| \leqslant C_{12}(Q) \left(\frac{r}{R}\right)^Q T(2\overline{\rho}(R), \Phi') + S_n(r).$$

Заметим, что

$$T(2\overline{\rho}(R), \Phi') \leqslant 2T(2\overline{\rho}(R), \Phi) + K \ln [\overline{\rho}(R)\, T(4\overline{\rho}(R), \overline{\Phi})] + K. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *При* $r > r_0(\varepsilon) > 1$, $\varepsilon > 1$, *и* $\gamma > 0$

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\sum\limits_{n=1}^{q} \sigma_n(r)}{r^{\gamma+1}}\, dr \leqslant \varepsilon C_9(Q) \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr +$$

$$+ \varepsilon q C_8(Q) \frac{T(e\bar{\rho}(R), \Phi)}{R^\gamma} + \frac{C_{12}(Q)\, qT(2\bar{\rho}(R), \Phi}{R^\gamma} +$$

$$+ \frac{qKC_{12}(Q) \ln [\bar{\rho}(R)\, T(4\bar{\rho}(R), \Phi)] + K}{R^\gamma}, \qquad (4.2)$$

где ε — произвольное положительное число.

Действительно,

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\sum\limits_{n=1}^{b} \sigma_n(r)}{r^{\gamma+1}}\, dr \leqslant qC_{12}(Q) \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(2\bar{\rho}(R), \Phi')}{r^{\gamma+1}} \left(\frac{r}{R}\right)^Q dr +$$

$$+ \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\sum\limits_{n=1}^{q} S_n(r)}{r^{\gamma+1}}\, dr.$$

Из оценок (4.1) и (2.8) получим (4.2).

Лемма 4.2.

$$\int\limits_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{Q}}(s+1)^{\frac{Q-1}{Q}} + s}{s^{\gamma+1}}\, \Phi(s, 1)\, ds \leqslant C_{13}(Q) \frac{1}{\gamma} \quad (0 < \gamma < 1). \qquad (4.3)$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы. Мы имеем $\lambda < \gamma < \rho$:

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \sum_{|d_\nu| \leqslant CR} \left[\left|\frac{r}{d_\nu}\right|^{\frac{1}{Q}} \left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right| + 1 \right)^{\frac{Q-1}{Q}} + \left|\frac{r}{d_\nu}\right| \right] \Phi\left(\left|\frac{r}{d_\nu}\right|, 1 \right) \frac{dr}{r^{\gamma+1}} =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{0,5R} \int\limits_0^{CR} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{1}{Q}} \left(\frac{r}{t} + 1\right)^{\frac{Q-1}{Q}} + \frac{r}{t} \right] \times \Phi\left(\frac{r}{t}, 1\right) dn(t) \frac{dr}{r^{\gamma+1}} =$$

$$= \int\limits_0^{CR} \frac{dn(t)}{t^\gamma} \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{s^{\frac{1}{Q}}(s+1)^{\frac{Q-1}{Q}} + s}{s^{\gamma+1}}\, \Phi(s, 1)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{CR} \frac{dn(t)}{t^\gamma} \int\limits_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{Q}}(s+1)^{\frac{Q-1}{Q}} + s}{s^{\gamma+1}}\, \Phi(s, 1)\, ds.$$

Мы сделали замену $r=ts$, $dr=tds$, $n(t)=n(t, 0, \infty, F_1)$ и воспользовались теоремой Фубины.

Из (3.13) и (4.3) получаем

$$\left[\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F)\right]^{\frac{1}{Q}} \left[\int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr - \int_{E} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}(Q) \frac{1}{\gamma} \int_{r_0}^{RC} \frac{dn(t)}{t^{\gamma}} + C_{11}(Q) \int_{r_0}^{0,5R} \frac{\sum_{n=1}^{q} \sigma_n(r)}{r^{\gamma+1}}\, dr. \qquad (4.4)$$

Далее имеем, используя лемму 2.3,

$$\int_{r_0}^{CR} \frac{dn(t)}{t^{\gamma}} \leqslant \gamma^2 \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N(t)}{t^{\gamma+1}}\, dt + \frac{C_{15}(Q)\, T(2eCR, F)}{R^{\gamma}} +$$

$$+ K \leqslant \gamma^2 \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr + C_{15}(Q) \frac{T(2eCR, F)}{R^{\gamma}} + K. \qquad (4.5)$$

Используем следующее соотношение (см. [1, с. 826]):

$$T(k\bar{\rho}(R), \Phi) \leqslant C_{16}(Q) \ln R\, T(e\omega^2(Q)\, k^{Q} R, F). \quad (k \geqslant 1) \qquad (4.6)$$

Из (2.7), (4.2) и (4.6) находим

$$\left[\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F)\right]^{\frac{1}{Q}} \left[\int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr - \frac{C_7(Q)}{r_0^{2Q}} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr - \right.$$

$$\left. - \frac{C_7(Q)}{r_0^{2Q}} \cdot \frac{T(4R, F)}{R^{\gamma}}\right] \leqslant C_{14}(Q)\, \gamma \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr +$$

$$+ \varepsilon\, C_9(Q) \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr + \frac{C_{17}(Q)\, T(e^{Q}\, \omega^2(Q) 4^{Q} R, F)}{R^{\gamma}}. \qquad (4.7)$$

Рассмотрим случай, когда $F(z)$ имеет нерегулярный рост, т. е. $\lambda<\rho$. Полагаем $\lambda<\lambda+\varepsilon=\gamma<\rho$. Так как $\gamma<\rho$, то

$$\lim \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr = \infty, \qquad (4.8)$$

а так как $\lambda<\gamma$, то найдется последовательность $\{R_n\} \uparrow \infty$, для которой

$$\frac{T(kR_n, F)}{R_n^{\gamma}} \ln R_n \to 0.$$

Разделим обе части неравенства (4.7) на интеграл (4.8). Устремив R к ∞ по последовательности $\{R_n\} \uparrow \infty$ и выбрав достаточно большое r_0, мы приходим к оценке

$$\left[\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F)\right]^{\frac{1}{Q}} \leqslant C_2(Q)(\lambda + \varepsilon) + \varepsilon C_{18}(Q),$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F) \leqslant C_2(Q)\lambda^{Q}.$$

Пусть теперь $F(z)$—$Q\Pi M$-функция регулярного роста, $\rho(r)$ — уточненный порядок. Проводя аналогичные рассуждения, как и выше, мы приходим к оценке

$$\left[\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F)\right]^{\frac{1}{Q}} \left[\int_{n_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\rho+1}}\, dr - \frac{C_7(Q)}{r_0^{2Q}} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\rho+1}}\, dr - \right.$$

$$\left. - \frac{C_7(Q)\, T(4R, F)}{r_0^{2Q} R^{\gamma}}\right] \leqslant C_{14}(Q)(\rho + \varepsilon) \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\rho+1}}\, dr + ($$

$$+ \varepsilon C_9(Q) \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\rho+1}}\, dr + \frac{C_{17}(Q) T(C(Q)R, F)}{R^{\rho(R)}}.$$

Заметим, что

$$\lim_{R \to \infty} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\rho(r)+1}}\, dr = \infty, \tag{4.10}$$

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{T(R, F)}{R^{\rho(R)}} = 1. \tag{4.11}$$

Кроме того, имеет место утверждение (см. [1, с. 826]).

***Лемма* 4.3** *Пусть $F(z)$ — $Q\Pi M$ при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ. Тогда при любом фиксированном $k > 1$ существует последовательность $R_n\} \uparrow \infty$ такая, что*

$$T(k\bar{\rho}(R_n), \Phi) \leqslant C(Q, \lambda)\, T\left(\frac{R_n}{k}, F\right), \tag{4.12}$$

$$\Phi(\varkappa(z)) = F(z),$$

$$C(Q,\lambda) = 2Q\,[k^{Q+1} e^{\frac{Q}{\lambda}} \omega^{2Q}(Q)]^{\lambda Q}.$$

Из соотношений (4.9), (4.10) и (4.12) мы, как и выше, приходим к оценке

$$\left[\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F)\right]^{\frac{1}{Q}} \leqslant C_2(Q)(\rho+\varepsilon) + \varepsilon C_{19}(Q),$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F) \leqslant C_2(Q)\,\rho^{Q}. \qquad (4.13)$$

Так как соотношение (4.13) справедливо для любого конечного множества различных комплексных чисел $\{a^k\}_{k=1}^{q} \in \Omega(F)$, то отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{q} \beta^{Q}(a_n, F) \leqslant C_2(Q)\,\lambda^{Q}.$$

Тем самым 1-я часть теоремы 1 доказана полностью.

5. Величины дефектов $Q\Pi M$-функций нижнего порядка $\lambda<1$

Пусть $a_k\}_{k=1}^{q}$, как и в предыдущем случае, конечное множество различных комплексных чисел, удовлетворяющих условию (3.1), для которых $\delta(a_n, F)>0$. Пусть $E_n(r)$ — множество, определённое соотношением (3.2). При фиксированном $r>r_0$ имеем

$$E_n(r) \cap E_j(r) = \varnothing \quad (n \neq j)$$

и

$$\sum |E_n(r)| \leqslant 2\pi, \qquad (5.1)$$

где $|E_n(r)| = \operatorname{mes} E_n(r)$. Пусть, как и выше, $r \in [r_0, \ .5R]$, $r \notin E$. Используя оценки (3.10) и (3.9), имеем

$$\frac{\delta(a_n, F)}{|E_n(r)|} T(r, F) \leqslant \frac{m(r, a_n, F)}{|E_n(r)|} \leqslant \ln^{+} M(r, a_n, F) \leqslant \sigma_n(r) +$$

$$+ C_3(Q) \sum_{|d_\nu| \leqslant CR} \left\{ \left(\int_{\varphi_1^n}^{\varphi^n} \frac{r\,d\varphi}{|re^{i\varphi} - d_\nu|} \right)^{\frac{1}{Q}} + \int_{\varphi_1^n}^{\varphi_2^n} \frac{r\,d\varphi}{|re^{i\varphi} - d_\nu|} \right\}. \qquad (5.2)$$

Так как в дальнейшем нам придется проводить рассуждения, аналогичные предыдущим, то мы лишь наметим ход доказательства теоремы при $\lambda<\rho$. Из (5.2), (4.2) и (4.5) имеем $(r>r_0)$ для любого $\varepsilon>0$, $(\lambda<\lambda+\varepsilon=\gamma<\rho)$:

$$\int_{r_0}^{0,5R} \left[\sum_{n=1}^{q} \left(\frac{\delta_n}{|E_n|}\right)^{Q}\right]^{\frac{1}{Q}} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr \leqslant C_2(Q)\,\gamma \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, F)}{r^{\gamma+1}}\, dr +$$

$$+\varepsilon \int\limits_{0}^{0,5R} \frac{T(r,F)}{r^{\gamma+1}}\,dr + K,$$

$$\varliminf_{r\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{q}\left(\frac{\delta(a_n,F)}{|E_n(r)|}\right)^{Q}\right)\leqslant C_2(Q)\lambda^{Q}$$

и, значит, для некоторой неограниченной последовательности $r^k\uparrow\infty$

$$\sum_{n=1}^{q}\left(\frac{\delta(a_n)F)}{|E_n(r_k)|}\right)^{Q}\leqslant C_2(Q)\lambda^{Q}+\varepsilon. \qquad (\varepsilon>0)$$

В силу неравенства Гельдера

$$\left[\sum_{n=1}^{q}\delta_n^{\frac{Q}{Q+1}}\right]^{Q+1}=\left[\sum_{n=1}^{q}\left(\frac{\delta_n}{|E_n|}\right)^{\frac{Q}{Q+1}}|E_n|^{\frac{Q}{Q+1}}\right]^{Q+1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{q}\left(\frac{\delta_n}{|E_n|}\right)^{Q}\right)\left(\sum_{n=1}^{q}|E_n|\right)^{Q}\leqslant(2\pi)^{Q}\left[\sum_{n=1}^{q}\left(\frac{\delta_n}{|E_n|}\right)^{Q}\right].$$

И, значит,

$$\sum_{n=1}^{q}\delta^{\frac{Q}{Q+1}}(a_n,F)\leqslant C_2(Q)\lambda^{\frac{Q}{Q+1}}.$$

При $\lambda=\rho$ доказательство аналогично.

6. Замечания

Предыдущий метод позволяет установить следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $F(z)$ — QПМ при $z\neq\infty$ функция, нижний порядок которой $\lambda<1$. Если множество $\Omega(F)$ содержит более одной точки и $n(r,0,\Phi)=n(r,\infty,\Phi)$, то ее дефекты и величины отклонений удовлетворяют оценкам*

$$\sum_{(a)}\beta^{Q}(a,F)\leqslant C(Q)\lambda^{2Q},\quad \sum_{(a)}\delta^{\frac{Q}{Q+1}}(a,F)\leqslant C(Q)\lambda^{\frac{2Q}{Q+1}}.$$

Вероятно, оценки остаются справедливыми и без дополнительного предположения о ее количестве нулей и полюсов. Этот факт нам установить не удалось.

Метод экстремальных длин [13] позволяет получить следующий результат (см. [1]).

Теорема 3. *Пусть $F(z)$—QПМ при $z\neq\infty$ функция конечного нижнего порядка и ее множество $\Omega(F)$ содержит более чем одну точку. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{(a)} \beta(a, F) \leqslant C(Q, \lambda),$$

где $C(Q\lambda)$ — *положительная постоянная, зависящая лишь от* Q *и* λ.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. П. Петренко за руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петренко В. П. О величинах отклонений и дефектах *QПМ*-функций. — «Сиб. мат. журн.», 1972, № 4, с. 823—840.
2. Bers L. On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, vol. 84, N 1, p. 78—84.
3. Петренко В. П. О росте *QПМ*-функций. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 196. № 1, с. 50—52.
4. Hersch J. Contribution á la théorie des functions pseudo-analytiques. — «Comment. math. helv.», 1956, vol. 30, N 1, p. 1—19.
5. Хейман У. К. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 287 с.
6. Edrei A., Fuchs W. H. I. The deficiencies of meromorfic functions of order less than one. — «Duke Math. I.», 1960, vol. 27, p. 233—249.
7. Островский И. В., Козакова И. В. Замечание о дефектах мероморфных функций малого порядка. — «Учен. зап. Харьк. ун-та», 1964, т. 30, с. 70—74.
8. Петренко В. П. Некоторые оценки для величин дефектов мероморфной функции. — «Сиб. мат. журн.», 1966, № 6, с. 1319—1336.
9. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — «Изв. АН СССР», сер. мат., 1969, т. 33, № 2, с. 414—454.
10. Петренко В. П. Рост *Q*-псевдомероморфных функций. — «Сиб, мат. журн.», 1974, т. XV, № 1, с. 76—89.
11. Mori A. On quasiconformality and pseudo-analyticity. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, vol. 84, N 1, p. 56—77.
12. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
13. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М., «Мир», 1960. 132 с.

Поступила 10 января 1974 г.