УДК 519.21

Г. П. ЧИСТЯКОВ, канд. физ.-мат. наук

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК В ТЕОРЕМАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Пусть G, H — любые функции распределения (ф. р.), тогда под $d(G, H)$ будем понимать либо расстояние в метрике Леви ($d=L$), либо в равномерной метрике ($d=\rho$). Через G_ε обозначим класс ф. р. F таких, что $d(G, F) \leqslant \varepsilon$, а через K_G — класс компонент ф. р. G и введем, следуя В. М. Золотареву [1], следующую величину:

$$\beta_d^{(G)}(\varepsilon) = \sup_{G_\varepsilon} \sup_{F' \in K_F} \inf_{G' \in K_G} d(F', G').$$

Далее под $\Phi_{\sigma,a}$ и $\Pi_{\lambda,a}$ будем понимать нормальную ф. р. и ф. р. Пуассона соответственно с характеристическими функциями (х. ф.) вида

$$\varphi(t;\Phi_{\sigma,a}) = \exp\{-2\sigma t^2 + iat\},\ \ \varphi(t;\Pi_{\lambda,a}) = \exp\{\lambda e^{it} - 1\} + iat\}.$$

1. Устойчивость разложений нормального распределения в равномерной метрике изучалась Н. А. Сапоговым [2, 3], а С. Г. Малошевским была доказана неулучшаемость его оценки [4]; с этими результатами можно познакомиться по монографии [5, с. 340—352]. Приведем теорему С. Г. Малошевского.

Теорема. *Существует последовательность композиций* $F_n = F_{1n} * F_{2n}$ (F_n, F_{1n}, F_{2n} *— ф. р.), для которой* $\varepsilon_n = \rho(F_n, \Phi_{1,0}) \to 0$, *усеченные (в смысле [5, с. 341]) дисперсии компонент ограничены снизу положительным числом и в то же время справедлива оценка*

$$\delta_n = \inf_{G\in K_{\Phi_{1,0}}} \rho(F_{1n}, G) > c(-\ln\varepsilon_n)^{-\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

$c>0$ *— некоторая постоянная.*

Доказательство С. Г. Малошевского опирается на тонкие факты теории ортогональных многочленов. Ниже будет приведено простое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Определим функцию $\varepsilon_T(x)$, $T \geqslant 10$ формулой

$$\varepsilon_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}} T^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/4)\cos(T^{\frac{1}{2}}x), & |x| \leqslant T_1 \\ 0, & |x| < T_1 \end{cases},$$

где $T_1 = \pi T^{-\frac{1}{2}}\left\{\left[\dfrac{T}{2\pi}\right] + \dfrac{1}{2}\right\}$, и положим $F_{1T}(x) = \Phi_{\frac{1}{2},0}(x) + \varepsilon_T(x)$, $F_{2T}(x) = \Phi_{\frac{1}{2},0}(x)$. Так как функция $F_{1T}(x)$ непрерывна и $F'_{1T}(x) \geqslant 0$ ($x \neq \pm T_1$), то она является ф. р. Легко видеть, что усеченные дисперсии ф. р. $F_{1T}(x)$, $F_{2T}(x)$ (в нашем случае это $\int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} s^2 dF_{jT}(s) - (\int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} s\,dF_{jT}(s))^2$) ограничены снизу положительным числом. Покажем, что для любой ф. р. $G \in K_{\Phi_{1,0}}$ выполняется

$$\rho(F_{1T}, G) \geqslant \frac{1}{4e\sqrt{\pi}} T^{-\frac{1}{2}},\ \forall T \geqslant 10. \tag{2}$$

В самом деле, по теореме Г. Крамера любая ф. р. $G \in K_{\Phi_{1,0}}$ имеет вид $\Phi_{\sigma,a}$, $\sigma \leqslant 1$. При $G = \Phi_{\sigma,a}$, $a \geqslant 0$, оценка (2) справедлива, поскольку $F_{1T}(0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}} T^{-\frac{1}{2}}$, $\Phi_{\sigma,a}(0) \leqslant \dfrac{1}{2}$. При

$G=\Phi_{\sigma,a}$, $a<0$ выполняется $\Phi_{\sigma,a}(x)>\Phi_{\frac{1}{2},0}(x)$, $x\geqslant 0$ для $\sigma\leqslant\frac{1}{2}$ и $\Phi_{\sigma,a}(x)>\Phi_{\frac{1}{2},0}(x)$, $x\leqslant 0$ для $\sigma>\frac{1}{2}$. Отсюда следует:

$$|\Phi_{\sigma,a}(\pm\pi T^{-\frac{1}{2}})-F_{1T}(\pm\pi T^{-\frac{1}{2}})|>\Phi_{\sigma,a}(\pm\pi T^{-\frac{1}{2}})-$$

$$-\Phi_{\frac{1}{2},0}(\pm\pi T^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi^2}{4T}}T^{-\frac{1}{2}}\geqslant\frac{1}{4e\sqrt{\pi}}T^{-\frac{1}{2}},$$

где знак $+$ берется при $\sigma\leqslant\frac{1}{2}$ и знак $-$ при $\sigma>\frac{1}{2}$, и мы приходим к оценке (2).

Из определения ф. р. F_{1T} и F_{2T} следует, что

$$|(F_{1T}*F_{2T})(x)-(\Phi_{\frac{1}{2},0}*\Phi_{\frac{1}{2},0})(x)|\leqslant|(\varepsilon_T*\Phi_{\frac{1}{2},0})(x)|.$$

Оценим правую часть этого неравенства. Имеем

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_T(s)\,e^{-\frac{(s-x)^2}{4}}ds\right|\leqslant\frac{1}{8\pi}T^{-\frac{1}{2}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\cos(T^{\frac{1}{2}}s)e^{-\frac{s^2}{4}-\frac{(s-x)^2}{4}}ds\right|+$$

$$+0(e^{-\frac{1}{4}T_1^2})=\frac{1}{8\pi}T^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{x}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(T^{\frac{1}{2}}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{s^2}{2}}ds\right|+$$

$$+0(e^{-\frac{1}{4}T_1^2})=\frac{\left|\cos\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{2}}x\right)\right|}{4\sqrt{2\pi}\,T^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(T^{\frac{1}{2}}s)\,e^{-\frac{s^2}{2}}ds+$$

$$+0(e^{-\frac{1}{4}T_1^2})=0(e^{-\frac{1}{16}T}),\ \forall T\geqslant 10.$$

Сравнивая эту оценку с соотношением (2), приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Известно [1], что $\beta_L^{(\Phi_{1,0})}(\varepsilon)>e(-\ln\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$, $c>0$ — постоянная. Из построенного примера получаем и это соотношение, поскольку, как нетрудно показать, в нашем примере оценка (2) сохраняет силу при замене равномерной метрики ρ на метрику Леви L.

2. Оценки устойчивости разложений распределения Пуассона были получены О. В. Шалаевским [6] и Ю. Ю. Мачисом [7, 8]. Ю. Ю. Мачису принадлежит следующий результат:

$$c_1(\lambda)\left(\frac{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right)^2 \leqslant \beta_d^{(\Pi_\lambda,0)}(\varepsilon) \leqslant c_2(\lambda)\left(\frac{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$c_j(\lambda)>0$ — постоянные. Мы покажем, что имеет место такая оценка:

$$c_1(\lambda)\frac{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \beta_d^{(\Pi_\lambda,0)}(\varepsilon) \leqslant c_2(\lambda)\frac{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{3}$$

$c_j(\lambda) > 0$, $j = 1, 2$ — постоянные, зависящие лишь от λ.

В дальнейшем положительные постоянные, зависящие лишь от λ, будем обозначать через c_l, $l=3, 4, \ldots$

Для доказательства соотношения (3) понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Коэффициенты Фурье* $c_{jk}^{(n)}$ *функций*

$$\psi_{jn}(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda(e^{it}-1) + \frac{(-1)^j\alpha^2}{n}(e^{2it}-1)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}^{(n)} e^{ikt},\ j=1,2,$$

где $\lambda>0$, n *— натуральное число,* $0<\alpha^2\leqslant\lambda^2/(64(\lambda^2+1))$, *допускают оценку*

$$|c_{jk}^{(n)}| \leqslant c_3\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{k}{2}},\ k=n, n+1, \ldots$$

Доказательство. Так как функции $\psi_{jn}(t)$, $j=1,2$ целые и 2π-периодические, то для $c_{jk}^{(n)}$, $k=0,1,2,\ldots$ выполняется соотношение

$$c_{jk}^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{jn}(t)\,e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-i\sigma}^{\pi-i\sigma}\psi_{jn}(z)\,e^{-ikz}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\{\ln\psi_{jn}(-i\sigma)-\sigma k\}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi_{jn}(t-i\sigma)}{\psi_{jn}(-i\sigma)}e^{-ikt}\,dt,\ \forall\sigma>0. \tag{4}$$

В этом соотношении положим $\sigma=\ln\frac{2n}{\lambda}$ для всех $k\geqslant n$. Тогда для таких k имеем

$$|c_{jk}^{(n)}| \leqslant \frac{1}{2\pi}e^{-k\ln\frac{2n}{\lambda}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\psi_{jn}\left(t-i\ln\frac{2n}{\lambda}\right)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-k\ln\frac{2n}{\lambda}+n+\frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{2n}{\lambda}\right)^2-\frac{1}{2}\lambda+\frac{\alpha^2}{n}\right\}\leqslant c_3\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{k}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть $\psi_{1n}(t)$ — функция из леммы 1. Тогда $\exists c_4$ такая, что для $\forall n \geqslant c_4$ коэффициенты Фурье $c_{1k}^{(n)}$ $k=0, 1, 2, \dots, n$ функции $\psi_{1n}(t)$ строго положительны.*

Доказательство леммы 2 опирается на один прием Ю. В. Линника [9]. Из разложения экспоненциальной функции в ряд видим, что коэффициенты Фурье функции $\psi_{1n}(t)$ подсчитываются по формуле

$$c_{1k}^{(n)}=e^{-\frac{1}{2}\lambda+\frac{\alpha^2}{n}}\sum_{j=0}^{[k/2]}\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^{k-2j}}{(k-2j)!}\cdot\frac{1}{j!}\left(-\frac{\alpha^2}{n}\right)^j.$$

Сравнивая в этой формуле слагаемые с $j=2m$ и $j=2m+1$ $(m=0, 1, 2, \dots, [k/2])$, легко получаем, что $c_{1k}^{(n)}>0$ для $k=0, 1, 2, \dots, \left[\frac{\lambda}{2\alpha}\sqrt{n}\right]$.

Перейдем к исследованию коэффициентов $c_{1k}^{(n)}$ для $k\left[\frac{\lambda}{2\alpha}\sqrt{n}\right]+ +1, \dots, n$. Все дальнейшие рассуждения будут вестись при условии, что $k=\left[\frac{\lambda}{2\alpha}\sqrt{n}\right]+1, \dots, n$. Воспользуемся соотношением (4) при $j=1$, в котором $\sigma=\sigma(k)$ будем задавать следующим образом:

$$\sigma(k)=\ln\left\{\frac{n\lambda}{8\alpha^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{32\alpha^2 k}{n\lambda^2}}\right)\right\}.$$

Используя разложение в ряд функции $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ $|t|<1$ и то обстоятельство, что $\alpha^2\leqslant\lambda^2/(64(\lambda^2+1))$, легко усматриваем справедливость следующего равенства для $\sigma(k)$:

$$\sigma(k)=\ln\frac{2k}{\lambda}+\theta(k),\ 0\leqslant\theta(k)\leqslant\ln 2. \tag{5}$$

Отметим также легко проверяемый факт, что $\sigma=\sigma(k)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\sigma}\{\ln\psi_{1n}(-i\sigma)-\sigma k\}=\frac{1}{2}\lambda e^{\sigma}-\frac{2\alpha^2}{n}e^{2\sigma}-k=0. \tag{6}$$

Обозначим через $R(t, k)$ функцию

$$R(t, k)=\frac{\psi_{1n}(t-i\sigma(k))}{\psi_{1n}(-i\sigma(k))}e^{-ikt}=\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda e^{\sigma(k)}\times\right.$$

$$\times (e^{it}-1)-\frac{\alpha^2}{n}e^{2\sigma(k)}(e^{2it}-1)-ikt\Big\}.$$

Для нее, учитывая (5), получаем неравенство для $t\in[-\pi, \pi]$:

$$-\operatorname{Re}\ln R(t,k)=\lambda e^{\sigma(k)}\sin^2\frac{t}{2}\left(1-\frac{4\alpha^2}{n\lambda}e^{\sigma(k)}\cos^2\frac{t}{2}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3}{4}\lambda e^{\sigma(k)}\sin^2\frac{t}{2}\geqslant\frac{3\lambda t^2}{4\pi^2}e^{\sigma(k)}. \qquad (7)$$

Разобьем теперь отрезок $[-\pi,\pi]$ на две части: первую $T_{0k}=\{t:|t|\leqslant e^{-\frac{3}{8}\sigma(k)}\}$ и вторую $T_{1k}=[-\pi,\pi]\setminus T_{0k}$.

В силу оценки (7) получаем

$$I_{1k}=\left|\int_{T_{1k}}R(t,k)\,dt\right|\leqslant 2\pi\exp\left\{-\frac{3\lambda}{4\pi^2}e^{\frac{1}{4}\sigma(k)}\right\}. \qquad (8)$$

Далее заметим, что при $t\in T_{0k}$ выполняется

$$\operatorname{Re}\ln R(t,k)\geqslant-\frac{\lambda e^{\sigma(k)}t^2}{4}. \qquad (9)$$

Из вида функции $\operatorname{Im}\ln R(t, k)$ следует: $(\operatorname{Im}\ln R(t, k))^{(p)}|_{t=0}=0$, $p=0$, 2. Но в силу равенства (6) и первые производные в нуле этих функций равны нулю. Поскольку при $t\in T_{0k}$ выполняется неравенство

$$|(\operatorname{Im}\ln R(t, k))^{(3)}|\leqslant c_5\,e^{\sigma(k)},$$

то из формулы Тейлора получаем, что при $t\in T_{0k}$

$$|\operatorname{Im}\ln R(t,k)|\leqslant c_6\,e^{-\frac{1}{8}\sigma(k)}. \qquad (10)$$

Так как $\sigma(k)$ для $k=\left[\frac{\lambda}{2\alpha}\sqrt{n}\right]+1,\ldots,n$ неограниченно растут с ростом n, то найдется постоянная c_7, что для $n\geqslant c_7$ с учетом соотношений (9) и (10) будет выполняться цепочка неравенств

$$I_{0k}=\int_{T_{0k}}R(t,k)\,dt=\int_{T_{0k}}\exp\{\operatorname{Re}\ln R(t,k)\}\times$$

$$\times\cos\{\operatorname{Im}\ln R(t,k)\}\,dt\geqslant c_8\int_{T_{0k}}\exp\left(-\frac{\lambda e^{\sigma(k)}}{4}t^2\right)dt=$$

$$=c_8\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,e^{-\frac{\sigma(k)}{2}}\int\limits_{|t|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\lambda}}e^{\frac{1}{8}\sigma(k)}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\geqslant c_9\,e^{-\frac{\sigma(k)}{2}}. \qquad (11)$$

Сравнивая неравенства (8) и (11), видим, что для некоторой постоянной $c_{10} \geqslant c_7$ и $n \geqslant c_{10}$ выполняется оценка

$$|c_{1k}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2\pi} \exp\{\ln \psi_{1n}(-i\sigma(k)) - k\sigma(k)\} (I_{0k} - I_{1k}) > 0,$$

для $k = \left[\frac{\lambda}{2\alpha}\sqrt{n}\right] + 1, \ldots, n$, которая и дает утверждение леммы 2.

Перейдем к доказательству левой части соотношения (3). По лемме 2 коэффициенты Фурье функции $\psi_{1n}(t)$ $(n \geqslant c_4)$ $c_{1k}^{(n)} > 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Учитывая лемму 1, получаем, что для $\Delta_{jn} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_{jk}^{(n)}$, $n \geqslant 2\lambda$, справедлива оценка

$$|\Delta_{jn}| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} | c_{jk}^{(n)}| \leqslant c_3 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{k}{2}} \leqslant 2c_3 \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{n+1}{2}}. \tag{12}$$

Поэтому $c_{10}^{(n)} + \Delta_{1n} = e^{-\frac{1}{2}\lambda + \alpha^2/n} + \Delta_{1n} > 0$ для $n \geqslant c_{11} \geqslant c_4$. Так как $\psi_{jn}(0) = 1$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{jk}^{(n)} = 1$. Рассмотрим теперь ф. р. $F_{1n}(x)$ и $F_{2n}(x)$, $n \geqslant c_{11}$, со следующими х. ф.: $\varphi(t;\, F_{1n}) = c_{10}^{(n)} + \Delta_{1n} + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{1k}^{(n)} e^{ikt}$,

$$\varphi(t; F_{2n}) = \psi_{2n}(t).$$

Для х. ф. $\varphi(t; F_{jn})$, $j = 1, 2$ выполняется равенство

$$\varphi(t;\, F_{1n})\, \varphi(t; F_{2n}) = \left\{\psi_{1n}(t) - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{1k}^{(n)} e^{ikt} + \Delta_{1n}\right\} \psi_{2n}(t) =$$

$$= \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} - \psi_{2n}(t) \left(\Delta_{1n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{1k}^{(n)} e^{ikt}\right),$$

из которого с помощью (12) получаем неравенство

$$\sup_x |(F_{1n} * F_{2n})(x) - \Pi_{\lambda,0}(x)| \leqslant |\Delta_{1n}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_{1k}^{(n)}| \leqslant 4c_3 \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$
$$\forall n \geqslant c_{11}. \tag{13}$$

Покажем теперь, что для любой ф. р. $G \in K_{\Pi_{\lambda,0}}$ справедлива оценка

$$d(F_{2n}, G) > \frac{c_{12}}{n}, \ \forall n \geqslant c_{11}. \tag{14}$$

В самом деле, по теореме Д. А. Райкова ф. р. $G \in K_{\Pi_{\lambda,0}}$ имеет вид $\Pi_{\mu,a}$, $\mu \leqslant \lambda$, $-\infty < a < \infty$. Для $G = \Pi_{\mu,a}$, $|a| \geqslant \frac{1}{2}$, неравенство (14) очевидно выполнено. Проверим его для ф. р. $\Pi_{\mu,a}$, $\mu \leqslant \lambda$, $|a| < \frac{1}{2}$. Пусть $\mu = \frac{1}{2}\lambda + \frac{\alpha^2}{n} + \frac{\delta}{n}$, где $|\delta| \geqslant \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\lambda}$. Так как $F_{2n}(1) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha^2}{n}\right)$, то для $x \in (0, 1] \cap (a, 1 + a]$ выполняется соотношение $|\Pi_{\mu,a}(x) - F_{2n}(x)| = e^{-\frac{1}{2}\lambda - \frac{\alpha^2}{n}} \left| e^{-\frac{\delta}{n}} - 1 \right| \geqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda - \frac{\alpha^2}{n}} \left(1 - e^{-\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\lambda n}}\right) > c_{12}\frac{1}{n}$, и оценка (14) для таких μ доказана. Пусть $\mu = \frac{1}{2}\lambda + \frac{\alpha^2}{n} + \frac{\delta}{n}$, где $|\delta| < \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\lambda}$. Поскольку $F_{2n}(2) = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha^2}{n}\right)$, то для $x \in (1, 2] \cap (a + 1, a + 2]$ получаем $|\Pi_{\mu,a}(x) - F_{2n}(x)| = e^{-\frac{1}{2}\lambda - \frac{\alpha^2}{n}} \left| e^{-\frac{\delta}{n}}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{\alpha^2 + \delta}{n}\right) - \right.$

$$\left. - 1 - \frac{1}{2}\lambda \right| \geqslant e^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha^2}{n}} \left(\frac{\alpha^2 - \frac{1}{2}\lambda\delta}{n} - \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda + \alpha^2 + |\delta|}{n^2} \right) >$$

$> \frac{c_{12}}{n}$, что доказывает оценку (14).

Сравнивая оценки (13) и (14), приходим к левой части неравенства (3).

Правая часть неравенства (3) следует из такой теоремы, получающейся с помощью некоторого изменения рассуждений О. В. Шалаевского — Ю. Ю. Мачиса [7].

Теорема. *Пусть для ф. р.* F_j, $j = 1, 2$, $F = F_1 \cdot F_2$ *выполняется* $d(F, \Pi_{\lambda,0}) \leqslant \varepsilon$, *причем* $\sup_y \{y : F_1(y) \leqslant \sqrt{\varepsilon}\} = 0$.

Пусть $\lambda_j = \int\limits_0^{\left[\frac{1}{2}M\right]+1} s\,dF_j(s)$, $j = 1, 2$, *где* M *определяется из условия* $M^M = \varepsilon^{-1}$. *Тогда*

$$d(F_j, \Pi_{\lambda_j,0}) < c(\lambda)\frac{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}},$$

$c(\lambda) > 0$ — *постоянная, зависящая только от* λ.

Приведем изменения в работе [7], необходимые для получения этой теоремы.

Случайные величины $\tilde{\xi}_j$ на с. 220 [7] введем следующим образом:

$$\tilde{\xi}_j = \begin{cases} n, \text{ если } n - 3\varepsilon \leqslant \xi_j < n + 1 - 3\varepsilon, \ n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2} M\right] \\ \left[\frac{1}{2} M\right], \text{ если } \left[\frac{1}{2} M\right] - 3\varepsilon \leqslant \xi_j < \left[\frac{1}{2} M\right] + 3\varepsilon \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда все соотношения пункта 2 работы [7] останутся справедливыми при замене N на $\left[\frac{1}{2}M\right]$. В пункте 3 при определении функций $\tilde{f}(z)$ и $\tilde{f}_j(z)$ заменим N на $\left[\frac{1}{2}M\right]$ и покажем, что неравенство (23) на с. 224 [7] сохраняет силу в круге $|z| \leqslant T = (2(\lambda + 1)e^4)^{-1} M$. Для этого достаточно заметить, что

$$|\tilde{f}(z) - \exp(\lambda(z-1))| e^{\lambda T + \lambda} \to 0 \ (M \to \infty).$$

Перепишем неравенство на с. 224, 3—4 строки сверху [7] с учетом приведенных изменений:

$$|\tilde{f}(z) - e^{\lambda(z-1)}| \leqslant C\varepsilon e^{2\lambda} \left[\frac{1}{2} M\right] \sum_{n=0}^{2\left[\frac{1}{2} M\right]} T^n + C \frac{\lambda^{\left[\frac{1}{2} M\right]}}{\left[\frac{1}{2} M\right]!} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{[M]+1} \frac{(\lambda T)^n}{n!} + C \sum_{n=\left[\frac{1}{2} M\right]}^{[M]+1} \frac{(2\lambda T)^n}{n!} + \sum_{n=2\left[\frac{1}{2} M\right]}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda T)^n}{n!} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4.$$

Умножим обе части этого неравенства на $e^{\lambda T + \lambda}$ и покажем, что каждое из четырех слагаемых стремится к нулю. Действительно,

$$e^{\lambda T + \lambda} s_1 \leqslant 2CT^M \varepsilon e^{2\lambda} \left[\frac{M}{2}\right] e^{\lambda T + \lambda} \leqslant 2Ce^{3\lambda} \left[\frac{M}{2}\right] e^{-M} \to 0,$$

$$e^{\lambda T + \lambda} s_2 \leqslant \frac{\lambda^{\left[\frac{1}{2} M\right]} e^{2\lambda T + \lambda}}{\left[\frac{1}{2} M\right]!} \to 0,$$

$$e^{\lambda T + \lambda} s_3 \leqslant C \sum_{n=\left[\frac{1}{2} M\right]}^{[M]+1} \exp\{n(\ln(2\lambda T) + 1 - \ln n) + \lambda T + \lambda\} \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{\lambda} \sum_{n=\left[\frac{1}{2} M\right]}^{[M]+1} \exp(-n) \to 0,$$

$$e^{\lambda T + \lambda} s_4 \leqslant \sum_{n=2\left[\frac{1}{2} M\right]}^{\infty} \exp(-n) \to 0.$$

Изменение рассуждений на с. 225—227 [7] связано только с заменой в соотношениях N на $\left[\frac{1}{2} M\right]$.

Выражаю глубокую благодарность И. В. Островскому и А. Е. Фрынтову за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. К вопросу об устойчивости разложения нормального закона на компоненты. — «Теория вероятностей и ее применения», 1968, т. 13, № 4, с. 738—742.
2. Сапогов Н. А. Проблема устойчивости для теоремы Г. Крамера. — Изд-во АН СССР, сер. матем., 1951, т. 15, № 3, с. 205—218.
3. Сапогов Н. А. О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенной приближенно нормально. — «Вестник ЛГУ», 1959, № 19, с. 78—105.
4. Малошевский С. Г. Неулучшаемость результата Н. А. Сапогова в проблеме устойчивости теоремы Г. Крамера. — «Теория вероятностей и ее применения», 1968, т. 13, № 3, с. 522—525.
5. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 478 с.
6. Шалаевский О. В. Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова. — «Вестник ЛГУ», 1959, № 7, с. 41—49.
7. Мачис Ю. Ю. Оценки в теореме об устойчивости разложений распределения Пуассона. — «Теория вероятностей и ее применения», 1971, т. 16, № 2, с. 218—227.
8. Мачис Ю. Ю. Об устойчивости разложений двухточечного закона распределения. — «Лит. мат. сб.», 1973, т. 13, № 4, с. 131—138.
9. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I — «Теория вероятностей и ее применения», 1958, т. 3, № 1, с. 3—40.