УДК 517.946

И. И. АНТЫПКО, В. М. БОРОК

КРИТЕРИЙ БЕЗУСЛОВНОЙ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛОЕ

Исследованию краевой задачи в бесконечном слое посвящено большое число работ [1—6 и др.]. Вопрос о единственности решения этой задачи в общей постановке исследован в [6]. Безусловно корректные задачи в рамках теории краевой задачи в слое занимают место, аналогичное месту гиперболических систем в теории задачи Коши. Целью настоящей статьи является установление необходимого и достаточного условия безусловной корректности краевой задачи при общих краевых условиях.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t); \tag{1}$$

$$u(x,t)=\{u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)\},\ x\in R^m,$$

$t\in[0,T]$, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица, элементами которой являются полиномы от $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}$ с постоянными коэффициентами.

К системе (1) присоединим краевые условия

$$\int_0^T dM(\tau)[B(x,\tau)*u(x,\tau)]=F(x). \tag{2}$$

Здесь $M(\tau)=(m_{kj}(\tau))_{k,j=1}^n$, $m_{kj}(\tau)$ — комплекснозначные функции ограниченной вариации на $[0,T]$;
$B(x,\tau)=(b_{kj}(x,\tau))_{k,j=1}^n$, b_{kj}, $b_{kj}(x,\tau)$ — обобщенные функции, непрерывно зависящие от параметра τ в топологии K' [7], сосредоточенные в ограниченной области, одной и той же для всех τ из $[0,T]$; $F(x)=\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$ — заданная вектор-функция; $*$ — знак свертки.

Краевая задача (1)—(2) называется безусловно корректной, если существует такое число l, что для любой краевой функции $F(x)$, обладающей непрерывными производными до порядка l, задача имеет одно и только одно решение $u(x,t)$, и это решение непрерывно зависит от функции $F(x)$ в следующем смысле: если последовательность $\{F_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ при $k \to \infty$ стремится к нулю равномерно на любом компакте в R^m вместе со всеми своими производными до порядка l, то соответствующая последовательность решений $\{u_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$ при каждом $t \in [0, T]$ также равномерно на любом компакте в R^m стремится к нулю при $k \to \infty$.

Теорема. *Краевая задача (1)—(2) безусловно корректна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) при каждом $t \in [0, T]$ существуют постоянные $C_k > 0$, $k=1, 2, 3$, и $\alpha>0$ такие, что

$$\|\exp\{tP(is)\}\| \leqslant C_1 \exp\{C_2\|s\|\}, \quad s \in C^m, \tag{3}$$

$$\|\exp\{tP(i\sigma)\}\| \leqslant C_3(1+\|\sigma\|)^{\alpha}, \quad \sigma \in R^m; \tag{4}$$

б) определитель матрицы

$$G(s) = \int_0^T dM(\tau)[B(-s, \tau)\exp\{tP(-is)\}$$

не обращается в нуль ни при одном $s \in C^m$.

Отметим, что условие *а* теоремы означает гиперболичность системы (1) [8]; задачи (1)—(2), удовлетворяющие условию *б*, мы называем задачами бесконечного типа [6].

Доказательство теоремы

Необходимость. Пусть краевая задача (1)—(2) безусловно корректна. Тогда условие *б* теоремы выполнено, так как в противном случае единственность решения задачи нарушается в классе функций, растущих при $\|x\| \to \infty$ не быстрее $\exp\{C\|x\|\}$ при некотором $C>0$ [6].

Докажем справедливость условия *а*. Введем в рассмотрение матрицу

$$Q(s, t) = \exp\{tP(is)\} \cdot G^{-1}(-s).$$

Нетрудно показать, что преобразование Фурье $\widetilde{u(x, t)}$ решения $u(x, t)$ краевой задачи (1)—(2) имеет вид

$$\widetilde{u(x, t)} = Q(s, t) \cdot \widetilde{F(x)}. \tag{5}$$

Покажем, что для матрицы $Q(s, t)$ выполнено условие типа (4). Предположим противное. Тогда для некоторого элемента $Q_{pr}(s, t)$ этой матрицы при некотором $t_0 \in [0, T]$ для любого натурального k найдется $\sigma_k \in R^m$, такое, что

$$|Q_{pr}(\sigma_k, t_0)| \geqslant k(1+\|\sigma_k\|)^k. \tag{6}$$

Выберем последовательность $F_k(x)$ краевых функций следующим образом: $F_k(x) = \{f_{1k}(x), \ldots, f_{nk}(x)\}$,
причем
$$f_{kr}(x) = \varepsilon_k \exp\{i(\sigma_k, x)\},$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k(1+\|\sigma_k\|)}, \quad f_{jk}(x) \equiv 0 \text{ при } j \neq r.$$

Ясно, что последовательность функций $F_k(x)$ и их производные, имеющие порядок не выше любого фиксированного числа l, при $k \to \infty$ стремятся к нулю равномерно на любом компакте в R^m.

Решение $u_k(x, t)$ задачи (1)—(2), соответствующее краевой функции $F_k(x)$, можно записать в виде

$$u_k(x, t) = Q(\sigma_k, t) \cdot F_k(x).$$

Но тогда в силу (6) при $t = t_0$

$$\|u_k(x, t_0)\| = \|Q(\sigma_k, t_0) \cdot F_k(x)\| \geqslant 1,$$

что противоречит безусловной корректности задачи.

Из доказанного следует, что функции $Q_{pr}(s, t)$ (элементы матрицы $Q(s, t)$) можно рассматривать как обобщенные функции над основным пространством S[9] при каждом фиксированном $t > 0$.

Покажем, что для $Q(s, t)$ выполнено также условие типа (3). Представим $Q_{pr}(s, t)$ в виде

$$Q_{pr}(s,t) = \widetilde{G_{pr}(x, t)}, \tag{7}$$

где $G_{pr}(x, t) \in S'$, покажем, что $G_{pr}(x, t)$ — финитные функционалы. Предположим противное. Тогда хотя бы один из функционалов $G_{pr}(x, t)$, скажем, $G_{p_0r_0}(x, t)$, при некотором $t_0 \in [0, T]$ не является финитным, т. е. существует последовательность x_k, $\|x_k\| \to \infty$, такая, что $x_k \in \operatorname{supp} G_{p_0r_0}(x, t_0)$.

Построим последовательность функций $\Psi_k(x)$ следующим образом:

1) каждая функция $\Psi_k(x) \in C_0^\infty(R^m)$;

2) $\operatorname{supp} \Psi_k(x)$ содержится внутри единичного шара с центром в точке x_k;

3) $(G_{p_0r_0}(x, t_0), \Psi_k(x)) = 1$. (8)

Обозначим $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Psi_k(x)$, $\Phi_j(x) = \sum\limits_{k=j+1}^{\infty} \Psi_k(x)$.

Функции $\Phi_j(x)$ обладают производными любого порядка и вместе с производными при $j \to \infty$ стремятся к нулю равномерно на любом компакте в R^m (ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} D^{(q)} \Psi_k(x)$ при каждом q сходится равномерно на любом компакте в R^m).

Пусть $u_j(x, t)$ — решение задачи (1) — (2) при краевой функции $F_j(x) = \{f_{1j}(x), \ldots, f_{nj}(x)\}$, где $f_{r_0j}(x) = \Phi_j(x)$, $f_{rj}(x) \equiv 0$ при $r \neq r_0$; $u_k^0(x, t)$ — решение задачи при краевой функции $F_k^0(x) = \{f_{1k}(x), \ldots, f_{nk}(x)\}$, где $f_{r_0k}(x) = \Psi_k(x)$, $f_{rk}(x) \equiv 0$ при $r \neq r_0$; $u(x, t)$ — решение задачи при краевой функции $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, где $f_{r_0} = \Phi(x)$, $f_r(x) \equiv 0$ при $r \neq r_0$. Тогда

$$u_j(x,t)=u(x,t)-\sum_{k=1}^{j}u_k^0(x,t)$$

при каждом $t\in[0,T]$ равномерно на любом компакте в R^m стремится к нулю при $j\to\infty$.

Для компоненты с номером p_0 вектор-функции $u_k^0(x,t)$ в силу (5) имеем

$$u_{p_0k}^0(x,t)=G_{p_0r_0}(x,t)*\Psi_k(x).$$

Но тогда в силу (8)

$$u_{p_0k}^0(0,t_0)=(G_{p_0r_0}(x,t_0),\ \Psi_k(x))=1$$

и, следовательно, $\|u_j(0,t_0)\|\to\infty$ при $j\to\infty$, что невозможно.

Из финитности $G_{pr}(x,t)$ по x следует, что $Q_{pr}(s,t)$ — целые функции s не выше первого порядка роста [9]. Итак, матрица $Q(s,t)$ удовлетворяет условию типа (3).

Покажем теперь, что условия (3)—(4) выполнены также для матрицы $\exp\{tP(is)\}$.

Условия типа (3)—(4) выполнены для матрицы $G^{-1}(-s)=$ $=Q(s,0)$. Определитель матрицы $G(s)$, как мы показали, не обращается в нуль ни при одном $s\in C^m$, поэтому $\det G(-s)=\exp\{A(s)\}$, где $A(s)$ — некоторый полином. Тогда

$$\det G^{-1}(-s)=\det Q(s,0)=\exp\{-A(s)\}$$

также удовлетворяет условиям типа (3) — (4), откуда следует, что полином $-A(s)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k s_k+\gamma_0$, причем $\operatorname{Re}\gamma_k=0$, $k=1,\dots,m$.

Но тогда и $\det G(-s)$, а значит, и матрица $G(-s)$ удовлетворяет условиям типа (3) — (4). Следовательно, матрица

$$\exp\{tP(is)\}=Q(s,t)\cdot G(-s)$$

удовлетворяет условиям (3)—(4). Выполнение условия *а* для безусловной корректности краевой задачи (1)—(2) доказано.

Достаточность. Покажем сначала, что матрица $Q(s,t)$ удовлетворяет условиям типа (3)—(4). Действительно, матрица $G(-s)$ удовлетворяет условиям типа (3)—(4), что вытекает из выполнения *а* и свойств преобразования Фурье финитной обобщенной функции. Этим же условиям удовлетворяет и определитель матрицы $G(-s)$. Тогда в силу условия *б*

$$\det G(-s)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\gamma_k s_k+\gamma_0\right\},\ \operatorname{Re}\gamma_k=0$$

и, следовательно, условиям типа (3) — (4) удовлетворяет $\det G^{-1}(-s)$ и сама матрица $G^{-1}(-s)$, а значит, и матрица $Q(s,t)$.

Таким образом, элементы $Q_{pr}(s, t)$ матрицы $Q(s, t)$ при каждом $t \in [0, T]$ являются целыми функциями s порядка роста не выше первого, возрастающими при $s = \sigma \in R^m$ не быстрее полинома. Поэтому в силу (7) $G_{pr}(x, t)$ — финитные функционалы (по x) [9].

Обозначим $G(x, t)$ матрицу с элементами $G_{pr}(x, t)$. Тогда в силу (5) функция

$$u(x, t) = G(x, t) * F(x) \tag{9}$$

является решением краевой задачи (1)—(2).

Из результатов [6] можно лишь утверждать, что рассматриваемая задача имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих при каких-либо $C > 0$, $C_1 > 0$ и $\alpha > 0$ оценке

$$\|u(x, t)\| \leqslant C \exp\{C_1 \|x\|^{\alpha}\}.$$

Однако, используя схему [6] и рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых проводится исследование задачи Коши для гиперболических систем [8], мы ниже покажем, что задача (1)—(2) (при условиях *а* и *б*) имеет единственное решение в классе всех функций без ограничений роста на бесконечности.

Предложенная в [6] модификация принципа Гольмгрена состоит в том, что единственность решения задачи (1)—(2) в пространстве E' (E — банахово пространство) имеет место, если разрешима «сопряженная задача» из линейного топологического пространства Φ в более широкое пространство F, $\Phi \subset F \subset E$, включения плотны; при этом «сопряженная задача» имеет вид

$$\frac{\partial v(x, t, \eta)}{\partial t} - P^*\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, t, \eta) = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} v(x, \eta, \eta) - \displaystyle\int_0^{\eta} P^*\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, \xi, \xi)\, d\xi = \left[\displaystyle\int_0^{\eta} B^*(-x, \eta)\, dM^*(\eta)\right] * v(x); \\ \displaystyle\int_0^{T} dv(x, t_0, \eta) = \varphi(x) \end{cases} \tag{11}$$

(разрешимость ее из Φ в F означает, что для любой $\varphi(x) \in \Phi$ существует решение $v(x, t, \eta) \in F$, $v(x) \in F$). Здесь A^* — матрица, сопряженная матрице A; $\eta \in [0, T]$; $t_0 \in [0, T]$; $\varphi(x)$ — заданная функция. Преобразование Фурье решения задачи (10)—(11) имеет вид

$$\widetilde{v(x, t, \eta)} = \exp\{(t - \eta) \cdot P^*(-is)\} \cdot N(s, \eta) \cdot \widetilde{v(x)},$$

$$\widetilde{v(x)} = Q^*(-s, t) \cdot \widetilde{\varphi(x)},$$

где

$$N(s, \eta) = R(s, \eta) + P^*(-is) \int_0^{\eta} e^{(\eta - \tau) P^*(-is)} R(s, \tau)\, d\tau, \tag{12}$$

$$R(s, \eta) = \int_0^\eta B^*(-s, \tau)\, dM^*(\tau).$$

Из (12) видно, что матрица $N(s, t)$ удовлетворяет оценкам вида (3)—(4). Тогда для матриц $Q^*(-s, t)$, $N(s, t)$, $\exp\{(t-\eta)P^*(-is)\}$ имеют место разделенные оценки типа

$$\|\cdot\| \leqslant C(1 + \|Res\|)^\alpha \exp\{b\|Ims\|\}$$

с некоторыми $C>0$, $\alpha>0$, $b>0$ [9]. А это означает, что указанные матрицы являются мультипликаторами в пространстве $S^0 = \bigcup S^{0,B}$ целых аналитических функций $g(s)$, удовлетворяющих оценке

$$|s_1^{k_1} \ldots, s_m^{k_m} g(s)| < C_k \exp\{b\|Ims\|\},$$

$$k = k_1 + \ldots + k_m,$$

и переводят пространство S^0 в себя [9].

Выберем $\tilde{\Phi} = \tilde{F} = S^0$. Тогда $\Phi = F = S_0$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций. В качестве F возьмем пространство функций $e(x)$ с нормой

$$\|e(x)\| = \int_{R^m} |e(x)|,\ \varepsilon(x)\, dx < \infty,$$

где $\varepsilon(x)$ — любая положительная функция. В силу произвольности $\varepsilon(x)>0$ получаем, что единственность решения задачи (1)—(2) имеет место в классе всех функций без ограничений роста на бесконечности.

Непрерывная зависимость решения $u(x, t)$ от краевой функции $F(x)$ следует, в силу (9), из финитности функционалов $G_{pr}(x, t)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений. — «Мат. сб.», 1969, т. 79 (121), с. 293—304.
2. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1971, т. 35, № 1, с. 185—201.
3. Борок В. М. О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1971, т. 35, № 4, с. 922—939.
4. Антыпко И. И. и Перельман М. А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16, Харьков, 1972, с. 98—109.
5. Антыпко И. И. Безусловно корректные краевые задачи в бесконечном слое. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 18, Харьков, 1973, с. 190—196.
6. Виленц И. Л. Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. — «Докл. АН УССР. Сер. А», 1974, т. 3, с. 195—197.

7. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. (Обобщенные функции, вып. 1), М., Физматгиз, 1958. 16 с.
8. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. (Обобщенные функции, вып. 3), М., Физматгиз, 1958, 149 с.
9. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. (Обобщенные функции, вып. 2), М., Физматгиз, 1958, с. 108, 192, 195, 256—258, 261.

Поступила 17 июня 1974 г.