УДК 517.535.4

М. Н. Шеремета, канд. физ.-мат. наук

О k-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. II

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [1]. Нумерация параграфов продолжается.

5. Теоремы о ядре и оболочке

Теорема 5.1. *Пусть последовательность* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ *такая, что* $d_k^{(1)}(1) \geqslant \Delta_k$, *а последовательность* $\{\lambda_n^{(2)}\}$ *такая, что* $D_k^{(2)}(1) \leqslant \Delta_k$, *причем* $\{\lambda_n^{(2)}\}$ *является последовательностью последовательности* $\{\lambda_n^{(1)}\}$. *Тогда существует k-логарифмически измеримая последовательность* $\{\lambda_n\}$ *с k-логарифмической плотностью* Δ_k, *которая удовлетворяет условию*

$$\{\lambda_n^{(2)}\} \subset \{\lambda_n\} \subset \{\lambda_n^{(1)}\}.$$

Доказательство. Мы будем пользоваться методом Пойа [2], модифицируя его. По условию теоремы

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{L_k^{*(2)}(t;\ \xi)}{(1-\xi)\ln_k t}=D_k^{(2)}(\xi)\leqslant D_k^{(2)}(1)\leqslant\Delta_k\leqslant$$

$$\leqslant d_k^{(1)}(1)\leqslant d_k^{(1)}(\xi)=\varliminf_{t\to\infty}\frac{L_k^{*(1)}(t;\ \xi)}{(1-\xi)\ln_k t}$$

для всех $\xi\in[0,\ 1)$. Ввиду того, что $l_k\left(l_k\left(t;\ \frac{1}{\xi}\right);\ \xi\right)=t$, из последних неравенств при $\xi\neq 0$ получаем

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{L_k^{(2)}\left(l_k\left(t;\ \frac{1}{\xi}\right)\right)-L_k^{(2)}(t)}{(1-\xi)\ln_k l_k\left(t;\ \frac{1}{\xi}\right)}\leqslant\Delta_k\leqslant$$

$$\leqslant\varliminf_{t\to\infty}\frac{L_k^{(1)}\left(l_k\left(t;\ \frac{1}{\xi}\right)\right)-L_k^{(1)}(t)}{(1-\xi)\ln_k l_k\left(t;\ \frac{1}{\xi}\right)}.$$

Заменяя в последних неравенствах ξ на $\frac{\nu}{\nu+1}$, где ν — натуральное число, получаем

$$L_k^{(2)}\left(l_k\left(t;\ \frac{\nu+1}{\nu}\right)\right)-L_k^{(2)}(t)\leqslant\left(\Delta_k+\frac{1}{\nu}\right)\frac{\ln_k t}{\nu},\tag{5.1}$$

$$L_k^{(1)}\left(l_k\left(t;\ \frac{\nu+1}{\nu}\right)\right)-L_k^{(1)}(t)\geqslant\left(\Delta_k-\frac{1}{\nu}\right)\frac{\ln_k t}{\nu}\tag{5.2}$$

для всех $t\geqslant t_\nu\geqslant t_k^*=\exp_k\{0\}$.

Пусть $m_1>0$ — наименьшее число, такое, что $2^{m_1}\geqslant t_1$; $m_2>0$ — наименьшее натуральное число, такое, что $m_2>m_1$ и $2^{m_2}>t_2$. Если $m_1,\ m_2,\ldots,\ m_{\nu-1},\ \nu-1\geqslant 2$ уже выбрали, то $m_\nu>0$ — наименьшее целое число, для которого

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3}\left(\frac{4}{3}\right)^{m_4}\cdots\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{m_\nu}\geqslant t_\nu\tag{5.3}$$

и

$$m_\nu\geqslant\nu.\tag{5.4}$$

Рассмотрим последовательность чисел

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{m_1},\ \left(\frac{2}{1}\right)^{m_1+1},\ldots,\left(\frac{2}{1}\right)^{m_2},\ \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1},\ \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2},\ldots,$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3},\ \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3}\left(\frac{4}{3}\right)^{1},\ldots,$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3}\left(\frac{4}{3}\right)^{m_4},\ \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3}\left(\frac{4}{3}\right)^{m_4}\left(\frac{5}{4}\right)^{1},\ldots.$$

Обозначим эти числа через $Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_n, \ldots$, т. е.

$$Q_1 = \left(\frac{2}{1}\right)^{m_1},\quad Q_2 = \left(\frac{2}{1}\right)^{m_1+1}, \ldots,\ Q_{m_2-m_1} = \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2-1}$$

и для $n > m_2 - m_1$

$$Q_n = \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3} \cdots \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{m_\nu}\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\mu}, \tag{5.5}$$

где

$$0 \leqslant \mu < m_{\nu+1},\quad n = -(m_1 - 1) + m_2 + m_3 + \ldots + m_\nu + \mu. \tag{5.6}$$

Пусть

$$P_n = \exp_k \{Q_n\}. \tag{5.7}$$

Легко видеть, что

$$t_k^* < P_1 < P_2 < \ldots < P_n < \ldots, \tag{5.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln_k P_{n+1}}{\ln_k P_n} = 1, \tag{5.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\ln_k P_{n+1} - \ln_k P_n) = \infty. \tag{5.10}$$

Действительно, (5.8) и (5.9) следуют непосредственно из (5.5) и (5.7), а используя (5.4), имеем

$$\ln_k P_{n+1} - \ln_k P_n = Q_{n+1} - Q_n = Q_n\left(\frac{Q_{n+1}}{Q_n} - 1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{1}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdots \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu}\left(\frac{\nu+1}{\nu} - 1\right) = \frac{\nu^\nu}{\nu!} \to \infty$$

при $\nu \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Далее, ввиду (5.2), (5.5) и (5.7) имеем

$$L_k^{(1)}(P_{n+1}) - L_k^{(1)}(P_n) = L_k^{(1)}(\exp_k \{Q_{n+1}\}) - L_k^{(1)}(P_n) =$$

$$= L_k^{(1)}\left(\exp_k\left\{\frac{\nu+1}{\nu} Q_n\right\}\right) - L_k^{(1)}(P_n) =$$

$$= L_k^{(1)}\left(l_k\left(P_n;\ \frac{\nu+1}{\nu}\right)\right) - L_k^{(1)}(P_n) >$$

$$> \left(\Delta_k - \frac{1}{\nu}\right)\frac{\ln_k P_n}{\nu} =$$

$$= \left(\Delta_k - \frac{\ln_k P_{n+1} - \ln_k P_n}{\ln_k P_n}\right)(\ln_k P_{n+1} - \ln_k P_n). \tag{5.11}$$

Аналогично,

$$L_k^{(2)}(P_{n+1}) - L_k^{(2)}(P_n) <$$

$$< \left(\Delta_k + \frac{\ln_k P_{n+1} - \ln_k P_n}{\ln_k P_n}\right)(\ln_k P_{n+1} - \ln_k P_n). \tag{5.12}$$

Из (5.11) и (5.12) соответственно получаем

$$\sum_{P_n<\lambda_m^{(1)}\leqslant P_{n+1}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\ln_j\lambda_m^{(1)}}>$$

$$>\left(\Delta_k-\frac{\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n}{\ln_k P_n}\right)(\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n),\tag{5.13}$$

$$\sum_{P_n<\lambda_m^{(2)}\leqslant P_{n+1}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\ln_j\lambda_m^{(2)}}<$$

$$<\left(\Delta_k+\frac{\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n}{\ln_k P_n}\right)(\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n).\tag{5.14}$$

Пусть $\{\lambda_n^{(3)}\}$ — последовательность тех элементов последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$, которые не являются членами последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$, т. е. $\{\lambda_n^{(1)}\}=\{\lambda_n^{(2)}\}\cup\{\lambda_n^{(3)}\}$. К последовательности $\{\lambda_n\}$ в первую очередь относятся все члены последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$, т. е. мы относим к $\{\lambda_n\}$ столько членов последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$, чтобы выполнялось (5.12) или (5.14). Из последовательности $\{\lambda_n^{(3)}\}$ отнесем к последовательности $\{\lambda_n\}$ в промежутке $P_n<x\leqslant P_{n+1}$ столько членов, чтобы

$$\left(\Delta_k+\frac{\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n}{\ln_k P_n}\right)(\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n)+$$

$$+b>\sum_{P_n<\lambda_m\leqslant P_{n+1}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\ln_j\lambda_m}=L_k(P_{n+1})-L_k(P_n)>\tag{5.15}$$

$$>\left(\Delta_k-\frac{\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n}{\ln_k P_n}\right)(\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n)-a,$$

где a, b — некоторые положительные постоянные величины. Из (5.15) следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_k(P_{n+1})-L_k(P_n)}{\ln_k P_{n+1}-\ln_k P_n}=\Delta_k,$$

откуда по теореме Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_k(P_n)}{\ln_k P_n}=\Delta_k.\tag{5.16}$$

Пусть теперь $P_n<t\leqslant P_{n+1}$. Тогда

$$\frac{L_k(P_n)}{\ln_k P_n}\,\frac{\ln_k P_n}{\ln_k P_{n+1}}\leqslant\frac{L_k(t)}{\ln_k t}\leqslant\frac{L_k(P_{n+1})}{\ln_k P_{n+1}}\,\frac{\ln_k P_{n+1}}{\ln_k P_n},$$

откуда, ввиду (5.9) и (5.16), получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L_k(t)}{\ln_k t}=\Delta_k.$$

Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Пусть последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию* (1) *и имеет максимальную k-логарифмическую плотность* D_k (1). *Пусть интервалы* $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ *разбиты на интервалы первого и второго сорта. Тогда существует k-логарифмически измеримая последовательность* $\{\rho_m\}$ *со следующими свойствами:*

1) $\rho_i > \lambda_1$; *каждый интервал* $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ *первого сорта содержит четное, а каждый интервал* $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ *второго сорта — нечетное число членов последовательности* $\{\rho_m\}$;

2) *существует число* $l>0$, *для которого* $\rho_{m+1}-\rho_m \geqslant l$, $|\rho_m - \lambda_n| \geqslant l$ *для всех натуральных m и n*;

3) *k*-логарифмическая плотность последовательности $\{\rho_m\}$ *равна* D_k (1).

Доказательство. Пусть $l=\frac{p}{4}$. Тогда во всех интервалах первого сорта строим точку λ_n+l, построенные точки обозначим через $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_n', \ldots$ Ясно, что последовательность $\{\mu_n'\}$ имеет максимальную k-логарифмическую плотность $D_k'(1) \leqslant D_k(1)$. Во всех интервалах $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ строим точки

$$\lambda_n+l,\ \lambda_n+2l, \ldots, \lambda_n+Ml,$$

где M в интервалах первого сорта означает наибольшее нечетное число, а в интервалах второго сорта — наибольшее четное число, для которого справедливо неравенство $\lambda_n+Ml<\lambda_{n+1}-l$, значит, $M \geqslant 2$. Так построенные точки обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ Последовательность $\{\mu_n\}$ содержит последовательность $\{\mu_n'\}$. Члены последовательности $\{\mu_n\}$, не принадлежащие к последовательности $\{\mu_n'\}$ образуют новую последовательность $\{\mu_n''\}$. За построением последовательность $\{\mu_n''\}$ в каждом интервале $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ имеет четное число членов: пара μ_{2m-1}'' и μ_{2m}'' принадлежит одному и тому же интервалу $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$.

Как показал Пойа [2], минимальная плотность таким образом построенной последовательности $\{\mu_n\}$ не меньше D (1). Ввиду неравенств (3.4) и минимальная k-логарифмическая плотность $d_k^*(1)$ последовательности $\{\mu_n\}$ удовлетворяет неравенству $d_k^*(1) \geqslant D_k(1)$.

Пусть $\{\rho_n\}$ — некоторая последовательность, содержащая $\{\mu_n'\}$ и содержащаяся в $\{\mu_n\}$, а члены последовательности $\{\mu_n''\}$ содержатся в $\{\rho_n\}$ попарно, т. е. или оба члена μ_{2m-1}'' и μ_{2m}'' принадлежат к $\{\rho_n\}$, или же ни один из них не принадлежит к $\{\rho_n\}$. Ясно, что построенная последовательность $\{\rho_n\}$ удовлетворяет условиям *1* и *2* теоремы 5.2. Минимальная k-логарифмическая плотность последовательности $\{\mu_n\}$ равна $d_k^*(1) > D_k(1)$, а максимальная k-логарифмическая плотность последовательности $\{\mu_n'\} \subset \{\mu_n\}$ равна $D_k''(1) \leqslant D_k(1)$, а значит, по теореме 5.1 можно $\{\rho_n\}$ так построить, что условие *3* теоремы 5.2 будет выполняться. Парный выбор из последовательности $\{\mu_n''\}$ возможен при соблюдении пределов в (5.15) с

$$a = b = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln_j t_k^*}, \quad t_k^* = \exp_k\{0\}.$$

Теорема 5.3. *Каждая последовательность $\{\lambda_n\}$ с минимальной k-логарифмической плотностью $d_k(1)$ и максимальной k-логарифмической плотностью $D_k(1)$ содержит частичную последовательность $\{\lambda_n^{(2)}\}$ с максимальной k-логарифмической плотностью $D_k^{(2)}(1) \leqslant d_k(1)$ и содержится в более густой последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ с минимальной k-логарифмической плотностью $d_k^{(1)}(1) \geqslant D_k(1)$.*

Доказательство. Как показал Пойа [2], из всякой последовательности $\{\lambda_n\}$ можно выделить измеримую последовательность $\{\lambda_n^{(2)}\}$, плотность которой равна $\Delta = 0$. Ввиду следствия 2.1 эта последовательность $\{\lambda_n^{(2)}\}$ является k-логарифмически измеримой с k-логарифмической плотностью $\Delta_k = \Delta = 0$. Поэтому для этой последовательности выполняется $D_k^{(2)}(1) = \Delta_k = 0 \leqslant d_k(1)$.

Далее, по теореме 5.2 существует последовательность $\{\rho_n\}$, которая является k-логарифмически измерима с k-логарифмической плотностью $D_k(1)$. Если к этой последовательности $\{\rho_n\}$ прибавить еще члены последовательности $\{\lambda_n\}$, то получим новую последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$, минимальная k-логарифмическая плотность которой $d_k^{(1)}(1) \geqslant D_k(1)$. Теорема 5.3 доказана.

Повторяя рассуждения Пойа [2] и используя результаты теорем 5.1—5.3, легко доказать такую теорему.

Теорема 5.4. *Минимальная k-логарифмическая плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ является k-логарифмической плотностью некоторой «самой густой» ее k-логарифмически измеримой последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$, а максимальная k-логарифмическая плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ является k-логарифмической плотностью «наижидчайшей» k-логарифмически измеримой последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$, содержащей последовательность $\{\lambda_n\}$.*

6. Последовательности с нулевыми нижними k-логарифмическими плотностями

В работе [2] доказана следующая

Теорема 6.1. *Чтобы для последовательности $\{\lambda_n\}$ выполнялось равенство $d(\xi) = 0$ для некоторого ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, необходимо и* *достаточно, чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ можно было разбить на две подпоследовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, не имеющих общих членов и удовлетворяющих условиям:*

1) последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$ измерима с плотностью $\Delta^{(1)} = 0$;

2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1}^{(2)}/\lambda_n^{(2)} \geqslant \frac{1}{\xi}$.

В случае $\xi = 0$ правую часть неравенства в условии *2* следует понимать как ∞.

Если $d_k(\xi) = 0$, $k \geqslant 1$ для некоторого ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, то из неравенств (3.4) следует, что $d(0) = 0$. Поэтому из теоремы 6.1, ввиду следствия 2.1, получаем

Следствие 6.1. *Если для последовательности $\{\lambda_n\}$ имеет место равенство $d_k(\xi) = 0$, $k \geqslant 1$ для некоторого ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, то последовательность $\{\lambda_n\}$ можно разбить на две подпоследовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, не имеющих общих членов, причем последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$ есть k-логарифмически измерима с k-логарифмической плотностью $\Delta_k^{(1)} = 0$, а последовательность $\{\lambda_n^{(2)}\}$ удовлетворяет соотношению*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \lambda_{n+1}^{(2)}/\lambda_n^{(2)} = \infty.$$

Отметим, что обратное утверждение неверно. Действительно, пусть

$$n_\nu^* = [\exp_2\{\nu\}], \; n_\nu = [n_\nu^* \ln n_\nu^*], \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

где через $[a]$ обозначена целая часть числа $a > 0$. Рассмотрим последовательность

$$1, 2, \ldots, n_1^*, n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2^*, \ldots,$$

$$n_\nu^*, n_\nu, n_{\nu+1}, \ldots, n_{\nu+1}^*, \ldots$$

и обозначим эту последовательность через $\{\lambda_n\}$.

Последовательность $\{\lambda_n\}$ разобьем на две подпоследовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$ так, что последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$ совпадает с последовательностью $\{n_\nu^*\}$, а к последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ отнесены все остальные члены последовательности $\{\lambda_n\}$. Легко видеть, что последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$ измерима с плотностью $\Delta^{(1)} = 0$, а значит, и 1-логарифмически измерима с 1-логарифмической плотностью $\Delta_1^{(1)} = 0$. Для последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ выполняется

$$\varlimsup_{n\to\infty} \lambda_{n+1}^{(2)}/\lambda_n^{(2)} \geqslant \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu}{n_\nu^* - 1} = \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu^* \ln n_\nu^*}{n_\nu^*} = \infty,$$

т. е. условия, наложенные на последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, выполняются.

Далее, пусть

$$\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1} \text{ и } \lambda_n = n_\nu + \mu, \ 0 \leqslant \mu \leqslant \overset{*}{n}_{\nu+1} - n_\nu.$$

Тогда

$$L_1(t) = \sum_{\lambda_j < t} \frac{1}{\lambda_j} \geqslant \sum_{j \leqslant n} \frac{1}{\lambda_j} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n_1^*} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n_2^*} + \ldots + \frac{1}{n_\nu^*} + \frac{1}{n_\nu} + \frac{1}{n_\nu + 1} + \ldots + \frac{1}{n_\nu + \mu} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{l=1}^{n_\nu+\mu} \frac{1}{l} - \left\{ \sum_{l=n_1^*+1}^{n_1-1} \frac{1}{l} + \ldots + \sum_{l=n_\nu^*+1}^{n_\nu-1} \frac{1}{l} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \int_1^{n_n+\mu} \frac{dx}{x} - \left\{ \int_{h_1^*}^{n_1} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{n_\nu^*}^{n_\nu} \frac{dx}{x} \right\} = \ln(n_\nu + \mu) -$$

$$- \ln \frac{n_1 n_2 \ldots n_\nu}{n_1^* n_2^* \ldots n_\nu^*} = \ln(n_\nu + \mu) -$$

$$- \ln \frac{[n_1^* \ln n_1^*]\,[n_2^* \ln n_2^*] \ldots [n_\nu^* \ln n_\nu^*]}{n_1^* n_2^* \ldots n_\nu^*} \geqslant \ln(n_\nu + \mu) - \nu \ln(\ln n_\nu^* + 1) =$$

$$= \ln(n_\nu + \mu) \left\{ 1 - \frac{\nu \ln(\ln n_\nu^* + 1)}{\ln([n_\nu^* \ln n_\nu^*] + \mu} \right\} =$$

$$= \ln(n_\nu + \mu) \left\{ 1 - \frac{(1 + 0(1))(\ln \ln n_\nu^*)^2}{\ln n_\nu^*} \right\} = (1 + o(1)) \ln(n_\nu + \mu).$$

Поэтому при $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$ выполняется

$$\frac{L_1(t)}{\ln t} \geqslant \frac{(1 + o(1)) \ln(n_\nu + \mu)}{\ln \lambda_{n+1}} = \frac{(1 + o(1)) \ln(n_\nu + \mu)}{\ln(n_\nu + \mu + 1)} = 1 + 0\ (1),$$

если $\mu \neq \overset{*}{n}_{\nu+1} - n_\nu$, а если $\mu = \overset{*}{n}_{\nu+1} - n_\nu$, то

$$\frac{L_1(t)}{\ln t} \geqslant \frac{(1 + o(1)) \ln n_{\nu+1}^*}{\ln n_{\nu+1}} = \frac{(1 + o(1)) \ln n_{\nu+1}^*}{\ln [n_{\nu+1}^* \ln n_{\nu+1}^*]} = 1 + o(1).$$

Отсюда, ввиду (3.4), получаем, что $d_1(\xi) \geqslant d_1(0) \geqslant 1$ для всех ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, что и требовалось доказать.

Однако теорема 6.1 допускает следующий аналог.

Теорема 6.2. *Чтобы для последовательности $\{\lambda_n\}$ выполнялось равенство $d_k(\xi) = 0$, $k \geqslant 1$ для некоторого ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ можно было* *разбить на две подпоследовательности* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, *не имеющих общих членов и удовлетворяющих условиям:*

1) *последовательность* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ — *k-логарифмически измерима с k-логарифмической плотностью* $\Delta_k^{(1)} = 0$;

2) *для последовательности* $\{\lambda_n^{(2)}\}$ *выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln_k \lambda_{n+1}^{(2)}}{\ln_k \lambda_n^{(2)}} \geqslant \frac{1}{\xi}.$$

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{\lambda_n\}$ разбита на две подпоследовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$ с указанными в формулировке теоремы 6.2 свойствами. Тогда, ввиду условия *2*, существует последовательность $\{\lambda_{n_j}^{(2)}\}$, принадлежащая последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$, для которой

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln_k \lambda_{n_j+1}^{(2)}}{\ln_k \lambda_{n_j}^{(2)}} \geqslant \frac{1}{\xi},$$

т. е.

$$\xi \ln_k \lambda_{n_j+1}^{(2)} \geqslant (1 + \beta(n_j)) \ln_k \lambda_{n_j}^{(2)},$$

где $\beta(n_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Далее, для последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ имеем

$$d_k^{(2)}(\xi) = \varlimsup_{j\to\infty} \frac{L_k^*\left(\lambda_{n_j+1}^{(2)};\ \xi\right)}{(1-\xi)\ln_k \lambda_{n_j+1}^{(2)}} =$$

$$\doteq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(1-\xi)\ln_k \lambda_{n_j+1}^{(2)}} \sum_{l_k\left(\lambda_{n_j+1}^{(2)};\ \xi\right) < \lambda_m^{(2)} < \lambda_{n_j+1}^{(2)}} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_i \lambda_m^{(2)}} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{1}{(1-\xi)\ln_k \lambda_{n_j+1}^{(2)}} \sum_{l_k\left(\lambda_{n_j}^{(2)};\ 1+\beta(n_j)\right) < \lambda_m^{(2)} < \lambda_{n_j+1}^{(2)}} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_i \lambda_m^{(2)}}. \tag{6.1}$$

Если $\beta(n_j) \geqslant 0$, то $l_k\left(\lambda_{n_j}^{(2)};\ 1+\beta(n_j)\right) \geqslant \lambda_{n_j}^{(2)}$ и сумма σ, стоящая в правой части неравенства (6.1), равна

$$\sigma = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_i \lambda_{n_j+1}^{(2)}} = o(1) \tag{6.2}$$

при $j \to \infty$. Если $\beta(n_j) < 0$, то, как и при доказательстве леммы 1.1, получаем

$$\sigma = \sum_{l_k\left(\lambda_{n_j}^{(2)};\ 1+\beta(n_j)\right) < \lambda_m^{(2)} \leqslant \lambda_{n_j}^{(2)}} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_i \lambda_m^{(2)}} + \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_i \lambda_{n_j+1}^{(2)}} =$$

$$= \int\limits_{l_k\left(\lambda_{n_j}^{(2)};\ 1+\beta(n_j)\right)}^{\lambda_{n_j}} \frac{n(t)}{t} d \ln_k t + 0(1) \leqslant \frac{\beta(n_j)}{p} \ln_k \lambda_{n_j} + o(1). \qquad (6.3)$$

Подставляя (6.2) и (6.3) в (6.1), получаем неравенство $d_k^2(\xi) \leqslant \leqslant 0$, откуда $d_k^{(2)}(\xi) = 0$. Ввиду неравенств (4.1) для последовательности $\{\lambda_n\}$ получаем

$$d_k(\xi) \leqslant D_k^{(1)}(\xi) + d_k^{(2)}(\xi) = \Delta_k^{(1)} + d_k^{(2)}(\xi) \doteq 0.$$

Таким образом, достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость. Пусть сначала $0 < \xi < 1$. Так как $d_k(\xi) = 0$, $k \geqslant 1$, то существует последовательность $\{t_\nu\}$, $t_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$, такая, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{L_k^*(t_\nu;\ \xi)}{(1-\xi) \ln_k t_\nu} = 0. \qquad (6.4)$$

Из последовательности $\{t_\nu\}$ выберем такую подпоследовательность $\{t_\nu^*\}$, которая удовлетворяла бы условиям:

а) $\ln_k t_\nu^* \geqslant \nu \{\ln_k t_1^* + \ldots + \ln_k t_{\nu-1}^*\}$;

б) существует хотя бы один член последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющий неравенству

$$t_{\nu-1}^* < \lambda_n \leqslant l_k(t_\nu^*;\ \xi). \qquad (6.5)$$

Теперь к последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ отнесем все члены последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющие неравенству

$$l_k(t_\nu^*;\ \xi) < \lambda_n \leqslant t_\nu^*, \qquad (6.6)$$

а к последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ — все остальные члены последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пусть $t_{\nu-1}^* < t \leqslant t_\nu^*$. Тогда либо $t_{\nu-1}^* < t \leqslant l_k(t_\nu^*;\ \xi)$, либо $l_k(t_\nu^*;\ \xi) < t \leqslant t_\nu^*$.

В первом случае, когда $t^*_{\nu-1} < t \leqslant l_k(t^*_\nu;\ \xi)$, для последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$, как и при доказательстве леммы 1.1, используя условие a, получаем

$$L_k^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{\nu-2} \sum_{l_k(t^*_s;\ \xi)<\lambda_n\leqslant t^*_s} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} + \sum_{l_k(t^*_{\nu-1};\ \xi)<\lambda_n\leqslant t^*_{\nu-1}} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant \sum_{s=1}^{\nu-2} \int\limits_{l_k(t^*_s;\ \xi)}^{t^*_s} \frac{n(t)}{t} d \ln_k t + L_k^*(t^*_{\nu-1};\ \xi) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\nu-2} \frac{1}{p}(1-\xi) \ln_k t^*_s + L_k^*(t^*_{\nu-1};\ \xi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\xi}{p(\nu-1)} \ln_k t^*_{\nu-1} + L_k^*(t^*_{\nu-1};\ \xi),$$

откуда, ввиду (6.4), при $\nu \to \infty$ имеем

$$\frac{L_k^{(1)}(t)}{\ln_k t} \leqslant \frac{\frac{1-\xi}{p(\nu-1)} \ln_k t^*_{\nu-1} + L_k^*(t^*_{\nu-1};\ \xi)}{\ln_k t^*_{\nu-1}} \to 0.$$

Во втором случае, когда $l_k(t^*_\nu;\ \xi) < t \leqslant t^*_\nu$, аналогично

$$L_k^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{\nu-1} \sum_{l_k(t^*_s;\ \xi)<\lambda_n\leqslant t^*_s} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} + \sum_{l_k(t^*_\nu;\ \xi)<\lambda_n\leqslant t} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\nu-1} \int\limits_{l_k(t^*_s;\ \xi)}^{t^*_s} \frac{n(t)}{t} d \ln_k t + \sum_{l_k(t^*_\nu;\ \xi)<\lambda_n\leqslant t^*_\nu} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant \sum_{s=1}^{\nu-1} \frac{1}{p} \times$$

$$\times (1-\xi) \ln_k t^*_s + L_k^*(t^*_\nu;\ \xi) \leqslant \frac{1-\xi}{p\nu} \ln_k t^*_\nu + L_k^*(t^*_\nu;\ \xi),$$

откуда, ввиду (6.4), при $\nu \to \infty$ получаем

$$\frac{L_k^{(1)}(t)}{\ln_k t} \leqslant \frac{\frac{1-\xi}{p\nu} \ln_k t^*_\nu + L_k^*(t^*_\nu;\ \xi)}{\ln_k l_k(t^*_\nu;\ \xi)} = \frac{1-\xi}{\xi p\nu} + \frac{L_k^*(t^*_\nu;\ \xi)}{\xi \ln_k t^*_\nu} \to 0.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\Delta_k^{(1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L_k^{(1)}(t)}{\ln_k t} = 0,$$

т. е. последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$ — k-логарифмически измерима. Ее k-логарифмическая плотность $\Delta_k^{(1)} = 0$.

Далее, ввиду (6.5) и (6.6) для последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln_k \lambda_{n+1}^{(2)}}{\ln_k \lambda_n^{(2)}} \geqslant \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\ln_k t_\nu^*}{\ln_k l_k (t_\nu^*; \xi)} = \frac{1}{\xi}.$$

Пусть теперь $\xi = 0$ и $d_k(0) = 0$, $k \geqslant 1$. Тогда существует последовательность $\{t_\nu\}$, $t_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$, такая, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{L_k(t_\nu)}{\ln_k t_\nu} = 0. \tag{6.7}$$

Поэтому можно выбирать такую последовательность $\{t_\nu^*\}$ последовательности $\{t_\nu\}$, которая удовлетворяла бы условиям:

а$_1$) $\ln_k t_\nu^* \geqslant \nu^2 (\ln_k t_1^* + \ln_k t_2^* + \ldots + \ln_k t_{\nu-1}^*)$;

б$_2$) существует хотя бы один член последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющий неравенству

$$t_{\nu-1}^* < \lambda_n \leqslant l_k\left(t_\nu^*; \frac{1}{\nu}\right); \tag{6.8}$$

в) $L_k(t_\nu^*) \leqslant \frac{1}{\nu^2} \ln_k t_\nu^*$.

К последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ отнесем все члены последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющие условию

$$l_k\left(t_\nu^*; \frac{1}{\nu}\right) < \lambda_n \leqslant t_\nu^*, \tag{6.9}$$

а к последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ — все остальные члены последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пусть $t_{\nu-1}^* < t \leqslant t_\nu^*$. Тогда либо $t_{\nu-1}^* < t \leqslant l_k\left(t_\nu^*; \frac{1}{\nu}\right)$, либо $l_k\left(t_\nu^*; \frac{1}{\nu}\right) < t \leqslant t_\nu^*$. В первом случае, как и раньше, ввиду условий a_1 и b получаем

$$L_k^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{\nu-2} \sum_{l_k\left(t_s^*; \frac{1}{s}\right) < \lambda_n \leqslant t_s^*} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} +$$

$$+ \sum_{l_k\left(t_{\nu-1}^*; \frac{1}{\nu-1}\right) < \lambda_n \leqslant t_{\nu-1}^*} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\nu-2} \int\limits_{l_k\left(t_s^*;\,\frac{1}{s}\right)}^{t_s^*} \frac{n(t)}{t}\, d\ln_k t + \sum_{\lambda_n < t_{\nu-1}^*} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\nu-2} \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{s}\right) \ln_k t_s^* + L_k\left(t_{\nu-1}^*\right) \leqslant \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\nu-2} \ln_k t_s^* + L_k\left(t_{\nu-1}^*\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p(\nu-1)^2} \ln_k t_{\nu-1}^* + \frac{1}{(\nu-1)^2} \ln_k t_{\nu-1}^*.$$

Поэтому в данном случае

$$\frac{L_k^{(1)}(t)}{\ln_k t} \leqslant \frac{\frac{1}{p(\nu-1)^2} \ln_k t_{\nu-1}^* + \frac{1}{(\nu-1)^2} \ln_k t_{\nu-1}^*}{\ln_k t_{\nu-1}^*} \to 0$$

при $\nu \to \infty$. В случае, когда $l_k\left(t_\nu^*;\, \frac{1}{\nu}\right) < t \leqslant t_\nu^*$, аналогично

$$L_k^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{\nu-1} \sum_{l_k\left(t_s^*;\,\frac{1}{s}\right) < \lambda_n \leqslant t_s^*} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} +$$

$$+ \sum_{l_k\left(t_\nu^*;\,\frac{1}{\nu}\right) < \lambda_n \leqslant t} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\nu-1} \int\limits_{l_k\left(t_s^*;\,\frac{1}{s}\right)}^{t_s^*} \frac{n(t)}{t}\, d\ln_k t + \sum_{\lambda_n \leqslant t_\nu^*} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p\nu^2} \ln_k t_\nu^* + \frac{1}{\nu^2} \ln_k t_\nu^*;$$

и

$$\frac{L_k^{(1)}(1)}{\ln_k t} \leqslant \frac{\frac{1}{p\nu^2} \ln_k t_\nu^* + \frac{1}{\nu^2} \ln_k t_\nu^*}{\ln_k l_k\left(t_\nu^*;\, \frac{1}{\nu}\right)} = \frac{p+1}{p\nu} \to 0$$

при $\nu \to \infty$. Таким образом, мы доказали, что последовательность $\{\lambda_n^{(1)}\}$ — k-логарифмически измерима с k-логарифмической плотностью $\Delta_k^{(1)} = 0$. Далее, ввиду (6.8) и (6.9) имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln_k \lambda_{n+1}^{(2)}}{\ln_k \lambda_n^{(2)}} \geqslant \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{\ln_k t_\nu^*}{\ln_k l_k\left(t_\nu^*;\, \frac{1}{\nu}\right)} = \lim_{\nu\to\infty} \nu = \infty.$$

Теорема 6.2 полностью доказана.

Из теоремы 6.2, используя следствие 2.2 и неравенства (3.4), аналогично доказательству следствия 6.1 получаем

Следствие 6.2. *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *такая, что* $d_k(\xi) = 0$, $k \geqslant 1$, *для некоторого* ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, *то ее можно разбить на две подпоследовательности* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ *и* $\{\lambda_n^{(2)}\}$, *не имеющих общих членов, причем последовательность* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ — k*-логарифмически измерима с* $\Delta_k^{(1)} = 0$, *а последовательность* $\{\lambda_n^{(2)}\}$ *удовлетворяет соотношению*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln_{k-1}\lambda_{n+1}^{(2)}}{\ln_{k-1}\lambda_n^{(2)}} = \infty.$$

7. Приложение.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n} \ (a_{\lambda_n} \neq 0) \tag{7.1}$$

— целая трансцендентная функция. Нижняя, верхняя, минимальная и максимальная плотности последовательности индексов $\{\lambda_n\}$ (эта последовательность индексов удовлетворяет условию (1) с $p = 1$) соответственно называются нижней, верхней, минимальной и максимальной коэффициентными плотностями ряда (7.1). В случае, когда $\{\lambda_n\}$ измерима, ее плотность называется коэффициентной плотностью ряда (7.1). Аналогичные определения можно ввести и в случае k-логарифмических плотностей.

Целая функция (7.1) конечного порядка имеет борелевское исключительное значение A, если ее можно представить в виде

$$f(z) = A + F(z) \exp\{bz^p\},$$

где p — натуральное число, равное порядку функции $f(z)$, $b \equiv \mathrm{const}$ ($b \neq 0$, ∞), а $F(z)$ — целая функция, рост которой не превышает минимального типа порядка p.

В 1935 г. Пфлюгер и Пойа [3] показали, что если целая функция $f(z)$, представленная рядом (7.1), является функцией конечного порядка и имеет борелевское исключительное значение, то ее коэффициентная плотность равна одной из дробей вида

$$\frac{s}{p}, \ s = 1, 2, \ldots, p. \tag{7.2}$$

Из этого результата и следствий 2.1 и 3.1 вытекает, что если целая функция (7.1) конечного поряка имеет борелевское исключительное значение, то все ее k-логарифмические плотности и трансфинитная плотность равны между собой и равны одной из дробей вида (7.2). Отсюда, например, следует, что в этом случае

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{s}{p} \ln \lambda_n + o(\ln \lambda_n). \tag{7.3}$$

Равенство (7.3) уточняет результат Феера [4], который показал, что если $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} < \infty$, то функция (7.1) не имеет борелевского исключительного значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеремета М. Н. О k-логарифмической плотности последовательности и ее применении к целым функциям. — См. статью в настоящем сборнике.
2. Polya G. Untersuchungen über Lucken und Singularitaten von Potenzreihen. — «Math. Z.», 1929, vol. 29, s. 549—640.
3. Pfluger A., Polya G. On the power series of an integral function having an exceptionat value. — «Proc. Cambrigde Phil. Soc.», 1935, vol. 31, p. 153—155.
4. Fejer L. Uber die Wurzel von kleinsten asoluten Betrage einer algebreischen Gleichung. — «Math. Ann.», 1908, vol. 65, p. 413—423.