УДК 517.535.4

М. Н. Шеремета, канд. физ.-мат. наук

О k-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. I

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant p,\ n \geqslant 1. \qquad (1)$$

Обозначим через $n(t)$ число членов последовательности $\{\lambda_n\}$, для которых выполняется неравенство $\lambda_n \leqslant t$, т. е. $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$.

В хорошо известной работе Пойа[1] ввел величины

$$d(\xi) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{n(t) - n(t\xi)}{(1-\xi)t},\quad D(\xi) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{n(t) - n(t\xi)}{(1-\xi)t},$$

где $0 \leqslant \xi < 1$, которые соответственно называются нижней и верхней плотностями последовательности $\{\lambda_n\}$ по базису $\xi \in [0, 1)$, а также величины $d(0)$, $D(0)$, $d(1) = \lim\limits_{\xi\to 1} d(\xi)$, $D(1) = \lim\limits_{\xi\to 1} D(\xi)$, которые соответственно называются нижней, верхней, минимальной и максимальной плотностями последовательности $\{\lambda_n\}$. Если $d(0) = D(0) = \Delta$, то последовательность $\{\lambda_n\}$ называется измеримой, а Δ — ее плотностью.

---

[1] P o l y a G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.-«Math. Z.», 1929, vol. 29, p. 549—640.

Мы будем изучать так называемые k-логарифмические плотности последовательности $\{\lambda_n\}$. При этом будем пользоваться как результатами, так и методами Пойа.

1. Определение k-логарифмической плотности последовательности

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию (1). Через $\ln_j x$ обозначим j-ю итерацию логарифма: $\ln_0 x = x$, $\ln_1 x = \ln x$ и $\ln_j x = \ln(\ln_{j-1} x)$ при $j \geqslant 1$. Аналогично $\exp_0(x) = x$, а $\exp_j(x) = \exp(\exp_{j-1}(x))$ при $j \geqslant 1$.

Пусть

$$0 \leqslant \xi < 1, \ t \geqslant t_k = \exp_k(0). \tag{1.1}$$

Введем обозначения:

$$L_k(t) = \sum_{\lambda_n < t} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n}, \ k \geqslant 1,$$

$$l_k(t;\ \xi) = \exp_k(\xi \ln_k t),$$

$$L_k^*(t;\ \xi) = L_k(t) - L_k(l_k(t;\ \xi)).$$

Отметим, что ввиду (1.1) по определению $l_k(t;\ \xi)$ имеем

$$l_k(t;\ \xi) \geqslant l_k(t_k;\ 0) = \exp_k(0) = t_k.$$

Величины

$$d_k(\xi) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t}, \quad D_k(\xi) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t}$$

будем соответственно называть нижней и верхней k-логарифмическими плотностями последовательности $\{\lambda_n\}$ по базису $\xi \in [0,\ 1)$, а величины

$$d_k(0) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{L_k^*(t;0)}{\ln_k t} = \varliminf_{t\to\infty} \frac{L_k(t)}{\ln_k t}$$

и

$$D_k(0) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{L_k^*(t;0)}{\ln_k t} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{L_k(t)}{\ln_k t}$$

будем соответственно называть нижней и верхней k-логарифмическими плотностями. Если $d_k(0) = D_k(0) = \Delta_k$, то последовательность называется k-логарифмически измеримой, а число Δ_k — ее k-логарифмической плотностью.

Лемма 1.1. *Имеют место соотношения*

$$d_k(\xi) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{N_k(t;\ \xi)}{(1-\xi)\ln_k t}, \quad D_k(\xi) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{N_k(t;\ \xi)}{(1-\xi)\ln_k t},$$

где

$$N_k(t;\ \xi) = \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{n(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\, dx = \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{n(x)}{x}\, d \ln_k x.$$

Доказательство. По определению $L_k^*(t;\ \xi)$ имеем

$$L_k^*(t;\ \xi) = \sum_{l_k(t;\ \xi)<\lambda_n<t} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j \lambda_n} = \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\, dn(x) =$$

$$= n(x) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x} \Bigg|_{l_k(t;\ \xi)}^{t} - \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} n(x)\, d\left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\right). \tag{1.2}$$

Из условия (1) имеем, что $n(t) \leqslant \frac{t}{p}$. Поэтому

$$n(x) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x} \Bigg|_{l_k(t;\ \xi)}^{t} = \beta_k(t) - \gamma_k(t;\ \xi), \tag{1.3}$$

где

$$\beta_k(t) = \frac{n(t)}{t} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln_j t} \leqslant \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln_j t} \to 0 \tag{1.4}$$

при $t \to \infty$, а

$$\gamma_k(t;\ \xi) = \frac{n(l_k(t;\xi))}{l_k(t;\xi)} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j l_k(t;\xi)} \leqslant \frac{1}{p} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j t_k} = O(1) \tag{1.5}$$

при $t \to \infty$. Далее

$$d\left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\right) = -\prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x} \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{\ln_i x}\, dx. \tag{1.6}$$

Учитывая (1.3) — (1.6), из (1.2) получаем

$$L_k^*(t;\ \xi) = \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} n(x) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x} \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{\ln_j x} + O(1) =$$

$$= \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{n(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\, dx + \Psi_k(t;\ \xi) + O(1) =$$

$$= N_k(t;\ \xi) + \Psi_k(t;\ \xi) + O(1), \tag{1.7}$$

где

$$\Psi_k(t;\ \xi) = \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{n(x)}{x \ln x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\, dx + \ldots +$$

$$+ \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{n(x)}{x \ln x \cdot \ldots \cdot \ln_{k-1} x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant (k-1) \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{n(x)}{x^2 \ln^2 x}\, dx \leqslant \frac{k-1}{p} \int\limits_{l_k(t;\ \xi)}^{t} \frac{dx}{x \ln^2 x} =$$

$$= \frac{k-1}{p} \left\{ \frac{1}{\ln l_k(t;\ \xi)} - \frac{1}{\ln t} \right\} \leqslant \frac{k-1}{p \ln t_k} = O(1)$$

при $t \to \infty$. Таким образом, из (1.7) получаем

$$L_k^*(t;\ \xi) = N_k(t;\ \xi) + O(1),$$

откуда следует утверждение леммы 1.1

2. Свойства k-логарифмических плотностей

Теорема 2.1. *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию* (1), *то*

$$0 \leqslant d(0) \leqslant d_k(\xi) \leqslant d_k(0) \leqslant d_{k+1}(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant D_{k+1}(\xi) \leqslant D_k(0) \leqslant D_k(\xi) \leqslant D(0) \leqslant \frac{1}{p} \tag{2.1}$$

для всех ξ, $0 \leqslant \xi < 1$ *и всех* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Первое и последнее неравенства в (2.1) доказаны в работе [1]. Далее, при $\xi > 0$ из очевидного тождества

$$\frac{L_k(t)}{\ln_k t} = \frac{L_k(t) - L_k(l_k(t;\xi))}{(1-\xi)\ln_k t}(1-\xi) + \frac{L_k(l_k(t;\xi))}{\xi \ln_k t}\,\xi$$

ввиду определения $L_k^*(t;\ \xi)$ и равенства $\xi \ln_k t = \ln_k l_k(t;\ \xi)$ имеем

$$\frac{L_k^*(t;0)}{\ln_k t} = \frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t}(1-\xi) + \frac{L_k^*(l_k(t;\ \xi);\ 0)}{\ln_k l_k(t;\xi)}\,\xi +$$

$$+ \xi\, \frac{L_k(l_k(l_k(t;\xi);0))}{\ln_k l_k(t;\ \xi)} - \frac{L_k(l_k(t;\ 0))}{\ln_k t} =$$

$$= \frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ \ln_k t}(1-\xi) + \frac{L_k^*(l_k(t;\ \xi);0)}{\ln_k l_k\ (t;\xi)}\xi + \xi\frac{L_k(t_k)}{\xi \ln_k t} - \frac{L_k(t_k)}{\ln_k t} =$$

$$= \frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t}(1-\xi) + \frac{L_k^*(l_k(t;\ \xi);0)}{\ln_k l_k(t;\xi)}\,\xi.$$

Из последнего равенства, используя свойства нижних и верхних пределов, получаем

$$d_k(0) \geqslant d_k(\xi)(1-\xi) + d_k(0)\xi,$$
$$D_k(0) \leqslant D_k(\xi)(1-\xi) + D_k(0)\xi,$$

откуда

$$d_k(\xi) \leqslant d_k(0) \leqslant D_k(0) \leqslant D_k(\xi),$$

т. е. мы доказали еще два неравенства из (2.1).

Далее, по определению

$$d(0) = \varliminf_{x\to\infty} \frac{n(x)}{x}, \quad D(0) = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{n(x)}{x},$$

откуда для всякого $\varepsilon > 0$ при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ имеем

$$\{d(0) - \varepsilon\} x \leqslant n(x) \leqslant \{D(0) + \varepsilon\} x.$$

Поэтому при $0 < \xi < 1$ выполняется

$$d_k(\xi) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{N_k(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t} = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{(1-\xi)\ln_k t} \int\limits_{l_k(t;\xi)}^{t} \frac{n(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{d(0)-\varepsilon}{(1-\xi)\ln_k t} \int\limits_{l_k(t;\xi)}^{t} d\ln_k x = d(0) - \varepsilon.$$

В случае $\xi = 0$ доказательство последнего неравенства аналогично. Легко доказать также, что при $0 \leqslant \xi < 1$ выполняется $D_k(\xi) \leqslant \leqslant D(0) + \varepsilon$. Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, отсюда получаем

$$d(0) \leqslant d_k(\xi) \leqslant D_k(\xi) \leqslant D(0).$$

Осталось доказать, что

$$d_k(0) \leqslant d_{k+1}(\xi) \leqslant D_{k+1}(\xi) \leqslant D_k(0).$$

Интегрированием по частям получаем

$$N_{k+1}(t;\xi) = \int\limits_{l_{k+1}(t;\xi)}^{t} \frac{n(x)}{x} \frac{d\ln_k x}{\ln_k x} =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{t} \frac{n(z)}{z} d\ln_k z \, \frac{1}{\ln_k x}\Bigg|_{l_{k+1}(t;\xi)}^{t} + \int\limits_{l_{k+1}(t;\xi)}^{t} \left(\int\limits_{t_k}^{t} \frac{n(z)}{z} d\ln_k z \right) \frac{d\ln_{k+1} x}{\ln_k x} =$$

$$= \frac{1}{\ln_k t} \int\limits_{t_k}^{t} \frac{n(z)}{z} d\ln_k z - \frac{1}{\ln_k l_{k+1}(t;\xi)} \int\limits_{t_k}^{l_{k+1}(t;\xi)} \frac{n(z)}{z} d\ln_k z +$$

$$+ \int\limits_{l_{k+1}(t;\xi)}^{t} \left(\frac{1}{\ln_k x} \int\limits_{t_k}^{x} \frac{n(z)}{z} d\ln_k z \right) d\ln_{k+1} x,$$

т. е.

$$N_{k+1}(t;\ \xi) = \frac{N_k(t;0)}{\ln_k t} - \frac{N_k(l_{k+1}(t;\xi);0)}{\ln_k l_{k+1}(t;\xi)} +$$

$$+ \int\limits_{l_{k+1}(t;\ \xi)}^{t} \frac{N_k(x;0)}{\ln_k x} d\ln_{k+1} x.$$

Ввиду того, что при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ выполняется

$$d_k(0) - \varepsilon \leqslant \frac{N_k(x;0)}{\ln_k x} \leqslant D_k(0) + \varepsilon \leqslant \frac{1}{p} + \varepsilon,$$

из последнего равенства получаем

$$d_k(0) - \varepsilon + 0(1) \leqslant \frac{N_{k+1}(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_{k+1} t} \leqslant D_k(0) + \varepsilon + 0(1),$$

откуда, переходя к пределу ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, получаем требуемые неравенства.

Следствие 2.1. *Если последовательность $\{\lambda_n\}$ измерима с плотностью Δ, то она и k-логарифмически измерима с k-логарифмической плотностью $\Delta_k = \Delta$, $k \geqslant 1$.*

Следствие 2.2. *Если последовательность k-логарифмически измерима с k-логарифмической плотностью Δ_k, то она и $(k+1)$-логарифмически измерима, причем $\Delta_{k+1} = \Delta_k$, $k \geqslant 1$.*

Покажем теперь, что последовательность может быть k-логарифмически измеримой, однако не быть $(k-1)$-логарифмически измеримой. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Для всякой положительной при $x \geqslant a$ функции $\omega(x)$, удовлетворяющей условию*

$$0 < b_1 \leqslant (x\omega(x))' \leqslant b_2 < \infty, \tag{2.2}$$

существует последовательность $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющая условию (1), для которой

$$n(x) = x\omega(x) + \alpha(x), \tag{2.3}$$

где $\alpha(x)$ — некоторая положительная функция $0 \leqslant \alpha(x) < 1$.

Доказательство. Ввиду условия (2.2) уравнение $n = x\omega(x)$, где n — натуральное число, при $n \geqslant n_0(a)$ имеет единственный положительный корень $x = \lambda_n \geqslant a$. Покажем, что таким образом выбранная последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию (1). Действительно, из очевидных тождеств $n \equiv \lambda_n\omega(\lambda_n)$ и $n+1 \equiv \lambda_{n+1}\omega(\lambda_{n+1})$ имеем $1 \equiv \lambda_{n+1}\omega(\lambda_{n+1}) - \lambda_n\omega(\lambda_n)$, т. е. по теореме Лагранжа

$$1 \equiv (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\Theta\omega(\Theta))', \tag{2.4}$$

где $\lambda_n < \Theta < \lambda_{n+1}$. Ввиду условия (2.2) существует число $p = \frac{1}{b_2}$, такое, что из (2.4) получаем

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{1}{(\Theta\omega(\Theta))'} \geqslant p > 0. \qquad (2.5)$$

Пусть теперь $\lambda_n \leqslant x < \lambda_{n+1}$. Тогда $n(x) = n(\lambda_n) = \lambda_n\omega(\lambda_n) \leqslant x\omega(x)$ и $n(x) = n(\lambda_{n+1}) - 1 > x\omega(x) - 1$, т. е. выполняется (2.3). Лемма 2.2 доказана.

Отметим, что равенство (2.3) равносильно равенству $n(x) = [x\omega(x)]$, где через $[a]$ обозначена целая часть числа $\alpha > 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\omega(x) = \frac{1}{4}(3 + \sin(\ln_k x))$, $k \geqslant 1$, $x \geqslant t_k$. Легко видеть, что $\frac{1}{4} \leqslant (x\omega(x))' \leqslant \frac{5}{4}$, т. е. функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию (2.2). Тогда по лемме 2.1 существует последовательность $\{\lambda_n\}$, для которой, ввиду (2.5), выполняется $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \frac{4}{5}$ и $n(x) = \frac{x}{4}(3 + \sin(\ln_k x)) + \alpha(x)$, $0 \leqslant \alpha(x) < 1$. Таким образом, для этой последовательности имеем

$$N_k(t;\,0) = \int_{t_k}^{t} \frac{\frac{x}{4}(3 + \sin \ln_k x)) + \alpha(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{t_k}^{t} (3 + \sin(\ln_k x))\,d\ln_k x + \int_{t_k}^{t} \frac{\alpha(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(3\ln_k x - \cos(\ln_k x))\Big|_{t_k}^{t} - \varphi_k(t),$$

где

$$\varphi_k(t) = \int_{t_k}^{t} \frac{\alpha(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\ln_j x}\,dx \leqslant \int_{t_k}^{t} \frac{dx}{x^2} = O(1).$$

Таким образом,

$$N_k(t;\,0) = \frac{3}{4}\ln_k t + O(1),$$

откуда

$$d_k(0) = D_k(0) = \Delta_k = \frac{3}{4}.$$

Аналогично, учитывая, что $n(x) = 0$ при $x < t_k$, имеем

$$N_{k-1}(t;\,0) = \int_{t_k}^{t} \frac{n(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-2} \frac{1}{\ln_j x}\,dx =$$

$$= \int_{t_k}^{t} \frac{\frac{x}{4}(3+\sin(\ln_k x)) + \alpha(x)}{x} \prod_{j=0}^{k-2} \frac{1}{\ln_j x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{t_k}^{t} (3+\sin(\ln_k x))\, d\ln_{k-1} x + O(1) =$$

$$= \frac{3}{4} \ln_{k-1} t + \frac{1}{8} \{\sin(\ln_k t) + \cos(\ln_k t)\} \ln_{k-1} t + O(1),$$

откуда

$$\frac{N_{k-1}(t; 0)}{\ln_{k-1} t} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln_k t\right) + 0(1)$$

и

$$d_{k-1}(0) = \frac{6-\sqrt{2}}{8},\ D_{k-1}(0) = \frac{6+\sqrt{2}}{8},$$

т. е. последовательность $\{\lambda_n\}$ является k-логарифмически измеримой и не является $(k-1)$-логарифмически измеримой.

Далее,

$$\frac{n(t)}{t} = \frac{1}{4}(3 - \sin(\ln_k t)) + 0(1),$$

т. е. $d(0) = \frac{1}{2}$, $D(0) = 1$, т. е. последовательность $\{\lambda_n\}$ не измерима.

Теорема 2.2. *Для того чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ была k-логарифмически измерима, необходимо и достаточно, чтобы существовали два числа ξ и η, $0 \leqslant \xi$, $\eta < 1$, такие, что*

$$d_k(\xi) = D_k(\eta). \tag{2.6}$$

Доказательство. Если последовательность k-логарифмически измерима, то существует предел

$$\Delta_k = \lim_{t\to\infty} \frac{L_k^*(t; 0)}{\ln_k t} = \lim_{t\to\infty} \frac{L_k(t)}{\ln_k t}.$$

Поэтому для всякого ξ, $0 \leqslant \xi < 1$ имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t} = \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{1}{1-\xi} \frac{L_k(t)}{\ln_k t} - \frac{\xi}{1-\xi} \frac{L_k(l_k(t;\xi))}{\ln_k l_k(t;\xi)} \right\} =$$

$$= \frac{\Delta_k}{1-\xi} - \frac{\xi\Delta_k}{1-\xi} = \Delta_k,$$

т. е. (2.6) выполняется для любых ξ и η, $0 \leqslant \xi$, $\eta < 1$.

Пусть теперь имеет место (2.6) для некоторых ξ и η, $0 \leqslant \xi$, $\eta < 1$. Тогда из неравенств (2.1) получаем

$$d_k(\xi) \leqslant d_k(0) \leqslant D_k(0) \leqslant D_k(\eta) = d_k(\xi),$$

т. е. $d_k(0)=D_k(0)$ и последовательность k-логарифмически измерима.

Теорема 2.3. *Функции* $d_k(\xi)$ *и* $D_k(\xi)$ *непрерывны на промежутке* $\xi\in[0, 1)$.

Доказательство. Пусть $0\leqslant\xi<\eta<1$. Тогда, как и при доказательстве леммы 1.1, имеем

$$0<(1-\xi)\frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t}-(1-\eta)\frac{L_k^*(t;\eta)}{(1-\eta)\ln_k t}=$$

$$=\frac{L_k^*(t;\xi)-L_k^*(t;\eta)}{\ln_k t}=\frac{L_k(l_k(t;\eta))-L_k(l_k(t;\xi))}{\ln_k t}=$$

$$=\frac{1}{\ln_k t}\sum_{l_k(t;\xi)<\lambda_n\leqslant l_k(t;\eta)}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\ln_j\lambda_n}=$$

$$=\frac{1}{\ln_k t}\int\limits_{l_k(t;\xi)}^{l_k(t;\eta)}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\ln_j x}\,dn(x)=$$

$$=\frac{1}{\ln_k t}\int\limits_{l_k(t;\xi)}^{l_k(t;\eta)}\frac{n(x)}{x}\,d\ln_k x+0(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p\ln_k t}\int\limits_{l_k(t;\xi)}^{l_k(t;\xi)}d\ln_k x+0(1)=\frac{\eta-\xi}{p}+0(1).$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{L_k^*(t;\eta)}{(1-\eta)\ln_k t}(1-\eta)<(1-\xi)\frac{L_k^*(t;\xi)}{(1-\xi)\ln_k t}\leqslant$$

$$\leqslant(1-\eta)\frac{L_k^*(t;\eta)}{(1-\eta)\ln_k t}+\frac{\eta-\xi}{p}+0(1),$$

откуда

$$(1-\eta)d_k(\eta)\leqslant(1-\xi)d_k(\xi)\leqslant(1-\eta)d_k(\eta)+\frac{\eta-\xi}{p},$$

$$(1-\eta)D_k(\eta)\leqslant(1-\xi)D_k(\xi)\leqslant(1-\eta)D_k(\eta)+\frac{\eta-\xi}{p},$$

т. е. выполняются неравенства

$$-\frac{1}{p}\leqslant\frac{(1-\eta)d_k(\eta)-(1-\xi)d_k(\xi)}{\eta-\xi}<0,$$

$$-\frac{1}{p}\leqslant\frac{(1-\eta)D_k(\eta)-(1-\xi)D_k(\xi)}{\eta-\xi}<0.$$

Из последних неравенств следует, что функции $(1-\xi)\,d_k(\xi)$ и $(1-\xi)\,D_k(\xi)$ при $\xi\in[0,1)$ не возрастают и удовлетворяют условию Липшица, а следовательно, непрерывны, откуда следует непрерывность функций $d_k(\xi)$ и $D_k(\xi)$ для $\xi\in[0,1)$.

3. Минимальная и максимальная k-логарифмические плотности

Теорема 3. 1. *Существуют пределы*

$$\lim_{\xi\to 1-0} d_k(\xi)=d_k(1),\quad \lim_{\xi\to 1-0} D_k(\xi)=D_k(1), \tag{3.1}$$

причем для всех ξ, $0\leqslant\xi<1$ *выполняется*

$$d_k(1)\leqslant d_k(\xi),\; D_k(\xi)\leqslant D_k(1). \tag{3.2}$$

Доказательство. Имеет место тождество

$$\frac{L^*_k(t;\,\xi^n)}{(1-\xi^n)\ln_k t}=\frac{L_k(t)-L_k(l_k(t;\,\xi^n))}{(1-\xi^n)\ln_k t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi^{i-1}-\xi^i}{1-\xi^n}\times$$

$$\times\frac{L_k(l_k(t;\xi^{i-1}))-L_k(l_k(t;\,\xi^i))}{(\xi^{i-1}-\xi^i)\ln_k t}, \tag{3.3}$$

ибо $l_k(t;\,\xi^0)=l_k(t;\,1)=t$. Но

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L_k(l_k(t;\,\xi^{i-1}))-L_k(l_k(t;\,\xi^i))}{(\xi^{i-1}-\xi^i)\ln_k t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{L_k(l_k(t;\,\xi^{i-1}))-L_k(l_k(l_k(t;\,\xi^i);\,\xi))}{(1-\xi)\ln_k l_k(t;\,\xi^{i-1})}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{L^*_k(l_k(t;\,\xi^{i-1});\,\xi)}{(1-\xi)\ln_k l_k(t;\,\xi^{i-1})}=d_k(\xi).$$

Поэтому из (3.3) имеем

$$d_k(\xi^n)\geqslant d_k(\xi)\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi^{i-1}-\xi^i}{1-\xi^n}=d_k(\xi)$$

и, аналогично,

$$D_k(\xi^n)\leqslant D_k(\xi).$$

Два последних неравенства аналогичны до соответствующих неравенств относительно $d(\xi)$ и $D(\xi)$, доказанных в [1]. Повторяя рассуждения Пойа, приходим к справедливости теоремы 3.1.

Величины $d_k(1)$ и $D_k(1)$ назовем соответственно минимальной и максимальной k-логарифмическими плотностями. Из (2.1), (3.2) и неравенств, полученных в [1], получаем

$$0 \leqslant d(1) \leqslant d(\xi) \leqslant d(0) \leqslant d_k(1) \leqslant d_k(\xi) \leqslant d_k(0) \leqslant d_{k+1}(1) \leqslant$$
$$\leqslant d_{k+1}(\xi) \leqslant D_{k+1}(\xi) \leqslant D_{k+1}(1) \leqslant D_k(0) \leqslant D_k(\xi) \leqslant D_k(1) \leqslant D(0) \leqslant$$
$$\leqslant D(\xi) \leqslant D(1) \leqslant \frac{1}{p}. \qquad (3.4)$$

Из неравенств (3.4) видно, что последовательности $\{d_k(\xi)\}$, $0 \leqslant \xi < 1$, и $\{d_k(1)\}$ монотонно возрастающие и ограниченные сверху. Поэтому существует конечное число d, такое, что $d = \lim\limits_{k\to\infty} d_k(\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} d_k(1)$. Аналогично, существует число D, такое что $D = \lim\limits_{k\to\infty} D_k(\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} D_k(1)$ для всех ξ, $0 \leqslant \xi < 1$. Величины d и D назовем соответственно минимальной и максимальной трансфинитными плотностями последовательности $\{\lambda_n\}$. Если при этом $d = D$, то их общее значение будем называть трансфинитной плотностью, а саму последовательность трансфинитно измеримой. Из неравенств (3.4) получаем

Следствие 3.1. *Если последовательность измерима, то она и трансфинитно измерима, причем* $d = D = \Delta$.

Следствие 3.2. *Если при некотором* $k \geqslant 1$ *последовательность k-логарифмически измерима, то она и трансфинитно измерима, причем* $d = D = \Delta_k$.

4. Свойства аддитивности

Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ разбита на две подпоследовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, причем так, что члены последовательности $\{\lambda_n^{(1)}\}$ не являются членами последовательности $\{\lambda_n^{(2)}\}$ и наоборот. Тогда по определению $L_k(t)$ имеем

$$L_k(t) = L_k^{(1)}(t) + L_k^{(2)}(t)$$

и

$$L_k^*(t;\ \xi) = L^{*(1)}_k(t;\ \xi) + L^{*(2)}_k(t;\ \xi),$$

откуда по определению соответствующих k-логарифмических плотностей, ввиду свойств верхних и нижних пределов, получаем

$$d_k^{(1)}(\xi) + d_k^{(2)}(\xi) \leqslant d_k(\xi) \leqslant d_k^{(1)}(\xi) + D_k^{(2)}(\xi) \leqslant D_k(\xi) \leqslant D_k^{(1)}(\xi) + D_k^{(2)}(\xi) \qquad (4.1)$$

для всех $\xi \in [0, 1)$, а ввиду непрерывности $d_k(\xi)$, $D_k(\xi)$ — и для $\xi \in [0, 1]$.

Теорема 4.1. *Если* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ — *подпоследовательность последовательности* $\{\lambda_n\}$, *то*

$$d_k^{(1)}(\xi) \leqslant d_k(\xi), \quad D_k^{(1)}(\xi) \leqslant D_k(\xi).$$

Доказательство этой теоремы следует из (4.1), так как $d_k^{(2)}(\xi) \geqslant 0$.

Теорема 4.2. *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ k*-логарифмически измерима с* k*-логарифмической плотностью* Δ_k *и разбита на две непересекающиеся подпоследовательности* $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, *то*

$$D_k^{(2)}(\xi) + d_k^{(1)}(\xi) = \Delta_k.$$

Доказательство этой теоремы также следует из (4.1), если учесть, что $d_k(\xi) = D_k(\xi) = \Delta_k$.

Из теоремы 4.2 следует, что если последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda_n^{(1)}\}$ k-логарифмически измеримы, то $\{\lambda_n^{(2)}\}$ также k-логарифмически измерима, причем $\Delta_k^{(2)} = \Delta_k - \Delta_k^{(1)}$, а из (4.1) следует, что если $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$ k-логарифмически измеримы, то и $\{\lambda_n\}$ k-логарифмически измерима, причем $\Delta_k = \Delta_k^{(1)} + \Delta_k^{(2)}$.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за ценные замечания.