УДК 517.535.4

Е. Д. Файнберг

О ДЕФЕКТАХ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Известно, что множество дефектных значений мероморфной функции порядка $\rho > 0$ не более чем счетно. А. А. Гольдберг [1, 2] показал, что эта характеристика точна, т. е. множество дефектных значений может быть любым конечным или счетным множеством. В настоящей работе рассматривается вопрос о структуре множества дефектных значений функций, мероморфных в полуплоскости.

Наиболее употребительными характеристиками роста и распределения значений функций, мероморфных в полуплоскости, являются характеристики, введенные Р. Неванлинной [3], и характеристики М. Цудзи [4]. По этим характеристикам естественным образом определяются дефектные значения в смысле Р. Неванлинны и М. Цудзи. Полученные в этой работе результаты относятся к обоим типам дефектных значений.

Дадим необходимые для формулировки результатов определения [5, с. 38—41]. Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и не равная тождественно постоянной. Обозначим через $\boldsymbol{n}(r, f)$, $r \geqslant 1$ число ее полюсов, лежащих во множестве $\left\{\left|z - \frac{ir}{2}\right| \leqslant \frac{r}{2},\ |z| > 1\right\}$. Характеристиками Цудзи функции $f(z)$ называются следующие величины, определенные при $r \geqslant 1$:

$$\boldsymbol{N}(r, f) = \int_1^r \frac{\boldsymbol{n}(t, f)}{t^2}\, dt, \quad \boldsymbol{N}(r, a) \equiv \boldsymbol{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right);$$

$$\boldsymbol{m}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \ln^+ |f(r \sin \theta e^{i\theta})| \frac{d\theta}{r \sin^2 \theta},$$

$$\boldsymbol{m}(r, a) \equiv \boldsymbol{m}\left(r, \frac{1}{f-a}\right);$$

$$\boldsymbol{T}(r, f) = \boldsymbol{m}(r, f) + \boldsymbol{N}(r, f).$$

Порядком функции $f(z)$ в смысле Цудзи будем называть число

$$\rho_T[f] = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \boldsymbol{T}(r, f)}{\ln r}.$$

Дефектом в смысле Цудзи функции $f(z)$ в точке a называется величина

$$\delta_1(a, f) \equiv \delta_1(a) = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\boldsymbol{m}(r, a)}{\boldsymbol{T}(r, f)} =$$

$$= 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a)}{\boldsymbol{T}(r, f)}.$$

Значения a, для которых $\delta_1(a) > 0$, будем называть дефектными значениями в смысле Цудзи. Множество дефектных значений в смысле Цудзи обозначим через $E_T(f)$. Цудзи доказал [4], что для функций $f(z)$, у которых $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}}\ \boldsymbol{T}(r, f)/\ln r = \infty$, множество $E_T(f)$ не более чем счетно.

Мы показываем, что эта характеристика множества $E_T(f)$ не может быть уточнена и справедлив аналог теоремы А. А. Гольдберга [2].

Теорема А. *Пусть $0 < \rho < \infty$, а M — произвольное не более чем счетное множество точек расширенной комплексной плоскости. Тогда существует мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ функция $f(z)$ порядка $\rho_T = \rho$, множество дефектных значений которой $E_T(f)$ совпадает с M.*

Характеристиками Р. Неванлинны функции $f(z)$, мероморфной в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, называются величины $(1 \leqslant r < \infty)$:

$$A(r, f) = \frac{1}{\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) (\ln^+ |f(t)| + \ln^+ |f(-t)|)\, dt,$$

$$A(r, a) \equiv A\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \quad (a \neq \infty);$$

$$B(r, f) = \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln^+ |f(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta,$$

$$B(r, a) \equiv B\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \quad (a \neq \infty);$$

$$C(r, f) = 2 \sum_{1 < \rho_n < r} \left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{r^2}\right) \sin\psi_n,$$

где $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюса функции $f(z)$ (полюс кратности m считается m раз),

$$C(r, a) \equiv C\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \quad (a \neq \infty);$$

$$S(r, f) = A(r, f) + B(r, f) + C(r, f).$$

Порядком функции $f(z)$ по Неванлинне называется число

$$\rho_N[f] = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln S(r, f)}{\ln r}.$$

Дефектом в смысле Неванлинны функции $f(z)$ в точке a называется величина

$$\Theta(a, f) \equiv \Theta(a) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{A(r, f) + B(r, f)}{S(r, f)} = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{C(r, a)}{S(r, f)}.$$

Значения a, для которых $\Theta(a) > 0$, называем дефектными значениями в смысле Неванлинны, множество таких значений a обозначим через $E_N(f)$. В [3, с. 18] Р. Неванлинна доказал, что для функций $f(z)$, мероморфных конечного порядка во всей конечной z-плоскости, таких, что $S(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$, множество $E_N(f)$ не более чем счетно. Там же Неванлинна отмечает, что это утверждение должно быть справедливо для любой функции, мероморфной в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, если $S(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$, но доказательство этого факта в печати не появлялось. А. А. Гольдберг [6] построил пример, опровергающий одно утверждение Неванлинны (аналог леммы о логарифмической производной), на котором он основывал свое предположение. Однако это предположение остается верным, если функция $f(z)$ удовлетворяет некоторым ограничениям. Так, Б. Я. Левин и

И. В. Островский доказали в [7], что условие конечности порядка функции $f(z)$, мероморфной во всей плоскости, можно заменить более слабым условием

$$\int_1^\infty \frac{\ln^+ T(r, f)}{r^2} dr < \infty, \tag{1}$$

где $T(r, f)$ — характеристика Неванлинны для функции $f(z)$ во всей плоскости. Если условие (1) не выполняется, но выполняется условие

$$\lim_{r \to \infty} \frac{S(r, f)}{\ln T(r, f) + \ln r} = \infty,$$

то, как следует из результата, полученного в [5, с. 137], утверждение Неванлинны о счетности множества $E_N(f)$ верно. Мы покажем, что указанная характеристика множества $E_N(f)$ точна.

Теорема В. *Пусть* $0 < \rho < \infty$, *а* M — *произвольное не более чем счетное множество точек расширенной комплексной плоскости. Тогда существует мероморфная в полуплоскости* $\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$ *функция* $f(z)$ *порядка* $\rho_N = \rho$, *множество дефектных значений которой* $E_N(f)$ *совпадает с* M.

Для доказательства теорем А и В нам потребуются вспомогательные результаты, которые, возможно, представляют самостоятельный интерес. Эти результаты являются аналогами теоремы А. Эдрея и В. Фукса [8], (см. также [5, с. 58]).

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция в полуплоскости* $\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$; k, δ *и* α — *некоторые числа,*

$$k > 1,\ 0 < \delta \leqslant \pi - 2\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ r > 1.$$

Существуют такие постоянные $C_1(k, \delta, \alpha)$ и $C_2(k, \delta, \alpha)$, *что для любого измеримого множества* $E(r) \subset [\alpha, \pi - \alpha]$ *такого, что* $\mathrm{mes}\, E(r) = \delta$, *выполняется*

$$\frac{1}{r} \int_{E(r)} \ln^+ |f(r \sin\varphi e^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \leqslant C_1(k, \delta, \alpha)\, T(kr, f) + \\ + C_2(k, \delta, \alpha), \tag{2}$$

где

$$C_1(k, \delta, \alpha) = \frac{3\sqrt{k^3}\delta}{(\sqrt{k} - 1)\sin^4\alpha} \ln \frac{\pi e}{\delta \sin\alpha} \to 0$$

и

$$C_2(k, \delta, \alpha) = \frac{K\sqrt{k^3}\delta}{(\sqrt{k} - 1)\sin^4\alpha} \to 0,$$

когда $\delta \to 0$ *при фиксированных* k *и* α.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, полюса которой $b_n = \rho_n e^{i\psi_n}$ лежат в углу $\{\beta < \arg z < \pi - \beta\}$; k и δ — некоторые числа, $k > 1$, $0 < \delta \leqslant \pi$, $r > 1$. Существуют такие постоянные $D_1(k, \delta, \beta)$ и $D_2(\delta, \beta)$, что для любого измеримого множества $E(r) \subset [0, \pi]$ такого, что $\operatorname{mes} E(r) = \delta$, выполняется

$$\frac{1}{r} \int\limits_{E(r)} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leqslant D_1(k, \delta, \beta) S(kr, f) + D_2(\delta, \beta),$$

где

$$D_1(k, \delta, \beta) = \frac{k^2(\sqrt{k} + 10)\delta}{(\sqrt{k} - 1)^3} \ln \frac{3\sqrt{3}e}{\sin \frac{\delta}{2} \sin \beta} \to 0$$

и

$$D_2(\delta, \beta) = K\delta \ln \frac{3\sqrt{3}e^2}{\sin \frac{\delta}{2} \sin \beta} \to 0,$$

когда $\delta \to 0$ при фиксированном k и любом β.

Мы приведем здесь только доказательства теоремы A и леммы 1.

1. Доказательство теоремы А.

Наше доказательство основано на общем методе А. А. Гольдберга [1, 2] (см. также [9, с. 150—153]). Пусть $\{\eta_i\}_1^\infty$ — невозрастающая последовательность такая, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i = 1$. Возьмем произвольное θ_1 такое, что $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2(\rho + 1)}$. Положим $\eta_{-i} = \eta_i$,

$$\theta_n = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i + \theta_1, \quad \theta_{-n} = \pi - \theta_n = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \sum_{i=n}^{\infty} \eta_i.$$

Таким образом, последовательности $\{\theta_n\}$ и $\{\theta_{-n}\}$ строго монотонны, причем $\theta_n \uparrow \frac{\pi}{2}$, а $\theta_{-n} \downarrow \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$. Возьмем последовательность комплексных чисел a_j, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$, множество значений которой совпадает с множеством M. Рассмотрим функции

$$\varphi_1(z) = \sum_{|j|=1}^{\infty} c_j a_j E_{\rho+1}\left(ze^{-i\theta_j}\right) \tag{3}$$

и

$$\varphi_2(z) = \sum_{|j|=1}^{\infty} c_j E_{\rho+1}\left(ze^{-i\theta_j}\right), \tag{4}$$

где $E_\rho(z)$ — функция Миттаг-Леффлера; $\{c_i\}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{|j|=1}^{\infty} c_j |a_j| = S_1 < \infty, \quad \sum_{|j|=1}^{\infty} c_j = S_2 < \infty.$$

Известно ([5, с. 114]), что для функции Миттаг-Леффлера имеет место следующая асимптотика:

$$E_\rho(z) = \begin{cases} \rho e^{z^\rho} + O\left(\frac{1}{1+|z|}\right), & |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}, \\ O\left(\frac{1}{1+|z|}\right), & \pi \geqslant |\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}. \end{cases}$$

Поэтому ряды (3) и (4) сходятся абсолютно и равномерно в каждой ограниченной области и, следовательно, функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ являются целыми. Пусть

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

Покажем, что для мероморфной функции $f(z)$ справедливо утверждение теоремы.

Заметим, что при $z = r\sin\theta e^{i\theta}$ выполняется неравенство

$$|E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_j})| \leqslant (\rho+1)\exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos(\rho+1)(\theta-\theta_j)\} + \\ + O\left(\frac{1}{1+r\sin\theta}\right) \leqslant [1+o(1)](\rho+1)\exp(r\sin\theta)^{\rho+1}$$

и, следовательно,

$$|\varphi_i(z)| \leqslant [1+o(1)](\rho+1)S_i\exp(r\sin\theta)^{\rho+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$m(r, \varphi_i) \leqslant \frac{2^{\rho-2}}{\pi}\mathrm{B}\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)r^\rho + O(\ln r).$$

Таким образом,

$$T(r, f) \leqslant T(r, \varphi_1) + T(r, \varphi_2) + O(1) = \\ = m(r, \varphi_1) + m(r, \varphi_2) + O(1) \leqslant \frac{2^{\rho-1}}{\pi}\mathrm{B}\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)r^\rho + O(\ln r). \quad (5)$$

Зафиксируем целое число ν. Предположим, что θ удовлетворяет неравенству

$$\theta_\nu - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu < \theta \leqslant \theta_\nu + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu. \quad (6)$$

Тогда при $\theta_j \leqslant \theta_{\nu-1}$ имеем

$$\theta - \theta_j \geqslant \theta_\nu - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu - \theta_{\nu-1} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\eta_{\nu-1} - \\ - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu \geqslant \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\theta_1}{3}\right)\eta_\nu,$$

а при $\theta_i \geqslant \theta_{\nu+1}$ получаем

$$\theta_j - \theta \geqslant \theta_{\nu+1} - \theta_\nu - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\theta_1}{3}\right)\eta_\nu.$$

Итак, во всех случаях для $j \neq \nu$

$$|\theta - \theta_j| \geqslant \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\theta_1}{3}\right)\eta_\nu \pmod{2\pi}. \quad (7)$$

Чтобы упростить запись, введем обозначение $\tau_\nu = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu$.

Пусть θ лежит в промежутке (6) и $z = r\sin\theta e^{-i\theta}$. Сумму членов ряда $\sum_{|j|=1}^{\infty} f_j(ze^{-i\theta_j})$, для которых $|\arg(ze^{-i\theta_j})| \leqslant \frac{\pi}{2(\rho+1)}$, обозначим через $\sum' f_j(ze^{-i\theta_j})$, а сумму тех членов ряда, для которых $\frac{\pi}{2(\rho+1)} < |\arg(ze^{-i\theta_j})| \leqslant \pi$, обозначим через $\sum'' f_j(ze^{-i\theta_j})$. Тогда

$$|\varphi_1(z) - c_\nu a_\nu E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_\nu})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j\neq\nu}' c_j |a_j E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_j})| + \sum'' c_j |a_j E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_j})| \leqslant$$
$$\leqslant (\rho+1)\sum_{j\neq\nu}' c_j |a_j| \exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos(\rho+1)(\theta-\theta_j)\} +$$
$$+ O(1/(1+r\sin\theta)) \leqslant$$
$$\leqslant [1+o(1)](\rho+1) S_1 \exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos[2(\rho+1)\tau_\nu]\}.$$

Аналогично в этом же промежутке

$$|\varphi_2(z) - c_\nu E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_\nu})| \leqslant$$
$$\leqslant [1+o(1)](\rho+1) S_2 \exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos[2(\rho+1)\tau_\nu]\},$$

так что

$$|\varphi_2(z)| \geqslant c_\nu |E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_\nu})| -$$
$$- [1+o(1)](\rho+1) S_2 \exp\{r\sin\theta)^{\rho+1}\cos[2(\rho+1)\tau_\nu]\} \geqslant$$
$$\geqslant c_\nu(\rho+1)\exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos(\rho+1)\tau_\nu\} -$$
$$- [1+o(1)](\rho+1) S_2 \exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos[2(\rho+1)\tau_\nu]\}.$$

Для достаточно больших r выполняется

$$[1+o(1)] S_2 \exp\left\{-2(r\sin\theta)^{\rho+1}\sin\frac{(\rho+1)\tau_\nu}{2}\sin\frac{3(\rho+1)\tau_\nu}{2}\right\} < \frac{c_\nu}{2},$$

следовательно,

$$|\varphi_2(z)| \geqslant \frac{c_\nu}{2}(\rho+1)\exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos(\rho+1)\tau_\nu\}.$$

Поэтому

$$|f(z) - a_\nu| = \left|\frac{\varphi_1(z) - a_\nu\varphi_2(z)}{\varphi_2(z)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{[1+o(1)](S_1 + |a_\nu| S_2)\exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos 2(\rho+1)\tau_\nu\}}{\frac{1}{2}c_\nu\exp\{(r\sin\theta)^{\rho+1}\cos(\rho+1)\tau_\nu\}} =$$
$$= \frac{2[1+o(1)](S_1+|a_\nu|S_2)}{c_\nu} \times \tag{8}$$
$$\times \exp\left\{-2(r\sin\theta)^{\rho+1}\sin\frac{3}{2}(\rho+1)\tau_\nu \sin(\rho+1)\frac{\tau_\nu}{2}\right\}.$$

Отсюда получаем, что для $r \to \infty$ и θ таких, что $|\theta - \theta_\nu| \leqslant \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_1}{3}\right)\eta_\nu$ выполняется

$$\ln^+ \left| \frac{1}{f(r\sin\theta\, e^{i\theta}) - a_\nu} \right| \geqslant \frac{\rho^2}{6} (r\sin\theta)^{\rho+1} \eta_\nu^2 + O(1).$$

Так как для достаточно больших r справедливо неравенство $\theta_1 > \arcsin\frac{1}{r}$, то

$$m(r, a_\nu) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_\nu - \tau_\nu}^{\theta_\nu + \tau_\nu} \ln^+ \left| \frac{2}{f(r\sin\theta e^{i\theta}) - a_\nu} \right| \frac{d\theta}{r\sin^2\theta} \geqslant$$

$$\geqslant K(\rho, \theta_1) r^\rho \eta_\nu^3 + o(r^\rho)^1.$$

Тогда в силу (5)

$$\delta(a_\nu, f) \geqslant K_1(\rho, \theta_1)\eta_\nu^3. \tag{9}$$

Поскольку

$$m(r, a_\nu) + N(r, a_\nu) = T(r, f) + O(1),$$

то

$$m(r, a_\nu) \leqslant T(r, f) + O(1).$$

Поэтому

$$K(\rho, \theta_1) r^\rho \eta_\nu^3 + o(r^\rho) \leqslant T(r, f) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\rho-1} B\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)}{\pi} r^\rho + o(r^\rho).$$

Следовательно, порядок функции $f(z)$ равен ρ и $\overline{M} \subset E_T(f)$.

Покажем, что для $a \in \overline{M}$ всегда $\delta_1(a, f) = 0$. Пусть δ — произвольное положительное число. В сегменты $\left[0, \frac{\pi}{2} - \delta\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2} + \delta, \pi\right]$ попадает конечное число точек $\frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}$. Окружим их интервалами длиной 2η, где $\eta > 0$ выбрано так, чтобы суммарная длина этих интервалов I не превышала δ. Обозначим через

$$\Phi_{\eta,\delta} = \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \eta, \frac{\theta_{-1} + \theta_{-2}}{2} + \eta\right] \Big\backslash \left(\left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right] \cup I\right).$$

---

[1] Подсчет показывает, что

$$K(\rho, \theta_1) = \min\left\{\frac{\rho^3}{36(\rho+1)}, \frac{\rho^3}{18(\rho+1)} \sin^{\rho-1}\theta_1\right\}.$$

Будем считать число r настолько большим, чтобы $\arcsin\frac{1}{r} < \theta_1$. Тогда

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}} \ln^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}\sin\theta) - a} \right| \frac{d\theta}{r\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \int\limits_{I} + \int\limits_{\Phi_{\eta,\,\delta}} + \int\limits_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\eta} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{\theta_{-1}+\theta_{-2}}{2}-\eta}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}} \right) \ln^+ \left| \frac{1}{f(r\sin\theta\, e^{i\theta}) - a} \right| \frac{d\theta}{r\sin^2\theta}.$$

Так же, как мы с помощью (8) показали, что в каждом из интервалов (6) $f(z)$ равномерно стремится к одному из a_ν, можно показать, что в интервалах $\theta \in \left(\frac{\theta_{\nu-1}+\theta_\nu}{2} + \eta, \frac{\theta_\nu + \theta_{\nu+1}}{2} - \eta \right)$ функция $f(z)$ равномерно стремится к a_ν. Поэтому

$$\int\limits_{\Phi_{\eta,\,\delta}} \ln^+ \left| \frac{1}{f(r\sin\theta\, e^{i\theta}) - a} \right| \frac{d\theta}{r\sin^2\theta} = O(1).$$

Из определения функции $f(z)$ следует, что для $\theta \in I_1 = (0, \theta_1]$ при $r \to \infty$ функция $f(z) \to a_1$, а для $\theta \in I_2 = [\theta_{-1}, \pi)$ точно так же $f(z) \to a_{-1}$. Таким образом, величины $|f(r\sin\theta e^{i\theta})|$ и $|f(r\sin\theta e^{i\theta}) - a|^{-1}$, $\bar{a} \in M$, $a \neq \infty$ при $\theta \in (I_1 \cup I_2)$ ограничены. Учитывая это, получим что

$$\left(\int\limits_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\eta} + \int\limits_{\frac{\theta_{-1}+\theta_{-2}}{2}+\eta}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}} \right) \ln^+ \left| \frac{1}{f(r\sin\theta\, e^{i\theta}) - a} \right| \frac{d\theta}{r\sin^2\theta} = O(1).$$

Для оценки оставшихся двух интегралов применим лемму 1, получим

$$\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \int\limits_{I} \right) \ln^+ \left| \frac{1}{f(r\sin\theta\, e^{i\theta}) - a} \right| \frac{d\theta}{r\sin^2\theta} \leqslant$$

$$\leqslant 3\,[C_1(k, \delta, \alpha)\, T(kr, f) + C_2(k, \delta, \alpha)].$$

Собирая все оценки, имеем

$$m(r, a) \leqslant \frac{3}{2\pi}[C_1(k, \delta, \alpha) T(kr, f) + $$
$$+ C_2(k, \delta, \alpha)] + O(1).$$

Итак,

$$\delta_1(a, f) \leqslant \frac{3A}{2\pi} C_1(k, \delta, \alpha).$$

Так как δ можно выбирать произвольно, а $C_i(k, \delta, \alpha) \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\delta_1(a, f) = 0$ и для нашей функции $E_T(f) = M$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для $0 < \rho \leqslant 1$ вместо функций $E_{\rho+1}(ze^{-i\theta_j})$ можно взять более простые функции $\exp\{z^{\rho+1}e^{-i(\rho+1)\theta_j}\}$, если $f(z)$ мероморфна в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

Замечание 2. Выбрав η_ν подходящим образом, мы приходим к выводу, что ряд $\Sigma[\delta_1(a, f)]^\alpha$ может расходиться для каждого $\alpha < 1/3$.

2. Доказательство леммы 1

Запишем формулу Пуассона — Иенсена для круга $\left\{|z| \leqslant \frac{1}{2}\rho\right\}$ и функции $f\left(z + \frac{i}{2}\rho\right)$. После ряда преобразований, аналогичных тем, что выполнены в ([5, с. 142—143], доказательство леммы о логарифмической производной), приходим к неравенству

$$\int\limits_{E(r)} \ln^+|f(r\sin\varphi e^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho^3\delta}{r^2(\rho - r)\sin^4\alpha}[2T(r, f) + K] +$$
$$+ \sum_{\left|b_\nu - \frac{i}{2}\rho\right| < \frac{\rho}{2}} \int\limits_{E(r)} \ln\frac{\rho}{|r\sin\varphi e^{i\varphi} - b_\nu|}\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi}.$$

Обозначив $\arg b_\nu = \beta_\nu$, получим

$$J = \int\limits_{E(r)} \ln\frac{\rho}{|r\sin\varphi e^{i\varphi} - b_\nu|}\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r\sin^2\alpha}\int\limits_{E(r)} \ln\frac{\rho}{|r\sin\varphi e^{i(\varphi-\beta_\nu)} - |b_\nu||}d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r\sin^2\alpha}\int\limits_{E(r)} \ln\frac{\rho}{r\sin\varphi|\sin(\varphi - \beta_\nu)|}d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r\sin^2\alpha}\int\limits_{E(r)} \ln\frac{\rho}{r\sin\alpha|\sin\tau|}d\tau.$$

Применим теперь лемму 7.2 [5, с. 56]:

$$J \leqslant \frac{1}{r\sin^2\alpha}\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\ln\frac{\rho}{r\sin\alpha\,|\sin\tau|}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{r\sin^2\alpha}\int_0^{\delta/2}\ln\frac{\pi\rho}{2\tau r\sin\alpha}\,d\tau = \frac{\delta}{r\sin^2\alpha}\ln\frac{\pi e\rho}{r\delta\sin\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{r}\int_{E(r)}\ln^+|f(r\sin\varphi e^{i\varphi})|\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho^3\delta}{r^2(\rho-r)\sin^4\alpha}[K+2T(\rho, f)] +$$

$$+ n(\rho, f)\frac{\delta}{r\sin^2\alpha}\ln\frac{\pi e\rho}{r\delta\sin\alpha}.$$

Так как $n(\rho, f) \leqslant \frac{R\rho}{R-\rho}N(R, f)$, где $R>\rho$, то для $R=kr$ и $\rho = \sqrt{kr}$ имеем

$$\frac{1}{r}\int_{E(r)}\ln^+|f(r\sin\varphi e^{i\varphi})|\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \leqslant$$

$$\leqslant \delta T(kr, f)\left[\frac{\sqrt{k^3}}{(k-1)\sin^2\alpha}\ln\frac{\pi e\sqrt{k}}{\delta\sin\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{k^3}}{(\sqrt{k}-1)\sin^4\alpha}\right] + \frac{K\delta\sqrt{k^3}}{(\sqrt{k}-1)\sin^4\alpha} =$$

$$= \tilde{C}_1(k, \delta, \alpha)\,T(kr, f) + C_2(k, \delta, \alpha),$$

где

$$\tilde{C}_1(k, \delta, \alpha) = \delta\left[\frac{\sqrt{k^3}}{(k-1)\sin^2\alpha}\ln\frac{\pi e\sqrt{k}}{\delta\sin\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{k^3}}{(\sqrt{k}-1)\sin^4\alpha}\right] \leqslant \frac{3k\sqrt{k}\delta}{(\sqrt{k}-1)\sin^4\alpha}\ln\frac{\pi e}{\delta\sin\alpha} = C_1(k, \delta, \alpha)$$

и

$$C_2(k, \delta, \alpha) = \frac{K\delta\sqrt{k^3}}{(\sqrt{k}-1)\sin^4\alpha}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Очевидно, что в (2) вместо $C_1(k, \delta, \alpha)$ можно поставить $\tilde{C}_1(k, \delta, \alpha)$, но это усложнит запись.

Автор благодарен И. В. Островскому за поставку задачи и интерес к работе, а также А. А. Гольдбергу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А. О дефектах мероморфных функций. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, с. 893—895.
2. Гольдберг А. А. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. — «Укр. мат. журн.», 1959, № 11, с. 438—443.
3. Nevantinna R. Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkel — raum. — «Acta Soc Sci. Fenn», 1925, t. 50. № 12, p. 1—45.
4. Tsuji M. On Boret's directions of meromorphic functions of finite order. —«Tôhoku. Math. J»., 1950, v. 2, № 2, p. 97—112.
5. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 143 с.
6. Гольдберг А. А. Лемма Неванлинны о логарифмической производной мероморфной функции — «Мат. заметки», 1975, № 4, с. 525—529.
7. Левин Б. Я., Островский И. В. О зависимости роста целой функции от расположения нулей ее производных. — «Сиб. мат. журн.», 1960, т. 1, № 3, с. 427—455.
8. Edrei A., Fuchs W. H. J. Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions. — «Proc. London Math. Soc», 1962, № 12, p. 315—344.
9. Хейман У. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 153 с.