УДК513-88.

С. А. Раков

О КЛАССАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫХ С БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТЬЮ

В 1933 г. Орлич установил, что для безусловной сходимости ряда $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ в пространствах L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ необходимо, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{k\geqslant 1} \| x_k \|^r$, где $r = \max(2, p)$ [1]. Кадец доказал, что в равномерно выпуклом пространстве с модулем выпуклости $\delta(\varepsilon)$ безусловная сходимость ряда $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ влечет сходимость ряда $\sum_{k\geqslant 1} \delta(\| x_k \|)$ [2]. Качественная сторона этих результатов состоит в том, что в некоторых пространствах множество последовательностей, образованных нормами элементов безусловно сходящихся рядов, не совпадает с множеством всех положительных, стремящихся к нулю последовательностей.

Отнесем банахово пространство X к классу O, если существует такая числовая последовательность $t_k \searrow 0$, что любой ряд $\sum_{k\geqslant 1} x_k$, для которого $\| x_k \| = t_k$, не сходится безусловно. Пространства, не входящие в класс O, отнесем к классу $\overline{O}$.

Нетрудно показать [3], что для принадлежности пространства X классу O достаточно, чтобы величины $c_n(X) = \inf \{ d(X_n, l_\infty^n) \}$[1] были ограничены в совокупности (нижняя грань берется по всем n-мерным подпространствам $X_n \subset X$).

Отметим, что принадлежность к классу O не связана с рефлексивностью: пространство L_1 принадлежит классу O, но нерефлексивно, с другой стороны, в [4] построено рефлексивное банахово пространство, для каждого бесконечномерного подпространства X которого $\sup_n c_n(X) \leqslant 2$ и, следовательно, $X \in \overline{O}$.

Пространства X, для которых $\sup_n c_n(X) < \infty$, рассматривались в [5] в связи с факторизацией компактных операторов.

В работе автора (см. [3]) показано, что условие равномерной ограниченности величин $c_n(X)$ является также и необходимым для принадлежности X классу $\overline{O}$.

В классе O выделим подклассы O_r $(1 \leqslant r < \infty)$, подсказываемые приведенной выше теоремой Орлича. Банахово пространство X принадлежит классу O_r, если для любого безусловно сходящегося ряда $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ в X сходится ряд $\sum_{k\geqslant 1} \| x_k \|^r$. Из теоремы Дворецкого—Роджерса следует, что каждый класс O_r при $1 \leqslant r < 2$ совпадает с множеством всех конечномерных банаховых пространств. Очевидно, $O_{r_1} \subseteq O_{r_2} \subseteq O$ при $r_1 \leqslant r_2$. Оказывается, класс O исчерпывается подклассами O_r.

[1] d — дистанция Банаха—Мазура.

Теорема 1. $O = \bigcup\limits_{r \geqslant 1} O_r$.

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Обозначим:

$$\Theta_n(X) = \inf \sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k x_k \Big\|; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где нижняя грань берется по всем наборам $\{x_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ из n нормированных векторов банахова пространства X.

Лемма 1.[1] *Для того чтобы $X \in O$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие n_0 и $\gamma > 0$, что*

$$\Theta_n(X) \geqslant n^{\gamma} \tag{1}$$

для всех $n \geqslant n_0$.

Доказательство. Достаточность условия (1) показана в [3]. Доказательство необходимости распадается на три этапа.

1. Покажем, что $\Theta_k(X) \geqslant 2$ для некоторого натурального k. В самом деле, предположим противное: $\Theta_k(X) < 2$ для каждого k. Произвольную числовую последовательность $t_i \searrow 0$ разобьем на блоки $\{t_i : i \in N_q\}$ так, чтобы $\sum\limits_{q \geqslant 1} M_q < \infty$, где

$$N_q = \{i : n_q + 1 \leqslant i \leqslant n_{q+1}\},$$

а

$$M_q = \max \{|t_i| : i \in N_q\}.$$

Для каждого блока выберем множество $\{x_i : i \in N_q\}$ нормированных элементов пространства X такое, что

$$\sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i \in N_q} \varepsilon_i x_i \Big\| \leqslant 2.$$

Возможность такого выбора гарантирована допущением $\Theta_k(X) < 2$. Для всех $N \geqslant n_q + 1$ имеем

$$\sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i \geqslant N} \varepsilon_i t_i x_i \Big\| \leqslant \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i \geqslant n_q + 1} \varepsilon_i t_i x_i \Big\| \leqslant \sum_{q \geqslant m} \max_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i \in N_q} \varepsilon_i t_i x_i \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q \geqslant m} M_q \max_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i \in N_q} \varepsilon_i x_i \Big\| \leqslant 2 \sum_{q \geqslant m} M_q.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{i \geqslant 1} t_i x_i$ сходится безусловно и $X \in \overline{O}$. Противоречие доказывает 1.

2. Покажем, что для каждого натурального m

$$\Theta_{k^m}(X). \tag{2}$$

[1] Идея доказательства заимствована из [6]. Из леммы 1 нетрудно получить теорему, установленную в [3].

Пусть $m=2$. Произвольную систему $\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant k^2\}$ нормированных векторов разобьем на k подсистем $\{x_i : i \in I_q\}$, где $I_q = \{i : k(q-1) < i \leqslant kq\}$. Для каждой подсистемы найдем такой набор чисел

$$\{\hat{\varepsilon}_i : i \in I_q;\ \hat{\varepsilon}_i = \pm 1\},$$

чтобы

$$\Big\| \sum_{i \in I_q} \hat{\varepsilon}_i x_i \Big\| \geqslant 2$$

(это возможно, поскольку $\Theta_k(X) \geqslant 2$).
Обозначим

$$y_q = \sum_{i \in I_q} \hat{\varepsilon}_i x_i, \quad q = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда $\|y_q\| \geqslant 2$ и

$$\sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant i \leqslant k^2} \varepsilon_i x_i \Big\| \geqslant \sup_{\varepsilon_q = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant q \leqslant k} \varepsilon_q \sum_{i \in I_q} \hat{\varepsilon}_i x_i \Big\| =$$

$$= \sup_{\varepsilon_q = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant q \leqslant k} \varepsilon_q y_q \Big\| \geqslant 2 \sup_{\varepsilon_q = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant q \leqslant k} \varepsilon_q y_q / \|y_q\| \Big\| \geqslant 2\Theta_k(X) \geqslant 2^2,$$

откуда $\Theta_{k^2}(X) \geqslant 2^2$.

Для произвольного m неравенство (2) получается индукцией по m с помощью приведенных рассуждений для $m=2$.

3. Покажем, что для $\gamma = \log_k\left(\frac{3}{2}\right)$ и $n_0 = k^{m_0}$, где k и m_0 удовлетворяют условиям

$$\Theta_k(X) \geqslant 2;\ 2^{m_0} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{m_0+1},$$

неравенство (1) справедливо. Пусть $k^m \leqslant n \leqslant k^{m+1}$ $m \geqslant m_0$. Тогда

$$\Theta_n(X) \geqslant \Theta_{k^m}(X) \geqslant 2^m \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_k n} = n^\gamma.$$

Лемма 1 доказана.

Для произвольной стремящейся к нулю последовательности $\{x_k\}_{k \geqslant 1}$ элементов банахова пространства X через $\{x_k^*\}_{k \geqslant 1}$ будем обозначать перестановку ее членов в порядке убывания норм.

Лемма 2. *Если в банаховом пространстве X ряд $\sum_{k \geqslant 1} x_k$ сходится безусловно, то $\|x_k^*\| \leqslant c \cdot \Theta_k^{-1}(X)$ для $n = 1, 2, \ldots$ и некоторого $c < \infty$.*

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{k \geqslant 1} x_k$ сходится безусловно, то $\sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \| \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k x_k \| = c < \infty$ (см. [2]).

Следовательно,

$$c = \sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k x_k^* \Big\| \geqslant \max_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k x_k^* \Big\| =$$

$$= \| x_n^* \| \max_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k x_k^* / \| x_n^* \| \Big\| \geqslant \| x_n^* \| \, \Theta_n(X).$$

Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $X \in O$. Тогда по лемме 1 найдутся n_0 и δ такие, что $\Theta_n(X) \geqslant n^{2\delta}$ для всех $n \geqslant n_0$. Если ряд $\sum_{k \geqslant 1} x_k$ сходится безусловно в X, то

$$\sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k x_k \Big\| = c < \infty \text{ (см. [2]).}$$

Выберем $n_1 \geqslant n_0$ так, чтобы $\Theta_n(X) \geqslant c n^\delta$ при всех $n \geqslant n_1$. Для произвольного $\lambda > \delta^{-1}$ справедливо неравенство $\sum_{n \geqslant n_1} \|x_n^*\|^\lambda \leqslant \sum_{n \geqslant n_1} \times$ $\times \, n^{-\lambda\delta} < \infty$ (согласно лемме 2 $\| x_n^* \| \leqslant c \Theta_n^{-1}(X) \leqslant n^{-\delta}$ для всех $n > n_1$), откуда

$$\sum_{n \geqslant 1} \| x_n \|^\lambda = \sum_{n \geqslant 1} \| x_n^* \|^\lambda < \infty,$$

т. е. $X \in O_\lambda$. Теорема доказана.

Отметим, что утверждение теоремы 1 вытекает также из результатов заметки [7], в которой изучаются случайные ряды в банаховых пространствах.

Ряд авторов (см. [6]) изучали банаховы пространства, названные ими B-выпуклыми. Как показано в [6], банахово пространство X является B-выпуклым тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \inf d(X_n, l_1^n) = \infty,$$

где нижняя грань берется по всем n-мерным подпространствам X_n пространства X.

Следствие 1. *Каждое B-выпуклое пространство принадлежит классу O_r при некотором $r < \infty$.*

Доказательство. Предположим противное: существует B-выпуклое пространство, принадлежащее класу $\bar{O}$. Тогда согласно [3], имеем

$$\sup_n \inf d(X_n, l_\infty^n) \leqslant c < \infty,$$

где нижняя грань берется по всем n-мерным подпространствам $X_n \subset X$. Хорошо известно, что каждое банахово пространство, единичный шар которого есть $2n$-гранник, изометрически изоморфно некоторому подпространству l_∞^n. Отсюда нетрудно получить оценку

$$\inf d(X_n, l_1^n) \leqslant \inf d(X_{2^n}, l_\infty^{2^n}) \leqslant c \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

что противоречит B-выпуклости X. Следствие 1 доказано.

Поскольку каждое равномерно выпуклое пространство является B-выпуклым (см. [6]), то справедливо

Следствие 2. *Каждое равномерно выпуклое пространство принадлежит классу O_r при некотором $r < \infty$.*

Отметим, что следствие 2 вытекает непосредственно из [2] и недавнего результата Пизье (см. [8]), который состоит в том, что модуль выпуклости равномерно выпуклого пространства допускает степенную оценку снизу при соответствующей перенормировке.

Следствие 3. *Если $X \in O$ и $Y \in O$, то $X \bigoplus Y \in O$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, найдутся такие $r_1 < \infty$ и $r_2 < \infty$, что $X \in O_{r_1}$, $Y \in O_{r_2}$. Поэтому $X \bigoplus Y \in O_r$ для $r = \max(r_1, r_2)$.

Банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, снабженное операторной топологией, обозначим через $B(X, Y)$.

Теорема 2. *Если X и Y — бесконечномерные банаховы пространства, то $B(X, Y) \in \bar{O}$.*

Доказательство. Зададимся натуральным n. Пусть $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ — канонический базис l_2^n. Через P_j обозначим ортопроектор из l_2^n на j-ю координату. Тогда $\|P_j\| = 1$ и $\max\limits_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum\limits_{1 \leq j \leq n} \varepsilon_j P_j \Big\| = 1$. По теореме Дворецкого (см. [9]) в сопряженном пространстве X^* найдется подпространство E_1 и оператор $T : l_2^n \to E_1$ такие, что $\|T\| \leq 2$, $\|T^{-1}\| = 1$. Через I_1 обозначим вложение $I_1 : E_1 \to X^*$. Положим $R_j = I_1 T P_j$. Тогда

$$\|R_j\| = \|I_1 T P_j\| = \|T P_j\| = \|T^{-1}\| \|T P_j\| \geq \|P_j\| = 1,$$

$$\max_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leq j \leq 1} \varepsilon_j R_j \Big\| \leq \|I_1\| \cdot \|T\| \cdot \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leq j \leq n} \varepsilon_j P_j \Big\| \leq 2.$$

Поскольку сопряженный оператор R_j^*, отображающий X^{**} в l_2^n, непрерывен в слабых* топологиях пространств X^{**} и l_2^n, а образ единичного шара пространства X при естественном вложении в X^{**} плотен в единичном шаре пространства X^{**} в слабой* топологии, то для операторов $S_j = R_j^*|_X$ справедливы соотношения

$$\|S_j\| = \|R_j^*\| = \|R_j\| \geq 1; \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leq j \leq n} \varepsilon_j S_j \Big\| \leq 2.$$

Еще раз воспользовавшись теоремой Дворецкого, выберем подпространство $E_2 \subset Y$ и оператор $Q : l_2^n \to E_2$ такие, что $\|Q\| \leq 2$; $\|Q^{-1}\| = 1$. Пусть I_2 — вложение: $I_2 : E_2 \to Y$. Обозначим: $V_j = I_2 Q S_j$. Тогда $V_j \in B(X, Y)$,

$$\|V_j\| = \|I_2 Q S_j\| = \|Q S_j\| = \|Q^{-1}\| \|Q S_j\| \geq \|S_j\| \geq 1,$$

$$\max_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leq j \leq n} \varepsilon_j V_j \Big\| = \|I_2\| \|Q\| \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{1 \leq j \leq n} \varepsilon_j S_j \Big\| \leq 4.$$

Таким образом, $\Theta_n(B(X, Y)) \leqslant 4$ и по лемме 1 $B(X, Y) \in \overline{O}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. 1) *Для того чтобы $B(X, Y)$ было изоморфно равномерно выпуклому банахову пространству, необходимо и достаточно, чтобы одно из пространств X или Y было изоморфно равномерно выпуклому банахову пространству, а другое было конечномерным.*

2) *Для того чтобы $B(X, Y)$ было B-выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы одно из пространств X или Y было B-выпуклым, а другое конечномерным.*

3) *Для того чтобы $B(X, Y) \in O$, необходимо и достаточно, чтобы либо $Y \in O$, а X было конечномерным, либо $X^* \in O$, а Y было конечномерным.*

Доказательство проведем параллельно для всех трех случаев.

Необходимость конечномерности одного из пространств вытекает из теоремы 2, следствия 1 и следствия 2. Необходимость того, чтобы другое пространство обладало соответствующим свойством, вытекает из существования изометрических вложений X^* и Y в $B(X, Y)$ и из наследуемости на сопряженное пространство изоморфности равномерно выпуклому пространству (см. [10]) и B-выпуклости (см. [6]).

При доказательстве достаточности можно предполагать, что X конечномерно (в противном случае перейдем к пространству $B(Y^*, X^*)$ и воспользуемся отмеченной в доказательстве необходимости наследственностью). Легко видеть, что если $\dim X = n$, то $B(X, Y)$ изоморфно прямой сумме пространств $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} Y_j$, где $Y_j = Y$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Теперь достаточность вытекает из того, что каждое из рассматриваемых семейств пространств (пространства, изоморфные равномерно выпуклому банахову пространству, В-выпуклые, класс O) замкнуто относительно взятия суммы (см. [6, 11] и следствие 3 соответственно). Теорема 3 доказана.

В связи с теоремой 3 и следствием 1 отметим, что недавно Джеймсом был построен пример B-выпуклого, но нерефлексивного пространства.

Автор благодарит М. И. Кадеца за постановку задач и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Orlicz W. Uber unbedingte Convergenz in Functionenräum. — «Studia Math.», 1933, vol. 4, p. 41—47.
2. Кадец А. М. Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве. — «Усп. мат. наук», 1956, т. 11, вып. 5 (71), с. 185—190.
3. Раков С. А. О банаховых пространствах, в которых не верна теорема Орлича. — «Мат. заметки», 1973, т. 14, вып. 1, с. 101—106.

4. Цирельсон В. С. Не в любое банахово пространство можно вложить l_p или c_0. — «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, вып. 2, с. 57—60.
5. Figel T. Factorisation of compact operators and applications to the approximation. problem. — «Studia Math»., 1973, vol. XLV, N 2, 191—210.
6. Giesy D. P. On a convexity condition in normed linear spaces. — TAMS., 1966, vol. 125, p. 114—146.
7. Maurey B., Pisier C. Caracterisation d'une classe d'espaces de Banach par des properietes de series aleatoires vectorielles. — «C. R. Acad. Sc. Poris», 1973 t. 277, № 14, p. A687—A690.
8. Pisier G. Martingales a valeurs dans les espaces uniformement convexes.— «C. R. Acad. Sc. Paris», 1974, t. 279, N 9, p. A327—A330.
9. Дворецкий А. Некоторые результаты о выпуклых телах и банаховых пространствах. — «Математика», 1964, т. 8, вып. 1, с. 73—102.
10. Enflo P. Banach spaces which can be given an equivalent uniform convex norm. — «Israel J. Math», 1972, vol. 13, N 3—4, p. 281—288.
11. Day M. M. Uniform convexity. Bull. — «Amer. Math. Soc», 1943, vol. 49 p. 745—746.