УДК 517.535.4

А. З. Мохонько

О НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ КРИВЫХ

В этой статье получены оценки для неванлинновской характеристики мероморфных кривых и алгеброидных функций, обобщающие нашу теорему [1]. Кроме того, рассматриваются соотношения между неванлинновскими характеристиками мероморфных функций, связанных некоторыми уравнениями. Предполагается, что читатель знаком со стандартными обозначениями и основными фактами теории мероморфных функций.

Скажем, что $f(z) \in M_R$, если $f(z)$ — функция, мероморфная в $\{|z| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$. В [1] доказана

Теорема А. *Пусть*

$$F_d(z) = \frac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))} = \frac{a_t f^t + \ldots + a_1 f + a_0}{b_m f^m + \ldots + b_0},$$

где $a_i(z)$, $b_j(z)$, $f(z) \in M_R$; $a_t(z) \not\equiv 0$, $b_m(z) \not\equiv 0$, $d = \max(m, t)$, *причем* $P(z, f)$ *и* $Q(z, f)$ *взаимно просты как многочлены от* f *над полем мероморфных функций. Тогда*

$$T(r, F_d) = dT(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{t} T(r, a_j) + \sum_{i=0}^{m} T(r, b_i)\right).$$

Будем рассматривать вектор-функции $G_* = (P_0(z), \ldots, P_m(z))$, $m \geqslant 1$, $P_j(z) \in M_R$, $0 \leqslant j \leqslant m$, причем $P_j(z)$ могут быть линейно зависимыми. Пусть $G_1 = (P_{10}(z), \ldots, P_{1m}(z))$, $G_2 = (P_{20}(z), \ldots, P_{2m}(z))$. Скажем, что G_1 и G_2 эквивалентны, если $P_{10}/P_{20} \equiv \ldots \equiv P_{1m}/P_{2m}$. Это — отношение эквивалентности, которому соответствует разбиение множества вектор-функций на классы. Класс эквивалентности называется мероморфной кривой. Через G обозначим мероморфную кривую, через G_* обозначим представителя класса G. Введем величины, характеризующие меромофную кривую (ср. [3]).

Пусть $\hat{n}(r, G_*)$ — количество общих нулей всех $P_j(z)$ в круге $\{|z| \leqslant r\}$ (с учетом кратности). Через $n(z_0, \varphi)$ обозначим величину, равную порядку полюса функции $\varphi(z) \in M_R$ в точке z_0. Далее

$$n(z_0, G_*) = \max n(z_0, P_j), \ 0 \leqslant j \leqslant m,$$

$$n(r, G_*) = \sum_{|z| \leqslant r} n(z, G_*),$$

$$N(r, G_*) = \int_0^r \frac{n(t, G_*) - n(0, G_*)}{t} dt + n(0, G_*) \ln r,$$

$$\hat{N}(r, G_*) = \int_0^r \frac{\hat{n}(t, G_*) - \hat{n}(0, C_*)}{t}\, dt + \hat{n}(0, G_*) \ln r,$$

$$m(r, G_*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \max (|P_0(re^{i\varphi})|, \ldots,$$

$$\ldots, |P_m(re^{i\varphi})|)\, d\varphi - \hat{N}(r, G_*).$$

$$T(r, G_*) = m(r, G_*) + N(r, G_*). \qquad (1)$$

Величины $m(r, G_*)$ и $N(r, G_*)$ зависят от выбора G_* — представителя класса G. Однако, как легко проверить, если G_1, $G_2 \in G$, то $T(r, G_1) = T(r, G_2) + \text{const}$. Будем называть характеристической функцией $T(r, G)$ мероморфной кривой G характеристическую функцию $T(r, G_*)$ любого представителя G_*. Таким образом, $T(r, G)$ определена лишь с точностью до слагаемого, тождественно равного постоянной, что роли не играет.

Пусть P, Q — многочлены от $f(z)$ над полем мероморфных функций. Скажем, что $Q \in D(P)$, если многочлен P делится на многочлен Q над полем мероморфных функций. В противном случае $Q \overline{\in} D(P)$. Пусть даны многочлены

$$P_i = \sum_{j=0}^{\varkappa_i} a_{ij}(z) f^j, \ 0 \leqslant i \leqslant m, \qquad (2)$$

где

$$a_{ij}(z),\ f(z) \in M_R;\ a_{i\varkappa_i}(z) \not\equiv 0,\ \ 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant \varkappa_i.$$

Положим

$$d = \max \varkappa_i,\ 0 \leqslant i \leqslant m.$$

Скажем, что наибольший общий делитель многочленов $P_0, \ldots, P_m$ равен единице, если из того, что $Q \in D(P_0), \ \ldots, \ Q \in D(P_m)$ следует, что Q — многочлен нулевой степени относительно $f(z)$ над полем мероморфных функций, и будем записывать

$$\langle P_0; \ldots; P_m \rangle = 1.$$

Представитель $(P_0(z), \ldots, P_m(z)) = G_*$ принадлежит некоторой мероморфной кривой G. Не уменьшая общности, можем считать, что

$$\langle P_0; \ldots; P_m \rangle = 1, \qquad (3)$$

поскольку, как мы отмечали выше, если $P_0 = QP_0'$, $\ldots$, $P_m = QP_m'$, то $T(r, (P_0, \ldots, P_m)) = T(r, (P_0', \ldots, P_m')) + O(1)$.

Теорема 1. *Пусть у представителя G_* мероморфной кривой G компоненты заданы формулой (2), причем выполняется (3). Тогда*

$$T(r, G) = dT(r, f) + O(\Sigma T(r, a_{ij})).$$

Аналогичные соотношения справедливы для $m(r, G_*)$ и $N(r, G_*)$.

Замечание. Пусть выполняются условия теоремы A. Как известно [3, с. 292], $T(r, F_d) = T(r, P/Q) = T(r, (P, Q)) + O(1)$. Поэтому теорема 1 для двумерной мероморфной кривой совпадает с теоремой A.

Лемма 1. *Если для многочленов P_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, $m \geqslant 1$, заданных формулой (2), выполняется условие (3), то существуют постоянные $c_i \neq 0$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$ такие, что*

$$\langle c_0P_0 + \ldots + c_{m-1}P_{m-1};\; P_m \rangle = 1. \tag{4}$$

При $m = 1$ достаточно взять $c_0 = 1$. Пусть $m \geqslant 2$. Предположим, что

$$Q_i \in D(P_m),\; 1 \leqslant i \leqslant p,\; \deg Q_i \geqslant 1 \tag{5}$$

— все возможные делители многочлена P_m (с точностью до множителя — многочлена нулевой степени относительно f). Если $m = 2$ и

$$Q_1 \in D(P_0 + P_1), \tag{6}$$

то $Q_1 \overline{\in} D(P_0 + cP_1)$, где c — постоянная, $c \neq 1$. В противном случае $Q_1 \in D(P_1)$ и из (6) следует, что $Q_1 \in D(P_0)$. Получаем противоречие с условием леммы. В частности, $Q_1 \overline{\in} D(P_0 + 2P_1)$. Предположим, что $Q_2 \in D(P_0 + 2P_1)$. Тогда $Q_2 \overline{\in} D(P_0 + cP_1)$, где $c \neq 2$. В частности, $Q_2 \overline{\in} D(P_0 + 3P_1)$. Повторяя эти рассуждения для всех Q_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, получим, что $\langle P_0 + cP_1;\; P_2 \rangle = 1$, когда $c \neq 0, 1, \ldots, p$. При $m = 2$ лемма доказана.

Предположим, что лемма верна при $t = m - 1 \geqslant 2$. Тогда она верна и при $t = m$. Действительно, по условию $\langle P_0; \ldots; P_{m-2}; P_{m-1}; P_m \rangle = 1$. Если и $\langle P_0; \ldots; P_{m-2}; P_m \rangle = 1$, то по предположению индукции существуют постоянные $c_i \neq 0$, $0 \leqslant i \leqslant m-2$, такие, что $\langle c_0P_0 + \ldots + c_{m-2}P_{m-2};\; P_m \rangle = 1$. Согласно доказанному для $m = 2$, существует постоянная $c_{m-1} \neq 0$, такая, что $\langle R + c_{m-1}P_{m-1};\; P_m \rangle = 1$, где $R = c_0P_0 + \ldots + c_{m-2}P_{m-2}$, и лемма доказана. Предположим, что $\langle P_0; \ldots; P_{m-2}; P_m \rangle = Q$, где Q — многочлен от $f(z)$ степени $\geqslant 1$. В этом случае

$$P_0 = QP'_0,\; \ldots,\; P_{m-2} = QP'_{m-2},\; P_m = QP'_m. \tag{7}$$

Тогда

$$P_0 + \ldots + P_{m-2} = Q(P'_0 + \ldots + P'_{m-2}),$$

причем

$$\langle P'_0;\; \ldots;\; P'_{m-2};\; P'_m \rangle = 1.$$

По предположению индукции существуют такие постоянные $c_i \neq 0$, $0 \leqslant i \leqslant m-2$, что

$$\langle R;\; P'_m \rangle = 1, \tag{8}$$

где

$$R = c_0P'_0 + \ldots + c_{m-2}P'_{m-2}.$$

Докажем, что

$$\langle QR;\ P_{m-1};\ P_m \rangle = 1. \tag{9}$$

Пусть

$$\langle QR;\ P_{m-1};\ P_m \rangle = Q_1, \tag{10}$$

где Q_1 — многочлен от $f(z)$ степени $\geqslant 1$. Если $\langle R,\ Q_1 \rangle = 1$, то из (10) следует, что $Q_1 \in D(Q)$. Тогда из (7), (10) следует, что $Q_1 \in D(P_0),\ \ldots,\ D(P_m)$, что противоречит условиям леммы. Следовательно,

$$\langle R,\ Q_1 \rangle = Q^*,\ \deg Q^* \geqslant 1. \tag{11}$$

Тогда из (10), (11) следует

$$Q^* \in D(R),\ Q^* \in D\left(P_m' Q\right). \tag{12}$$

Из (8) и (12) следует, что $Q^* \in D(Q)$. Поэтому $Q^* \in D(P_0), \ldots, D(P_{m-2}),\ D(P_m)$. Из (10) и (11) следует, что $Q^* \in D(P_{m-1})$. Получили противоречие с условием леммы. Следовательно, выполняется (9). Так как при $m = 2$ лемма доказана, то существует постоянная $c_{m-1} \neq 0$, такая, что $\langle QR + c_{m-1}P_{m-1};\ P_m \rangle = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$F(z) = a_t f^t + \ldots + a_1 f + a_0,$$

где $a_i(z),\ f(z) \in M_R,\ 0 \leqslant i \leqslant t,\ a_t(z) \not\equiv 0$. *Тогда для каждого* $z_0 \in \in \{|z| < R\}$

$$tn(z_0,\ f) + \sum_{j=0}^{t} n(z_0,\ a_j) \geqslant n(z_0,\ F) \geqslant$$

$$\geqslant tn(z_0,\ f) - tn(z_0,\ a_t^{-1}) - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{t}{t-j} n(z_0,\ a_j). \tag{13}$$

Первое неравенство очевидно. Докажем второе неравенство. Если $n(z_0,\ F) \geqslant tn(z_0,\ f) - n\left(z_0,\ a_t^{-1}\right)$, то тем более выполняется (13). Очевидно,

$$tn(z_0,\ f) - n\left(z_0,\ a_t^{-1}\right) \leqslant n(z_0,\ a_t f^t).$$

Если

$$n(z_0,\ F) < tn(z_0,\ f) - n\left(z_0,\ a_t^{-1}\right) \leqslant n(z_0,\ a_t f^t), \tag{14}$$

то это означает, что существует по крайней мере одно слагаемое $a_j f^j$, $0 \leqslant j \leqslant t-1$, такое, что $n(z_0,\ a_t f^t) \leqslant n(z_0,\ a_j f^j)$, откуда $tn(z_0,\ f) - n\left(z_0,\ a_t^{-1}\right) \leqslant jn(z_0,\ f) + n(z_0,\ a_j)$, или

$$tn(z_0,\ f) \leqslant \frac{t}{t-j} n\left(z_0,\ a_t^{-1}\right) + \frac{t}{t-j} n(z_0,\ a_j) \leqslant$$

$$\leqslant tn\left(z_0,\ a_t^{-1}\right) + \frac{t}{t-j} n(z_0,\ a_j). \tag{15}$$

Учитывая, что $n(z_0, F) \geqslant 0$, из (15) немедленно получаем (13).
Доказательство теоремы 1. Положим $|a|^\wedge = \max(|a|, 1)$. Учитывая, что $d = \max \varkappa_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$, из (2) получим

$$\max(|P_0|, \ldots, |P_m|) \leqslant \max_i [(\varkappa_i + 1)(|f|^\wedge)^{\varkappa_i} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{\varkappa_i} |a_{ij}|^\wedge] \leqslant (d+1)(|f|^\wedge)^d \prod_{ij} |a_{ij}|^\wedge. \tag{16}$$

Из (16) следует

$$T(r, G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \max_{0 \leqslant i \leqslant m} |P_i| d\varphi - \hat{N}(r, G_*) + N(r, G_*) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ (d+1)(|f|^\wedge)^d \prod_{i,j} |a_{ij}|^\wedge \right\} d\varphi + N(r, G_*) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant dm(r, f) + \sum_{i,j} m(r, a_{ij}) + N(r, G_*) + O(1). \tag{17}$$

Из (13) следует

$$n(z_0, G_*) = \max_i n(z_0, P_i) \leqslant \max_i (\varkappa_i n(z_0, f) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\varkappa_i} n(z_0, a_{ij})) \leqslant dn(z_0, f) + \sum_{i,j} n(z_0, a_{ij}).$$

Поэтому,

$$n(r, G_*) \leqslant \sum_{i,j} n(r, a_{ij}) + dn(r, f).$$

Следовательно,

$$N(r, G_*) \leqslant dN(r, f) + \sum_{i,j} N(r, a_{ij}) + O(1). \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем

$$T(r, G) \leqslant dT(r, f) + \sum_{i,j} T(r, a_{ij}) + O(1). \tag{19}$$

Предположим, что $d = \max \varkappa_i = \varkappa_m$. Согласно лемме 1, можем найти постоянные $c_j \neq 0$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, такие, что

$$\langle c_0 P_0 + \ldots + c_{m-1} P_{m-1}; P_m \rangle = 1.$$

Известно (см. [3, с. 291]), что $T(r, LG_*) = T(r, G_*) + O(1)$, где L — невырожденное линейное преобразование в пространстве C^{m+1}. Поэтому

$$T(r, G_*) = T(r, (c_0 P_0 + \ldots + c_{m-1} P_{m-1}, P_2, \ldots, P_m)) +$$
$$+ O(1) \geqslant T(r, (c_0 P_0 + \ldots + c_{m-1} P_{m-1}, P_m)) + O(1). \tag{20}$$

Но (см. [3, с. 292])

$$T(r, (c_0P_0 + \ldots + c_{m-1}P_{m-1}, P_m)) = T\left(r, \frac{c_0P_0 + \ldots + c_{m-1}P_{m-1}}{P_m}\right) =$$

$$= dT(r, f) + O\left(\sum_{i,j} T(r, a_{ij})\right). \qquad (21)$$

Последнее равенство следует из теоремы А. Из (19)—(21) следует утверждение теоремы. Аналогичные равенства справедливы для $m(r, G_*)$ и $N(r, G_*)$. Действительно, учитывая (13), имеем

$$n(z_0, G_*) = \max_i n(z_0, P_i) \geqslant n(z_0, P_m) \geqslant dn(z_0, f) -$$

$$- dn(z_0, a_{md}^{-1}) - \sum_{j=0}^{d-1} \frac{d}{d-j} n(z_0, a_{mj}).$$

Поэтому

$$N(r, G_*) \geqslant dN(r, f) - d\left(N(r, a_{md}^{-1}) + \sum_{j=0}^{d-1} N(r, a_{mj})\right) + O(1). \qquad (22)$$

Из (18) и (22) получаем

$$N(r, G_*) = dN(r, f) + O\left(\sum_{i,j} T(r, a_{ij})\right).$$

Из (1) следует аналогичная формула для $m(r, G_*)$.

Функция $u(z)$, определенная посредством уравнения

$$P_m(z)u^m + \ldots + P_1(z)u + P_0(z) = 0 \qquad (23)$$

с коэффициентами $P_j(z) \in M_R$, $0 \leqslant j \leqslant m$, называется алгеброидной в круге $\{|z| < R\}$. Функция $u(z)$ — m-значная функция. Поскольку уравнение (23) не предполагается неприводимым, однозначные ветви $u(z)$ не обязательно являются аналитическими продолжениями друг друга. Обозначим через $u_q(z)$, $1 \leqslant q \leqslant m$ эти ветви $u(z)$. Положим

$$n_1(z_0, u) = \max n(z_0, P_j/P_m), \ 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Через $n(z_0, u)$ обозначим сумму порядков полюсов всех m ветвей функции $u(z)$ в точке z_0. Определим (см. [4—6])

$$n(r, u) = \sum_{|z| \leqslant r} n(z, u); \ n_1(r, u) = \sum_{|z| \leqslant r} n_1(z, u),$$

$$N(r, u) = \int_0^r \frac{n(t, u) - n(0, u)}{t} dt + n(0, u)\ln r,$$

$$m(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \ln^+ |u_j(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$T(r, u) = m(r, u) + N(r, u). \qquad (24)$$

Введенные здесь характеристики отличаются от общепринятых множителем m.

С другой стороны [4],

$$T(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\max\left(1, \left|\frac{P_0(re^{i\varphi})}{P_m(re^{i\varphi})}\right|, \ldots, \left|\frac{P_{m-1}(re^{i\varphi})}{P_m(re^{i\varphi})}\right|\right) d\varphi +$$

$$+ N_1(r, u) + O(1), \tag{25}$$

где

$$N_1(r, u) = \int_0^r \frac{n_1(t, u) - n_1(0, u)}{t}\, dt + n_1(0, u)\ln r.$$

Очевидно, вектор-функции $G_* = (P_0 P_m^{-1}, \ldots, P_{m-1}P_m^{-1}, 1)$ и $G_0 = (P_0, \ldots, P_{m-1}, P_m)$ принадлежат одной мероморфной кривой G. Ясно, что $N(r, G_*) = N_1(r, u)$, $\hat{N}(r, G_*) = 0$. Поэтому, сравнивая (25) и (1), получим

$$T(r, u) = T(r, G_*) + O(1).$$

Но $G_*, G_0 \in G$, поэтому $T(r, G_*) = T(r, G_0) + O(1)$. Следовательно, $T(r, u) = T(r, (P_0, \ldots, P_m)) + O(1)$, откуда, учитывая теорему 1, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть алгеброидная функция $u(z)$ определяется уравнением (23), коэффициенты которого $P_j(z)$ задаются формулой (2) с условием (3). Тогда*

$$T(r, u) = dT(r, f) + O\left(\sum T(r, a_{i_j})\right).$$

В теореме 2 дана оценка скорости роста совокупности всех m ветвей алгеброидной функции $u(z)$. Очевидно, для отдельной ветви $u_q(z)$, $1 \leqslant q \leqslant m$ выполняется

$$T(r, u_q) \leqslant dT(r, f) + \Sigma T(r, a_{ij}). \tag{26}$$

Оказывается для отдельной ветви $u_q(z)$, $1 \leqslant q \leqslant m$ можно дать более точную оценку. Действительно, пусть m-значная функция $u(z)$ определяется посредством уравнения (23). Для любого q, $1 \leqslant q \leqslant m$

$$|P_m u_q^m| \leqslant m\, |P_j u_q^j|, \tag{27}$$

где $0 \leqslant j \leqslant m-1$, j — некоторое число, зависящее от z. Таким образом ($c = \mathrm{const}$),

$$|u_q| \leqslant c \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1}\left(\left|\frac{P_j}{P_m}\right|^{1/(m-j)}, 1\right), \tag{28}$$

или

$$|u_q|^{m!} \leqslant c^{m!} \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1}\left(\left|\frac{P_j}{P_m}\right|^{m!/(m-j)}, 1\right). \tag{29}$$

Мероморфная кривая $G_1 \sim G_2$, где

$$C_1 = \left\{ \left(\frac{P_0}{P_m}\right)^{\frac{m!}{m}};\ \left(\frac{P_1}{P_m}\right)^{\frac{m!}{m-1}};\ \ldots;\ \left(\frac{P_{m-1}}{P_m}\right)^{\frac{m!}{1}};\ 1 \right\}, \tag{30}$$

$$C_2 = \left\{ P_0^{\frac{m!}{m}} P_m^{m!\left(1-\frac{1}{m}\right)};\ P_1^{\frac{m!}{m-1}} P_m^{m!\left(1-\frac{1}{m-1}\right)};\ \ldots;\ P_{m-1}^{m!};\ P_m^{m!} \right\} \tag{31}$$

Поэтому

$$T(r,\ G_1) = T(r,\ G_2) + O(1). \tag{32}$$

Из (29) следует

$$m!\ n(z_0,\ u_q(z)) \leqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} n\left(z_0,\ (P_j/P_m)^{\frac{m!}{m-j}}\right) = n(z_0,\ G_1). \tag{33}$$

Поэтому

$$m! n(r,\ u_q) = m! \sum_{|z| < r} n(z,\ u_q) \leqslant \sum_{|z| < r} n(z,\ G_1) = n(r,\ G_1),$$

откуда

$$m! N(r,\ u_q) \leqslant N(r,\ G_1) + O(1). \tag{34}$$

Из (29) следует

$$m! m(r,\ u_q) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} (\cdots)\, d\varphi + O(1) = m(r,\ G_1) + O(1). \tag{35}$$

Сложим почленно (34) и (35). Учитывая, что $G_1 \sim G_2$, получим

$$m! T(r,\ u_q) \leqslant T(r,\ G_1) + O(1) = T(r,\ G_2) + O(1), \tag{36}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (23) задаются формулой (2). Тогда, как следует из (19),

$$T(r,\ G_2) \leqslant KT(r,\ f) + O\, m! \Sigma T(r,\ a_{ij}). \tag{37}$$

где

$$K = \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \left[\varkappa_j \frac{m!}{m-j} + \varkappa_m m! \left(1 - \frac{1}{m-j}\right),\ \varkappa_m m! \right]. \tag{38}$$

Из (36) — (38) следует

$$T(r,\ u_q) \leqslant \varkappa T(r,\ f) + \Sigma T(r,\ a_{ij}), \tag{39}$$

где

$$\varkappa = \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \left(\frac{\varkappa_j}{m-j} + \varkappa_m \left(1 - \frac{1}{m-j}\right),\ \varkappa_m \right). \tag{40}$$

Неравенство (39), вообще говоря, точнее, чем (26).

Если относительно $u_q(z)$ дополнительно известно, что

$$u_q(z) \in M_R, \text{ тогда } T\left(r,\ u_q^{-1}\right) = T(r,\ u_q) + O(1),$$

и функция $w = u_q^{-1}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$P_0 w^m + P_1 w^{m-1} + \ldots + P_m = 0.$$

Аналогично (39) получим

$$T(r, u_q) \leqslant \varkappa^* T(r, f) + \Sigma T(r, a_{ij}),$$

где

$$\varkappa^* = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \left(\frac{\varkappa_j}{j} + \varkappa_0 \left(1 - \frac{1}{j} \right), \ \varkappa_0 \right).$$

Последнее неравенство может оказаться более точным, чем (39).

Из неравенств (26), (39) можно вывести также следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(z) = \sum a_{ij} w^i v^j \equiv 0$, *где* $w(z)$, $v(z)$, $a_{ij}(z) \in M_R$, *причем степень* $\Phi(z)$ *относительно* w *равна* m, *а относительно* v *равна* d. *Тогда*

$$\frac{1}{m} T(r, v) - \frac{1}{m} \Sigma T(r, a_{ij}) + O(1) \leqslant T(r, w) \leqslant$$
$$\leqslant dT(r, v) + \sum T(r, a_{ij}) + O(1), \tag{41}$$

причем в (41) *могут иметь место равенства.*

Группируя $\Phi(z)$ по степеням w, получим

$$\Phi(z) = P_m w^m + \ldots + P_1 w + P_0 = 0, \tag{42}$$

$$P_i = \sum_{j=0}^{A_i} a_{ij} v^j, \ 0 \leqslant i \leqslant m, \ P_m \not\equiv 0. \tag{43}$$

Функция $w(z) \in M_R$ удовлетворяет уравнению (42) с коэффициентами (43). Следовательно, $w(z)$ совпадает с одной из m ветвей $w_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, алгеброидной функции $w_*(z)$, определяемой уравнением (42). Применяя к $w(z)$ неравенство (26), получим

$$T(r, w) \leqslant dT(r, v) + \Sigma T(r, a_{ij}) + O(1). \tag{44}$$

Аналогично, рассматривая разложение $\Phi(z)$ по степеням v, получим

$$T(r, v) \leqslant mT(r, w) + \Sigma T(r, a_{ij}) + O(1)$$

откуда следует второе из неравенств (41).

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(z) = w(z) - v^d(z) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют функции $w = \exp(dz)$, $v = \exp z$. Для них во втором из неравенств (41) имеет место равенство. Аналогично можно построить пример, чтобы в первом неравенстве (41) достигалось равенство.

Использованный при доказательстве неравенства (39) прием можно применить для оценки роста решений дифференциальных уравнений и уточнить тем самым теорему 7 из [7].

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k_0+\ldots+k_s=j} a_{k_0 \ldots k_s} f^{k_0} \ldots f_s^{k_s} = 0, \tag{45}$$

где

$$a_{k_0 \ldots k_s}(z) = a_{Kk}(z) \in M_\infty; \quad f_i = f^{(i)}, \quad 0 \leqslant i \leqslant s.$$

Уравнение (45) можно переписать так:

$$\sum_{j=0}^{m} P_j f^j = 0; \quad P_j = \sum_{k_0+\ldots+k_s=j} a_k \left(\frac{f_1}{f}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{f_s}{f}\right)^{k_s}. \tag{46}$$

Так как $f(z)$ удовлетворяет уравнению вида (23), то для $f(z)$ справедливы соотношения (29) — (36). Поэтому

$$m!\, T(r, f) \leqslant T(r, G_2) + O(1), \tag{47}$$

где G_2 определяется формулой (31). Учитывая определения $m(r, G_2)$ и P_j, а также лемму о логарифмической производной, можем записать

$$m(r, G_2) \leqslant \sum_K m(r, a_K) + o(T(r, f)) - \hat{N}(r, G_2),$$

$$r \overline{\in} E, \ \operatorname{mes} E < \infty. \tag{48}$$

Назовем весом одночлена $a_K f_0^{k_0} \ldots f_s^{k_s}$ величину $\varkappa_K = \varkappa_{k_0 \ldots k_s} = 1k_1 + \ldots + sk_s$, а размерностью — величину $|K| = k_0 + \ldots + k_s$. Положим $\varkappa_j = \max\limits_{|K|=j} \varkappa_K$. Очевидно,

$$n\left(z_0, a_K \left(\frac{f_1}{f}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{f_s}{f}\right)^{k_s}\right) \leqslant \varkappa_K n\left(z_0, \frac{f_1}{f}\right) + n(z_0, a_K).$$

Поэтому

$$n(z_0, P_j) \leqslant \sum_{|K|=j} n(z_0, a_K) + \varkappa_j n\left(z_0, \frac{f_1}{f}\right). \tag{49}$$

Учитывая (49), получим

$$n\left(z_0, P_j^{\frac{m!}{m-j}} P_m^{m!\left(1-\frac{1}{m-j}\right)}\right) \leqslant \frac{m!}{m-j} n(z_0, P_j) +$$

$$+ m!\left(1 - \frac{1}{m-j}\right) n(z_0, P_m) \leqslant \sum_K n(z_0, a_K) +$$

$$+ \left[\frac{m!}{m-j} \varkappa_j + m!\left(1 - \frac{1}{m-j}\right) \varkappa_m\right] n(z_0, f_1/f). \tag{50}$$

Поэтому, учитывая определение $N(r, G_2)$, имеем

$$N(r, G_2) \leqslant \sum_K N(r, a_K) +$$

$$+\max_{0\leqslant j\leqslant m-1} m!\left[\frac{\varkappa_j}{m-j}+\left(1-\frac{1}{m-j}\right)\varkappa_m\right]N(r, f_1/f). \qquad (51)$$

Из (47), (48) и (51) после простого преобразования следует

$$(1+o(1))\,T(r, f)\leqslant \varkappa\,[\overline{N}(r, f)+\overline{N}(r, 1/f)]+\sum_K T(r, a_K),$$

где

$$\varkappa=\max_{0\leqslant j\leqslant m-1}\left[\frac{\varkappa_j}{m-j}+\left(1-\frac{1}{m-j}\right)\varkappa_m;\ \varkappa_m\right].$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $f(z)\in M_\infty$ — *решение дифференциального уравнения* (45), *такое, что*

$$\sum_{|K|=m} a_K f^{k_0}\ldots f_s^{k_s}\not\equiv 0,$$

тогда для $r\,\overline{\in}\,E$, $\operatorname{mes} E<\infty$ *справедливо неравенство*

$$(1+o(1))\,T(r, f)\leqslant \varkappa\,[\overline{N}(r, f)+\overline{N}(r, 1/f)]+\sum_K T(r, a_K).$$

Выражаю глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мохонько А. З. О неванлинновских характеристиках некоторых мероморфных функций.— Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 14. Харьков, 1971, с. 83—87.
2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 592 с.
3. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений.— В кн. Виттих «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям». М., Физматгиз, 1960. 319 с.
4. Vatiron G. Sur la derivée des fonctions algebroïdes.—«Bull. Soc. math France», 1931, vol. 59, № 1—2, p. 17—39.
5. Selberg H. L. Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen.— «Math. Z.», 1930, vol. 31, p. 709—728.
6. Ullrich E. Über den Einfluß der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung.—«J. reine angew. Math.», 1931, vol. 167, p. 198—220.
7. Мохонько А. З., Мохонько В. Д. Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям.—«Сиб. мат. журн.», 1974, № 6, с. 1305—1322.