УДК 513.88

*Н. Б. Левина, канд. физ.-мат. наук*

## О ФУНКЦИЯХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЕ С ВЕСОМ

Пусть $\Gamma$ — счетная абелева группа с дискретной топологией и аддитивной записью, $G$ — группа, двойственная ей по Понтрягину, и пусть $\alpha(\gamma)$ — функция от $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющая условиям:

$$\text{(I)}\ \ \alpha(\gamma) \geqslant \alpha(0) = 1,$$

$$\text{(II)}\ \ \alpha(\gamma_1 + \gamma_2) \leqslant \alpha(\gamma_1)\,\alpha(\gamma_2),$$

$$\text{(III)}\ \ \lim \sqrt[n]{\alpha(n\gamma)} = 1 \text{ для любого } \gamma \in \Gamma.$$

Тогда, как известно, пространство $L(\Gamma, \alpha)$ функций $f(x)$, $x \in G$, преобразования Фурье которых абсолютно сходятся с весом $\alpha(\gamma)$, представляют собой банахову алгебру относительно поточечного умножения на $G$ с нормой

$$\|f\| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)|\,\alpha(\gamma),$$

где $\hat{f}(\gamma)$ — значение преобразования Фурье функции $f(x)$ в точке $\gamma \in \Gamma$.

Обозначим через $L_R(\Gamma, \alpha)$ множество вещественно-значных функций из $L(\Gamma, \alpha)$.

Будем говорить, что функция $F(t)$, определенная на отрезке $I = [-1, 1]$ вещественной оси, действует в $L(\Gamma, \alpha)$, если для любой функции $f \in L_R(\Gamma, \alpha)$, отображающей $G$ в отрезок $I$, сложная функция $F[f(x)]$ принадлежит $L(\Gamma, \alpha)$. Обозначим через $F = F(\Gamma, \alpha)$ множество функций, действующих в $L(\Gamma, \alpha)$.

По теореме Винера — Леви $F$ содержит все функции, которые продолжаются как аналитические функции комплексного переменного в некоторую окрестность отрезка $I$.

Если $F$ состоит только из таких функций, то будем говорить, что в $L(\Gamma, \alpha)$ справедлива обратная теорема Винера — Леви. Это имеет место в случае $\alpha(\gamma) \equiv 1$, как доказано в [1]. Аналогичная ситуация, но по другим причинам, возникает и в другом крайнем случае: пусть $\Gamma = Z$ и вес $\alpha(\gamma)$ экспоненциально растет при $\gamma \to \infty$ ($\gamma \to -\infty$), т. е. условие (III) не выполнено. Тогда, как легко видеть, все функции из $L(Z, \alpha)$ аналитически продолжаются в некоторую круговую полосу: значит, все функции из $F(Z, \alpha)$ аналитичны.

Однако при наличии нетривиального веса, удовлетворяющего (III), теорема Винера — Леви не допускает обращения. Первый результат в этом направлении получен Н. Лебланом [2] для случая $\Gamma = Z$ (т. е. вес представляет собой двустороннюю последовательность $\alpha(n)$): если

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{|n|,\,|m|\geqslant N}\frac{\alpha(n+m)}{\alpha(n)\,\alpha(m)}=0, \tag{1}$$

то существуют неаналитические функции, действующие в $L(Z, \alpha)$.

Доказательства и в [1], и в [2] основаны на оценке роста при $r\to\infty$ величины

$$\Phi_\alpha(r)=\sup_{f\in L_R(\Gamma,\,\alpha);\,\|f\|=1}\|e^{irf}\|.$$

В первом случае ($\alpha(\gamma)\equiv 1$) имеет место равенство $\Phi_\alpha(r)\equiv e^r$, а во втором (т. е. при выполнении (1)) —

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\Phi_\alpha(r)}{r}=0. \tag{2}$$

Заметим, что в общем случае из (2) немедленно следует существование неаналитической функции $F$, действующей в $L(\Gamma, \alpha)$: достаточно взять $F(t)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}a_n e^{int}$, где $a_n$ с ростом $|n|$ убывают медленнее экспоненты, но так, что ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|a_n|\,\Phi_\alpha(nr)$ сходится при любом $r>0$.

С другой стороны, если вес $\alpha(n)$ такой, что $L(\Gamma, \alpha)$ — регулярная алгебра (для этого, как показано в [3], необходимо и достаточно, чтобы для любого $\gamma\in\Gamma$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\alpha(n\gamma)}{n^2}$ сходился), и

$$\Phi_\alpha(r)\geqslant e^{cr},\ c>0, \tag{3}$$

то любая функция из $F$ аналитична. Доказательство полностью аналогично тому, которое проводится в [1]. Воспроизведем его в общих чертах.

Пусть $F\in \boldsymbol{F}$; можно считать, что $F(0)=0$. Так как $F(f(x))\in L(\Gamma, \alpha)$ для любой $f\in L_R(\Gamma, \alpha)$, то $F(f(x))=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}a(\gamma, f)<\gamma, x>$, где $<\gamma, x>$ — значение характера $\gamma$ на элементе $x$. Занумеруем как-нибудь элементы группы $\Gamma$: $\gamma_1\ \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ и рассмотрим отображения

$$(F_N): f \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{N}|a(\gamma_n, f)|\,\alpha(\gamma_n),$$

$$(F): f \rightsquigarrow \sum_{\gamma\in\Gamma}|a(\gamma, f)|\,\alpha(\gamma).$$

Так как $(F)$ есть поточечный предел отображений $(F_N)$, то из теоремы Бэра следует, что существует некоторый шар в $L_R(\Gamma, \alpha)$, на котором отображение $f \rightsquigarrow F(f)$ ограничено по норме. Если $g$ и $f$ — функции из $L_R(\Gamma, \alpha)$, носители которых не пересекаются (именно здесь используется регулярность алгебры $L(\Gamma, \alpha)$), то $F(f+g) = F(f) + F(g)$, и с помощью этого замечания можно построить шар $\|f\| \leqslant r$ с центром в точке 0, на котором $\|F(f)\|$ ограничены.

Рассмотрим $2\pi$-периодическую функцию $F_1(t) = F(\rho \sin t)$, где $\rho > 0$ и достаточно мало, так что $F_1 \in \boldsymbol{F}$ и $\|F_1(f)\|$ ограничены при $\|f\| \leqslant r$. Если теперь учесть, что $\sup\limits_{\|f\| \leqslant r;\ f \in L(\Gamma, \alpha)} \|e^{inf}\|$ экспоненциально растет при $|n| \to \infty$, то получается, что коэффициенты Фурье функции $F_1$ экспоненциально убывают, т. е. $F_1$ аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} z| \leqslant r$. Отсюда следует, что $F$ аналитична в окрестности нуля и отсюда легко получить ее аналитичность в любой точке $t \in \boldsymbol{I}$.

В настоящей работе указывается условие на вес $\alpha(\gamma)$, гарантирующее экспоненциальный рост $\Phi_\alpha(r)$ и, следовательно, аналитичность всех функций из $\boldsymbol{F}$. Краткое изложение настоящих результатов смотри в [4].

Для удобства записи мы будем предполагать, что

(IV) $$\alpha(\gamma) = \alpha(-\gamma) \text{ при любом } \gamma \in \Gamma.$$

Это ограничение несущественно (см. замечания в конце статьи).

Чтобы сформулировать наше условие, введем следующие обозначения. Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset \Gamma_N \subset \ldots$ — такая последовательность конечных подмножеств группы $\Gamma$, что $\bigcup\limits_N \Gamma_N = \Gamma$.

Обозначим

$$\beta_{N,p} = \sup_{\gamma_i \in \Gamma_N} \frac{\alpha(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_p)}{\alpha(\gamma_1)\,\alpha(\gamma_2) \ldots \alpha(\gamma_p)}.$$

Очевидно, из (II) следует, что

$$\beta_{N,\,p+q} \leqslant \beta_{N,\,p} \cdot \beta_{N,\,q}.$$

Кроме того, $\beta_{N,p}$ при фиксированном $p$ убывает с ростом $N$. Поэтому существует

$$\lim_{p \to \infty} \lim_{N \to \infty} \beta_{N,p}^{\frac{1}{p}} = \beta.$$

Заметим, что $\beta$ не зависит от выбора последовательности $\Gamma_N$. Наше условие состоит в том, что

$$\beta > 0. \tag{4}$$

В п. 1 мы доказываем, что оно необходимо: в п. 2 — что (при слабых дополнительных ограничениях) это условие достаточно. В п. 3 рассмотрен ряд иллюстрирующих примеров.

1. *Необходимость* условия (4).

**Теорема 1.** *Если* $\beta = 0$, *то существует неаналитическая функция, действующая на* $L(\Gamma, \alpha)$.

Доказательство. Выведем равенство (2). Для этого выберем последовательность $\Gamma_N$, участвующую в определении $\beta$, следующим специальным образом. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — образующие группы $\Gamma$. Введем норму элемента $\gamma \in \Gamma$:

$$\|\gamma\| = \inf\left(\sum_k 2^k |a_k|\right),$$

где inf берется по всем таким наборам целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$ что $\gamma = \sum_k a_k e_k$. Теперь положим $\Gamma_N = \{\gamma \in \Gamma: \|\gamma\| \leqslant N\}$.

Заметим, что при любом целом $n$

$$\Gamma_N^{(n)} = \underbrace{\Gamma_N + \Gamma_N + \ldots + \Gamma_N}_{n} \subset \Gamma_{nN};$$

кроме того, нетрудно посчитать, что $|\Gamma_N|$ — число элементов в $\Gamma_N$ — не превосходит

$$2^{[\log_2 N+1]^2} \cdot \{[\log_2 N + 1]!\}^{-1} \leqslant 2^{(\log_2 N)^2}.$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L_R(\Gamma, \alpha)$, по норме не превосходящая 1. Запишем

$$f(x) = \sum \hat{f}(\gamma) < \gamma, x>$$

и оценим сначала $\|e^{irg}\|$, где $g = \sum_{\gamma \in \Gamma_N} \hat{f}(\gamma) < \gamma, x>$.

Имеем

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{(ir)^k}{k!} g^k = e^{irg} = \sum_{\gamma \in \Gamma} b(\gamma) <\gamma, x>$$

и

$$\|e^{irg}\| \leqslant \left\| \sum_{k < er} \frac{(ir)^k}{k!} g^k \right\| + 1 \leqslant \sum_{\gamma \in \Gamma_N^{([er])}} |b(\gamma)| \alpha(\gamma) + 1 \leqslant$$

$$\leqslant |\Gamma_{[er]N}| \max_{\gamma \in \Gamma_N^{([er])}} \alpha(\gamma) + 1 \leqslant 2^{(\log_2 erN)^2} \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant r \\ \gamma \in \Gamma_N}} \alpha(k\gamma) + 1.$$

Обозначим теперь $h = f - g$; имеем

$$\|h^k\| = \|\sum_{\gamma_j \notin \Gamma_N} \hat{f}(\gamma_1) \hat{f}(\gamma_2) \ldots \hat{f}(\gamma_k) < \gamma_1 + \ldots + \gamma_k, x > \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_N} |\hat{f}(\gamma_1)| |\hat{f}(\gamma_2)| \ldots |\hat{f}(\gamma_k)| \alpha(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_k) \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{N,k} \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_N} |\hat{f}(\gamma_1)| |\hat{f}(\gamma_2)| \ldots |\hat{f}(\gamma_k)| \alpha(\gamma_1) \alpha(\gamma_2) \ldots \alpha(\gamma_k) \leqslant \beta_{N,k}.$$

Поэтому

$$\| e^{irh} \| \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \frac{r^k}{k!} \beta_{N,\ k}.$$

Фиксируем какое-то целое $p > 0$. Так как $\beta_{N,\ lp+q} \leqslant \beta_{N,\ p}^{l} \cdot \beta_q \leqslant \leqslant \beta_{N,\ p}^{l}$ для любых целых $l,\ q > 0$, то при любом $k$ имеем $\beta_{N,\ k} \leqslant \leqslant \beta^{kp^{-1}-1}$, и

$$\| e^{irh} \| \leqslant \beta_{N,\ p}^{-1} \sum_{k \geqslant 0} \frac{r^k}{k!} \beta_{N,p}^{kp^{-1}} = \beta_{N,\ p}^{-1} \exp r \beta_{N,p}^{\frac{1}{v}}.$$

Итак,

$$\frac{\ln \Phi_\alpha(r)}{r} \leqslant \frac{\ln |\Gamma_{[er]N}|}{r} + \frac{\ln \max\limits_{\substack{0 < k \leqslant er \\ \gamma \in \Gamma_r}} \alpha(kr)}{r} + \frac{\ln \beta_{N,\ p}^{-1}}{r} + \beta_{N,\ p}^{\frac{1}{p}}.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выбираем (фиксированные) $N$ и $p$ так, чтобы (в силу условия теоремы) последнее слагаемое не превосходило $\frac{\varepsilon}{4}$, затем выберем $r_0$ так, чтобы при $r > r_0$ выполнялись неравенства

$$\frac{\ln \beta_{N,\ p}^{-1}}{r} < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\frac{\ln \alpha(k\gamma)}{r} < \frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $\gamma \in \Gamma_N$ и любого $k,\ 0 \leqslant k \leqslant er$ (это возможно в силу условия (III)) и

$$\frac{\ln 2 \cdot (\log_2 erN)^2}{r} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\ln \Phi_\alpha(r)}{r} = 0$, и теорема доказана.

2. *Достаточность*. Переформулируем условие (4): существует такое $\delta,\ 0 < \delta \leqslant 1$, что при любых $N$ и $p$ найдутся элементы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, лежащие вне $\Gamma_N$ и удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\alpha(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_p)}{\alpha(\gamma_1)\,\alpha(\gamma_2) \ldots \alpha(\gamma_p)} \geqslant \delta^p. \tag{5}$$

Если существует такое $\hat{\delta} > 0$, что для любого $p$ найдутся попарно различные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, удовлетворяющие (5) с заменой $\delta$ на $\hat{\delta}$, то будем говорить, что вес $\alpha(\gamma)$ удовлетворяет условию (4′).

Сначала докажем, что условие (4′) достаточно для экспоненциальности роста $\Phi_\alpha(r)$, а потом будем получать условие (4′) из (4).

Определение. *Элементы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p \in \Gamma$ будем называть независимыми, если среди всевозможных комбинаций вида* $\{\varepsilon_1\gamma_1 +$

$+\varepsilon_2\gamma_2+\ldots+\varepsilon_p\gamma_p\}$, *где* $\varepsilon=\pm 1$ *или* 0, *нет двух одинаковых.*

**Лемма.** *Если для некоторого* $\hat{\delta}>0$ *имеет место условие* (4′), *то для любого* $p$ *можно выбрать независимые элементы* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, *удовлетворяющие неравенству* (5) *с заменой* $\hat{\delta}$ *на* $\hat{\delta}^5$.

Доказательство. Фиксируем некоторое $p$ и возьмем $p_1=5^{p+1}-1$; выберем набор $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p_1}\}$ $(\gamma_l\neq\gamma_j)$, для которого имеет место (5).

Выделим из этого набора $p$ независимых элементов: $\{\overset{1}{\gamma}_1, \overset{1}{\gamma}_2, \ldots, \overset{1}{\gamma}_p\}$ (легко видеть, что это можно сделать, выбирая последовательно $\overset{1}{\gamma}_1, \overset{1}{\gamma}_2, \ldots$ и т. д. так, чтобы $\overset{1}{\gamma}_k$ не совпадал ни с одной из $5^{k-1}$ комбинаций $\lambda_1\overset{1}{\gamma}_1+\lambda_2\overset{1}{\gamma}_2+\ldots+\lambda_{k-1}\overset{1}{\gamma}_{k-1}$, где $\lambda_i$ принимают значения $0, \pm 1, \pm 2$). Из оставшихся $p_1-p$ элементов выбираем опять $p$ независимых $\overset{2}{\gamma}_1, \overset{2}{\gamma}_2, \ldots, \overset{2}{\gamma}_p$, и так поступаем до тех пор, пока число оставшихся элементов не станет меньше $5^p$. Итак, получилось $h=\left[\frac{5^{p+1}-5^p}{p}\right]>\frac{5}{p}$ наборов независимых элементов, и

$$\delta^{p_1}\leqslant\frac{\alpha(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_p)}{\alpha(\gamma_1)\,\alpha(\gamma_2)\ldots\alpha(\gamma_p)}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_1+\overset{j}{\gamma}_2+\ldots+\overset{j}{\gamma}_p\right)}{\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_1\right)\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_2\right)\ldots\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_p\right)}.$$

Очевидно, хотя бы для одного $j$

$$\frac{\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_1+\overset{j}{\gamma}_2+\ldots+\overset{j}{\gamma}_p\right)}{\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_1\right)\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_2\right)\ldots\alpha\left(\overset{j}{\gamma}_p\right)}\geqslant\hat{\delta}^{\frac{p_1}{h}}>(\hat{\delta}^5)^p,$$

что и требовалось.

**Теорема 2.** *Если* $\alpha(\gamma)$ *удовлетворяет* (4′), *то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\Phi_\alpha(r)}{r}>0$$

(*предел существует, так как легко видеть, что* $\Phi_\alpha(r)$ *полумультипликативна*).

Доказательство представляет собой модификацию доказательства аналогичного факта в работе [1]. Выберем, согласно лемме, независимые элементы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, удовлетворяющие (5). Обозначим $\mu_k=\frac{1}{p}\frac{\operatorname{Re}<\gamma_k x>}{\alpha(\gamma_k)}$ и рассмотрим $f=f_p=\mu_1+\mu_2+$ $+\ldots+\mu_p$.

Заметим сначала, что при фиксированном $r$ норму разности

$$\left\|e^{irf_p}-\prod_{k=1}^{p}(1+ir\mu_k)\right\|$$

можно сделать сколь угодно малой за счет выбора $p$. В самом деле, запишем

$$e^{irf} = \prod_{k=1}^{p} (1 + ir\mu_k + \tau_k) = \prod_{k=1}^{p} (1 + ir\mu_k) + \tau.$$

Имеем

$$\| \tau_k \| \leqslant \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{p}\right)^n < \left(\frac{r}{p}\right)^2 \text{ при } p > 2r.$$

Так как $\| 1 + ir\mu_k \| = 1 + \frac{r}{p}$, то

$$\| \tau \| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \left(1 + \frac{r}{p}\right)^{p-k} \left(\frac{r}{p}\right)^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant e^r \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{r}{p}\right)^{2k} = e^r \left[\left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)^p - 1\right].$$

Выбирая достаточно большое $p$, можно сделать последнее выражение сколь угодно малым.

Остается оценить снизу $\| \prod_{k=1}^{p} (1 + ir\mu_k) \|$.

Имеем

$$\prod_{k=1}^{p} (1 + ir\mu_k) = 1 + irf + \ldots + \left(\frac{ir}{p}\right)^j \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant p} \mu_{k_1}\mu_{k_2} \ldots \mu_{k_j} + \ldots = 1 + irf + \sum_{j=2}^{p} \left(\frac{ir}{p}\right)^j \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant p} \frac{\mathrm{Re} < \varepsilon_1\gamma_{k_1} + \ldots \varepsilon_j \gamma_{k_j}, x >}{\alpha(\gamma_{k_1}) \ldots \alpha(\gamma_{k_j})}.$$

В последнем выражении сумма берется по всем наборам $\{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_j\}$, где $\varepsilon_i$ принимают значения $\pm 1$. Так как все эти суммы $\varepsilon_1\gamma_{k_1} + \varepsilon_2\gamma_{k_2} + \ldots + \varepsilon_j\gamma_{k_j}$ попарно различны (в силу выбора $\gamma_j$) и $\| \mathrm{Re} < \gamma, x > \| = \alpha(\gamma)$ (в силу (IV)), то

$$\| \prod_{k=1}^{p} (1 + ir\mu_k) \| = 1 + r +$$

$$+ \sum_{j=2}^{p} \left(\frac{r}{p}\right)^j \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant p} \frac{\alpha(\varepsilon_1\gamma_{k_1} + \ldots + \varepsilon_j\gamma_{k_j})}{\alpha(\gamma_{k_1}) \ldots \alpha(\gamma_{k_j})} >$$

$$> 1 + r + \sum_{j=2}^{p} \left(\frac{r}{p}\right)^j \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant p} \frac{\alpha(\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \ldots + \gamma_{k_j})}{\alpha(\gamma_{k_1}) \alpha(\gamma_{k_2}) \alpha(\gamma_{k_j})}.$$

Так как предел при $r \to \infty$ величины $\frac{\ln \Phi_\alpha(r)}{r}$ существует, то нам достаточно получить оценку нормы $\|\prod_{k=1}^{p}(1+ir\mu_k)\|$ снизу для целых $r$. Возьмем такое $p$, чтобы оно делилось на $(3r)!$ и оценим в последнем выражении коэффициент при $\left(\frac{r}{p}\right)^j$ для $j \leqslant 3r$. Для этого в сумме

$$\sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant p} \frac{\alpha(\gamma_{k_1}+\cdots+\gamma_{k_j})}{\alpha(\gamma_{k_1})\ldots\alpha(\gamma_{k_j})}$$

разобьем слагаемые на группы из $\frac{p}{j}$ членов так, чтобы объединение всех $\gamma_{k_j}$, входящих в данную группу, давало в точности весь набор $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$. Применяя в каждой группе неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом и учитывая полумультипликативность веса, получаем, что сумма слагаемых в каждой группе не меньше, чем

$$\frac{p}{j}\left\{\frac{\alpha(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}{\alpha(\gamma_1)\ldots\alpha(\gamma_p)}\right\}^{\frac{j}{p}} \geqslant \frac{p}{j}\hat{\delta}^j$$

(в силу (5)). Теперь имеем

$$\left\|\prod_{k=1}^{p}(1+ir\mu_k)\right\| \geqslant \sum_{j=0}^{3r}\binom{p}{j}\left(\frac{r\hat{\delta}}{p}\right)^j >$$

$$> \left(1+\frac{r\hat{\delta}}{p}\right)^p - 1 > e^{\frac{\hat{\delta}r}{2}};$$

и теорема доказана.

**Теорема** 3. *Если группа* $\Gamma$ *периодична*[1] *и* $\beta > 0$, *то для* $L(\Gamma, \alpha)$ *имеет место обратная теорема Винера-Леви.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что $L(\Gamma, \alpha)$ регулярна $\left(\text{очевидно, что } \sum_{n \geqslant 1}\frac{\ln \alpha(n\gamma)}{n^2} < \infty \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\right)$, и поэтому достаточно получить оценку (3). Мы докажем, что $\alpha(\gamma)$ удовлетворяет (4′), после чего останется только применить теорему 2.

Если вес $\alpha(\gamma)$ ограничен на бесконечной последовательности $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$, то (4′) всегда выполняется. Действительно, если $\alpha(\gamma_n) < c$, то для любых элементов последовательности $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\}$

$$\frac{\alpha(\gamma_{i_1}+\cdots+\gamma_{i_p})}{\alpha(\gamma_{i_1})\ldots\alpha(\gamma_{i_p})} \geqslant \frac{1}{c^p}.$$

[1] Группа называется периодической, если любой ее элемент имеет конечный порядок, и эти порядки в совокупности ограничены.

Поэтому рассмотрим такой случай, когда для любого $c>0$ найдется такое $N$, что $\alpha(\gamma) \geqslant c$ при $\gamma \notin \Gamma_N$.

Зафиксируем $p$ и выберем $N$ так, чтобы $\alpha(\gamma) \geqslant \delta^{-2}$ вне $\Gamma_N$. Возьмем теперь $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \Gamma \setminus \Gamma_N$, удовлетворяющие (5). Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ — различные элементы, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — их кратности в наборе $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\}$, $p_1 + \ldots + p_k = p$. Запишем $p_i = q_i l + \bar{p}_i$, $(\bar{p}_i < l)$, где $l$ — период группы $\Gamma$, т. е. наибольший порядок ее элементов. Имеем

$$\delta^p \leqslant \frac{\alpha(p_1\gamma_1 + \ldots + p_k\gamma_k)}{\alpha(\gamma_1)^{p_1} \ldots \alpha(\gamma_k)^{p_k}} =$$

$$= \frac{\alpha(\bar{p}_1\gamma_1 + \ldots + \bar{p}_k\gamma_k)}{\alpha(\gamma_1)^{\bar{p}_1} \ldots \alpha(\gamma_k)^{\bar{p}_k}} \cdot \frac{1}{\alpha(\gamma_1)^{q_1 l} \ldots \alpha(\gamma_k)^{q_k l}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha(\bar{p}_1\gamma_1 + \ldots + p_k\gamma_k)}{\alpha(\gamma_1)^{\bar{p}_1} \ldots \alpha(\gamma_k)^{\bar{p}_k}} \cdot \delta^{2l \sum\limits_{j=1}^{k} q_j}.$$

Отсюда видим, что $p > 2l \sum\limits_{j}^{k} q_j = 2p - 2\sum\limits_{j=1}^{k} \bar{p}_j$, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{k} \bar{p}_j > \frac{p}{2}$; но $p_j < l$, поэтому $k > \frac{p}{2l}$ и

$$(\delta^{2l})^k \leqslant (\delta^{2l})^{\frac{p}{2l}} \leqslant \frac{\alpha(p_1\gamma_1 + \ldots + p_k\gamma_k)}{\alpha(\gamma_1)^{p_1} \ldots \alpha(\gamma_k)^{p_k}} \leqslant \frac{\alpha(\gamma_1 + \ldots + \gamma_k)}{\alpha(\gamma_1) \ldots \alpha(\gamma_k)}.$$

Так как $k > \frac{p}{2l}$, т. е. $k$ неограниченно растет с ростом $p$, то последнее неравенство означает выполнение условия (4'). Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Пусть в $\Gamma$ найдется элемент сколь угодно большого порядка и пусть*

$$\sup_{\gamma \notin \Gamma_N} \frac{\alpha(\gamma + \tilde{\gamma})}{\alpha(\tilde{\gamma})} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1 \tag{6}$$

*для любого фиксированного $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Тогда из $\beta > 0$ следует, что*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln \Phi_\alpha(r)}{r} > 0.$$

Доказательство. Для данного $N$ и каждого $p$ зафиксируем какой-нибудь набор $\gamma_1, \ldots \gamma_p \in \Gamma \setminus \Gamma_N$, удовлетворяющий (5) с некоторым $\delta$, $0 < \delta \leqslant 1$. Пусть $k = k_p$ — число различных элементов в этом наборе, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ — эти различные элементы; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — их кратности. Могут представиться два случая

1. $\frac{k_p}{p} \geqslant c > 0$ для бесконечного множества значений $p$. Тогда имеем

$$\left(\delta^{\frac{1}{c}}\right)^{k_p} \leqslant \delta^p \leqslant \frac{\alpha(\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)}{\alpha(\gamma_1)\ldots\alpha(\gamma_p)} \leqslant \frac{\alpha(\gamma_1 + \ldots + \gamma_k)}{\alpha(\gamma_1)\ldots\alpha(\gamma_k)}.$$

Таким образом, для бесконечной последовательности целых чисел $k_p$ нашлись попарно различные элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_p}$, удовлетворяющие (5), и остается применить теорему 2.

2. Пусть $\frac{k_p}{p} \to 0$. Занумеруем при каждом $p$ элементы $\gamma_1, \ldots \gamma_{k_p}$ так, чтобы $\frac{\alpha(p_j\gamma_j)}{\alpha(\gamma_j)^{p_j}} \geqslant \delta^{2p_j}$ при $j = 1, \ldots, t_p$ и $\frac{\alpha(p_j\gamma_j)}{\alpha(\gamma_j)^{p_j}} < \delta^{2p_j}$ при $j = t_p + 1, \ldots, k_p$. Если $\max\limits_{j<t_p} p_j \leqslant \text{const}$ при всех $p$, то $\sum\limits_{j<t_p} p_j/p \leqslant \text{const}\,\frac{t_p}{p} \leqslant \text{const}\,\frac{k_p}{p} \to 0$, т. е. $\sum\limits_{j=t_p+1}^{k_p} \frac{p_j}{p} \to 1,\ p \to \infty$, и при достаточно большом $p$ имеем

$$\delta^{\frac{3}{2}\sum\limits_{j=t_p+1}^{k_p} p_j} \leqslant \delta^{\sum\limits_{j=1}^{k_p} p_j} \leqslant \prod_{j=1}^{k_p} \frac{\alpha(p_j\gamma_j)}{\alpha(\gamma_j)^{p_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=t_p+1}^{k_p} \frac{\alpha(p_j\gamma_j)}{\alpha(\gamma_j)^{p_j}} < \delta^{2\sum\limits_{j=t_p+1}^{k_p} p_j},$$

но это невозможно, так как $\delta \leqslant 1$. Следовательно, для любых $N$ и $p$ найдется такое $q = q_p$, неограниченно растущее с ростом $p$, и такой элемент $l_q \in \Gamma \setminus \Gamma_N$, что

$$\frac{\alpha(ql_q)}{\alpha(l_q)^q} \geqslant \delta^{2q}. \tag{7}$$

Фиксируем теперь $q$ и выберем $\bar{\gamma} \in \Gamma$, порядок которого не меньше, чем $q^2$. Возьмем $l_q$, удовлетворяющее (7), и положим

$$\gamma'_j = l_q + j\bar{\gamma}, \quad j = 0, \ldots q-1.$$

Очевидно, все $\gamma_j$ попарно различны.

Запишем

$$\delta^2 \leqslant \frac{\alpha(ql_q)^{1/q}}{\alpha(l_q)} = \left(\frac{\alpha(\gamma'_0 + \ldots + \gamma'_{q-1})}{\alpha(\gamma'_0)\ldots\alpha(\gamma'_{q-1})}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha(ql_q)}{\alpha\left(ql_q + \frac{q(q-1)}{2}\bar{\gamma}\right)}\right)^{1/q} \frac{\left(\alpha(\gamma'_0)\ldots\alpha(\gamma'_{q-1})\right)^{1/q}}{\alpha(l_q)}.$$

Заметим, во-первых, что можно считать $\inf\limits_{\gamma\notin\Gamma_N} \alpha(\gamma) \to \infty$; действительно, если $\alpha(\gamma)$ ограничен на некоторой последовательности, то, как в теореме 3, отсюда немедленно следует (4′), и остается сослаться на теорему 2. Поэтому для $l_q = l_q^{(N)} \notin \Gamma_N$, удовлетворяющего (7), имеем $\alpha\left(ql_q^{(N)}\right) \to \infty$ так, что можно указать такое $N'$, неограниченно растущее вместе с $N$, что $ql_q^{(N)} \in \Gamma_{N'}$.

Выберем теперь $N$ настолько большим, чтобы

$$\left|\frac{\alpha(\gamma + j\bar{\gamma})}{\alpha(\gamma)} - 1\right| < \frac{1}{q}$$

при $\gamma \notin \Gamma_N \cap \Gamma_{N'}$ и любом $j$, $0 \leqslant j \leqslant q^2$. Тогда для $l_q \notin \Gamma_N$ имеем

$$\frac{\alpha(ql_q)}{\alpha\left(ql_q + \frac{q(q-1)}{2}\bar{\gamma}\right)} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{q}},$$

$$\frac{\alpha\left(\gamma_0'\right) \ldots \alpha\left(\gamma_{q-1}'\right)}{\alpha\left(l_q\right)^q} \leqslant \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q.$$

Подставив эти оценки в (8), получаем, что для некоторого $\hat{\delta} > 0$ и бесконечной последовательности значений $q$ нашлись попарно различные элементы $\gamma_0', \ldots \gamma_{q-1}'$, для которых

$$\frac{\alpha\left(\gamma_0' + \gamma_1' + \ldots + \gamma_{q-1}'\right)}{\alpha\left(\gamma_0'\right) \ldots \alpha\left(\gamma_{q-1}'\right)} \geqslant \hat{\delta}^q;$$

значит, условие (4′) выполнено. Применение теоремы 2 завершает доказательство.

3. *Замечания и примеры.*

Если $\alpha(\gamma) \not\equiv \alpha(-\gamma)$, то следует рассмотреть

$$\bar{\alpha}(\gamma) = \alpha(\gamma) + \alpha(-\gamma) = 2\,\|\operatorname{Re} \langle\gamma,\ x\rangle\| = 2\,\|\operatorname{Im} \langle\gamma,\ x\rangle\|.$$

Очевидно, $\bar{\alpha}(\gamma)$ полумультипликативна вместе с $\alpha(\gamma)$, поэтому существует

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{N\to\infty} \bar{\beta}_{N,\,p} = \bar{\beta},$$

где

$$\bar{\beta}_{N,\,p} = \sup_{\gamma_j \notin \Gamma_N} \frac{\bar{\alpha}(\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)}{\bar{\alpha}(\gamma_1) \ldots \bar{\alpha}(\gamma_p)}.$$

Ясно, что теоремы 1—4 остаются справедливыми при замене $\beta$ на $\bar{\beta}$, так как они посвящены оценке $\|e^{irf}\|$, где $f$ — вещественнозначная функция.

Приведем ряд примеров поведения веса для случая $\Gamma = Z$. Они иллюстрируют тот факт, что для справедливости обратной теоремы Винера-Леви существенна не скорость роста веса $\alpha(n)$ ($n \in Z$) при $n \to \pm\infty$, а некоторая «нерегулярность» $\alpha(n)$.

Пусть $\ln \alpha(n)$ — четная неограниченная функция целочисленного аргумента, которая вогнута при $n \geqslant M$ для некоторого целого $M > 0$. Тогда $\lim\limits_{N \to \infty} \beta_{N,2} = 0$ и, следовательно, обратная теорема Винера-Леви не имеет места. В самом деле, из вогнутости $\ln \alpha(n)$ следует, что, начиная с некоторого $n$,

а) $\alpha(n)$ монотонно растет при $n \to \infty$;

б) $\frac{\alpha(n+p)}{\alpha(n)}$ при фиксированном $p$ монотонно убывает при $n \to \infty$.

Из а) следует, что выражение $\frac{\alpha(m+n)}{\alpha(m)\alpha(n)}$ не превосходит $\min \left\{\frac{1}{\alpha(n)}, \frac{1}{\alpha(m)}\right\}$, если $m$ и $n$ имеют разные знаки; если же $m$ и $n$ одного знака, например, $0 < m \leqslant n$, то из б) следует, что

$$\frac{\alpha(m+n)}{\alpha(m)\alpha(n)} \leqslant \frac{1}{\alpha(m)} \frac{\alpha(2m)}{\alpha(m)}.$$

Из а) и б) следует, что последнее выражение монотонно убывает:

$$\frac{\alpha(2(m+1))}{\alpha(m+1)^2} < \frac{\alpha(2m+1)}{\alpha(m)\alpha(m+1)} < \frac{\alpha(2m)}{\alpha(m)^2},$$

и поэтому $\beta_{N,2} = \frac{\alpha(2N)}{\alpha(N)^2}$. Если $\lim \beta_{N,2} = c > 0$, то получается, что $\alpha(2N) \geqslant c\alpha(N)^2$ для всех достаточно больших $N$, что означает экспоненциальный рост веса $\alpha(N)$ и противоречит (III).

Отсюда следует, что, во-первых, условие $\beta = 0$ не накладывает ограничений на скорость роста $\alpha(n)$; во-вторых, для всех «обычно встречающихся» весов (таких, как степенные; $e^{\ln^{\lambda}(|n|+1)}$ при $\lambda > 0$; $e^{|n|^{\mu}}$ при $\mu < 1$ и т. п.) величина $\beta$ оказывается равной нулю. Но, разумеется, существуют веса, для которых $\beta > 0$: как уже отмечалось, достаточно взять вес, ограниченный на некоторой последовательности целых чисел.

Следующая конструкция дает возможность получить различные примеры «нерегулярных» весов. Возьмем последовательность целых чисел $0 = a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \ldots$ и подберем $\lambda_k \downarrow 0$ и $d_k \geqslant 0$ так, чтобы $\frac{d_k}{\lambda_k} \downarrow 0$,

$$\lambda_k b_k + d_k = \lambda_{k+1} a_{k+1} + d_{k+1}. \tag{8}$$

Положим

$$A(n) = \begin{cases} \lambda_k |n| + d_k, & a_k \leqslant |n| \leqslant b_k, \\ A(b_k), & b_k < |n| < a_{k+1}. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, $A(n) \uparrow \infty$ и $\frac{A(n)}{n} \downarrow 0$. Легко проверить, что четная функция целочисленного аргумента, обладающая этими двумя свойствами, представляет из себя логарифм некоторого веса $\alpha(n)$.

Выбирая различным образом $a_k$, $b_k$ и $d_k$, можно получить, во-первых, пример такого веса $\alpha(n)$, что $\beta = 0$, но $\lim\limits_{N\to\infty} \beta_{N,p} > 0$ при любом $p$. Для этого достаточно, например, чтобы последовательность $b_k/a_k$ имела вид 2, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 2 ... и чтобы $d_k = \tilde{d}_p$ при $\frac{b_k}{a_k} = p$, где $\tilde{d}_p \uparrow \infty$. Легко проверить, что для веса $\alpha(n) = e^{A(n)}$, где $A(n)$ определяется с помощью (9), имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \beta_{N,p} = e^{-(p-1)\tilde{d}_p}$. Отсюда, в частности, следует, что множество весов, для которых обратная теорема Винера — Леви не имеет места, отнюдь не исчерпывается весами, удовлетворяющими условию Леблана [2]:

$$\lim_{N\to\infty} \beta_{N,2} = 0.$$

Во-вторых, нетрудно построить пример веса, растущего с «заданной скоростью», для которого обратная теорема Винера — Леви справедлива. Точнее: если $A_1(t)$, $A_2(t)$ — монотонные функции, причем $\frac{A_i(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$, $\frac{A_1(n)}{A_2(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то можно построить $A(n)$ в виде (9) так, что

$$A_1(n) \leqslant A(n) \leqslant A_2(n),$$

и для $\alpha(n) = e^{A(n)}$ при любом $p$ найдутся попарно различные $n_1, \ldots, n_p$, для которых $\alpha(n_1 + \ldots + n_p) = \alpha(n_1) \ldots \alpha(n_p)$ и тем более $\beta = 1$. Этот пример вместе с предыдущими показывает, что справедливость обратной теоремы Винера — Леви зависит лишь от «арифметических» свойств веса, а не от скорости его роста.

## ЛИТЕРАТУРА


1. The functions which operate on Fourier transforms. — «Acta Math», 1959, vol. 102, № 1—2, p. 135—157. Auth.: H. Helson, J. — P. Kahane, J. Katznelson, W. Rudin.
2. Leblanc N. Calcul simbolique dans certaines algèbre de series de Fourier à poids. — «Compt. Rend.», ser. A — B, 1968, vol. 266, p. 339—341.
3. Domar J. Harmonic analisis based on certain commutative Banach algebras. — «Acta Math»., 1956, vol. 96, № 1—2, p. 153—173.
4. Левина Н. Б. Об обратной теореме Винера — Леви. — «Функциональный анализ», 1973, т. 7, вып. 3, с. 84—85.